



数学

福建人民教育出版社

一九八〇年高中毕业生

数学总复习纲要

福建教育学院编

福建人民教育出版社

一九八〇年高中毕业生
数 学 总 复 习 纲 要
福建教育学院编

*

福建人民教育出版社出版
福建省新华书店发行
福建新华印刷厂印刷

787×1092毫米 32开本 14.75印张 330千字

1980年2月第一版 1980年2月第一次印刷

印数: 1--374,300

书号: 7159·513 定价: 0.99元

编 者 的 话

本《纲要》是根据1980年高考复习大纲的要求和全日制十年制中学数学教学大纲（试行草案）的精神，针对我省1980届高中毕业生数学科的教学实际，就1979年的《数学总复习纲要》进行修改和补充而编写的。供1980年高中毕业生总复习时使用。

本《纲要》共包括代数、几何、三角和平面解析几何等四部分。各部分都首先把中学数学教材中的基础知识进行综合、概括，使学生通过复习获得比较系统和扎实的基础知识；然后围绕教材的重点和关键，选择较有启发性的范例和练习题，帮助学生更好地掌握数学的基本概念、定理、公式和法则，灵活、准确地应用这些知识进行解题，以提高他们的运算能力、逻辑推理和逻辑表达能力以及分析、解决问题的能力。

《纲要》中对某些基础知识只提出纲目或概括成图表，如果学生对这些知识有所遗忘或所学的教材有所缺漏，必须参考有关的数学课本进行复习。为了突出说明某些数学知识的应用，有的范例所采用的解题或证明的方法并不是最简便的，有的也不完整。《纲要》中基本的练习题还不多，复习时可根据不同班级的实际需要适当增补。在复习题中有一部分难度比较大的题目，供解题能力比较好的学生选做。

在修改过程中，蒙许多老师给我们提供许多宝贵的修改意见和积极建议，特此表示感谢！但限于我们的水平，《纲要》中必定还存在缺点，需要进一步通过教学实践来修改、充实和提高。我们殷切地期望老师和同学们随时给予批评和指正。

福建教育学院数学组

一九七九年十二月

目 录

代 数

一、数与代数式	(1)
(一) 数	(1)
(二) 代数式	(7)
二、方程与方程组	(27)
(一) 方程的基本知识	(27)
(二) 方 程	(29)
(三) 方程组	(44)
(四) 列方程(组)解应用题	(51)
三、不等式	(63)
(一) 不等式的概念和基本性质	(63)
(二) 不等式和不等式组的解法	(64)
(三) 不等式的证明与最大最小	(74)
四、函 数	(76)
(一) 初等函数的分类表	(76)
(二) 函数的基本概念	(76)
(三) 函数关系的表示法	(77)
(四) 函数的一些重要性质	(77)
(五) 有理整函数	(79)
(六) 有理分函数	(87)
五、指数与对数	(93)
(一) 指数的概念和运算法则	(93)
(二) 对数的概念	(94)
(三) 指数函数与对数函数	(95)
(四) 积、商、幂、方根的对数和对数的换底公式	(97)

(五) 常用对数.....	(97)
(六) 简单的指数方程和对数方程.....	(102)
六、数 列.....	(110)
(一) 数列的概念和数列的通项公式.....	(110)
(二) 等差数列与等比数列.....	(110)

几 何

一、定理的证明.....	(123)
(一) 定理的组成.....	(123)
(二) 定理的证明.....	(123)
(三) 反证法.....	(127)
二、相交线与平行线.....	(127)
(一) 线段、射线、直线.....	(127)
(二) 相交线.....	(128)
(三) 平行线.....	(130)
(四) 成比例线段.....	(131)
三、多边形.....	(137)
(一) 三角形.....	(137)
(二) 四边形.....	(154)
(三) 多边形.....	(157)
四、圆.....	(165)
(一) 圆的基本性质.....	(165)
(二) 关于圆的比例线段.....	(165)
(三) 圆心角、圆周角和弦切角定理.....	(166)
(四) 判定四边形内接于圆的定理.....	(166)
(五) 圆内接四边形的性质.....	(166)
(六) 圆的切线.....	(166)
(七) 两圆的位置关系.....	(167)
(八) 弧长与面积的计算公式.....	(167)

五、基本轨迹和作图题	(178)
(一) 四种命题间的关系	(178)
• (二) 基本轨迹	(180)
(三) 作图题	(181)
六、直线与平面	(184)
(一) 平面	(184)
(二) 直线与直线的位置关系	(184)
(三) 直线与平面的位置关系	(185)
(四) 平面与平面的位置关系	(187)
七、简单几何体	(198)
(一) 多面体	(198)
(二) 旋转体	(201)
(三) 简单几何体的侧面积与体积的计算公式	(203)

三 角

一、三角函数的定义及其基本性质	(217)
(一) 任意角的概念	(217)
(二) 三角函数的定义	(220)
(三) 三角函数值的变化	(225)
(四) 同角三角函数间的关系	(228)
(五) 诱导公式	(231)
(六) 三角函数表	(235)
(七) 三角函数的周期性	(237)
(八) 三角函数的图象和性质	(239)
二、两角和与差的三角函数	(248)
(一) 两角和与两角差的三角函数	(248)
(二) 倍角与半角的三角函数	(253)
(三) 三角函数的和差化积与积化和差	(259)
三、反三角函数和三角方程	(271)
(一) 反三角函数	(271)

(二) 三角方程.....	(277)
四、解三角形.....	(286)
(一) 解直角三角形.....	(286)
(二) 解斜三角形.....	(290)
(三) 三角形解法的应用.....	(294)

平面解析几何

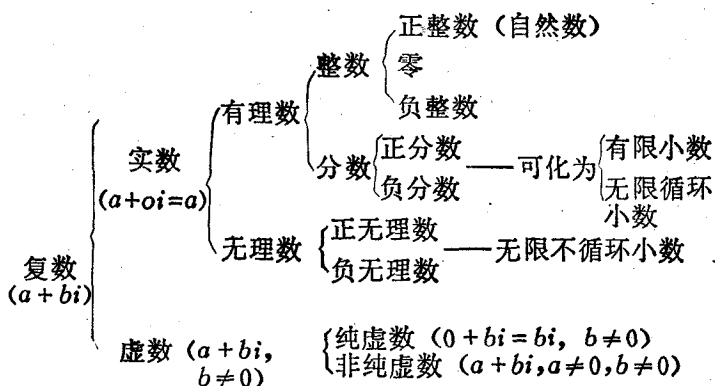
一、曲线与方程.....	(318)
(一) 平面直角坐标系.....	(318)
(二) 基本公式.....	(318)
(三) 曲线与方程.....	(322)
二、直线方程.....	(332)
(一) 直线方程的几种形式.....	(332)
(二) 两条直线的位置关系.....	(333)
(三) 点到直线的距离.....	(334)
三、二次曲线.....	(341)
(一) 圆.....	(341)
(二) 抛物线.....	(346)
(三) 椭圆.....	(350)
(四) 双曲线.....	(354)
(五) 圆锥曲线的切线与法线.....	(358)
(六) 圆锥曲线小结.....	(361)
(七) 坐标变换与二次曲线方程化简.....	(366)
四、参数方程.....	(376)
五、极坐标方程.....	(385)
附录1 复数.....	(433)
附录2 不等式的证明与最大最小.....	(442)
附录3 反证法.....	(446)
附录4 坐标旋转与二次曲线方程化简.....	(450)
附录5 极坐标方程.....	(459)

代 数

一、数与代数式

(一) 数

1. 数的系统表



2. 自然数

表示物体个数的数1, 2, 3, ……等的每一个数, 都叫做自然数。

(1) 性质

- ①自然数是无限多的, 它有最小的数1, 没有最大的数;
- ②任意两个自然数都可以比较大小, 即自然数是有顺序的;

- ③在自然数的范围内永远可施行加、乘、乘方运算。

(2) 合数的质因数分解

①质数和合数 在自然数里除了单位1以外，其他只能被1和本身整除的数叫做质数（或素数），不但能被1和本身整除，还能被其他的数整除的数叫做合数。1既不是质数，也不是合数。

②因数和质因数 乘数和被乘数都叫做积的因数；一个合数的质数因数叫做这个合数的质因数。

③分解质因数 把一个合数表示成质因数连乘积的形式，叫做这个合数的质因数分解。质因数中如有相同的数，应把它写成乘方的形式。

例如， $720 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$ 。

(3) 最大公约数和最小公倍数

①约数、公约数、最大公约数、互质数 能够整除某一个数的数叫做这个数的约数；几个数所公有的约数叫做这几个数的公约数；几个数的公约数里最大的一个叫做这几个数的最大公约数；如果两个数的最大公约数是1，这两个数叫做互质数。

②求最大公约数的法则 求几个数的最大公约数，先把这些数分别分解质因数，并且写成乘方的形式，然后在各个数公有的每一种质因数里，取出指数最小的乘方相乘。

例1 求84，180，264的最大公约数。

解 分解质因数： $84 = 2^2 \times 3 \times 7$ ， $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ ， $264 = 2^3 \times 3 \times 11$ 。

这几个数的公约数含有2的最高次幂是 2^2 ，含有3的最高次幂是3，此外再无其它公约数，因此最大公约数是 $2^2 \times 3 = 12$ 。

③倍数、公倍数、最小公倍数 能够被某一个数整除的数叫做这个数的倍数；几个数所公有的倍数，叫做这几个数

的公倍数；公倍数里最小的一个（除0以外）叫做这几个数的最小公倍数。

④求最小公倍数的法则 求几个数的最小公倍数，先把它们分别分解质因数，并且写成乘方的形式，然后从各个数所有的每一种质因数里，取出指数最大的乘方相乘。

例2 求48, 56, 105, 225的最小公倍数。

解 分解质因数： $48=2^4 \times 3$, $56=2^3 \times 7$, $105=3 \times 5 \times 7$, $225=3^2 \times 5^2$ 。

这些数的公倍数含有约数2、3、5、7，而且它们的幂指数至少等于在各分解式当中同一底的最高的幂指数，因此，最小公倍数应是 $2^4 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 = 25200$ 。

3. 整数

正整数（自然数）、零、负整数（自然数的相反数）总称整数。

性质

- ①在整数范围内无最小的数，亦无最大的数；
- ②在整数范围内任意两个数可以比较它们的大小；
- ③在整数范围内永远可施行加、减、乘、乘方四种运算。

4. 有理数

整数、分数总称有理数（即一切有限小数、无限循环小数）。

设 p, q 为整数，若 $q \neq 0$ ，则有理数可以表示成 $\frac{p}{q}$ 的形式。

① $\frac{p}{q} = \frac{pm}{qm}$ ($m \neq 0$)。根据这个性质可以进行通分和约分。分子和分母是互质数的分数叫做既约分数（最简分数）。

②当一个既约分数的分母只含有2和5的因数时可化为

有限小数；如含有 2 和 5 以外的质因数时只能化为无限循环小数。

性质

- ①在有理数范围内没有最小的数，也没有最大的数；
- ②在有理数范围内任意两个数可以比较它们的大小；
- ③在有理数范围内，永远可以施行加、减、乘、除（除数不为零）、乘方五种运算。

5. 实数

有理数、无理数总称为实数。

(1) 性质

- ①在实数范围内无最小的数，亦无最大的数；
- ②在实数范围内的数与数轴上的点建立一一对应关系。
这就是：任意一个实数都有数轴上确定的一个点与它对应；
反过来，数轴上的任意一个点，也都有确定的一个实数与它对应；

- ③在实数范围内任意两个数可以比较它们的大小；

实数大小的比较，可以按实数在数轴上所对应的点的排列顺序来比较，在数轴上的点越往右，它表示的数就越大，也就是任何正实数都大于零，任何负实数都小于零，任何正实数都大于任何负实数。

- ④在实数范围内，永远可施行加、减、乘、除（除数不为零）、乘方五种运算。

(2) 实数的绝对值 正数和零的绝对值是其本身，负数的绝对值是它的相反数。

若 a 是实数， $|a|$ 叫做 a 的绝对值，

$$|a| = \begin{cases} a & (\text{当 } a \geq 0 \text{ 时}) \\ -a & (\text{当 } a < 0 \text{ 时}) \end{cases}.$$

$|a|$ 在数轴上是表示实数 a 的点至原点的距离。

(3) 实数的运算定律

①交换律 $a+b=b+a$; $a \cdot b=b \cdot a$;

②结合律 $(a+b)+c=a+(b+c)$; $(a \cdot b) \cdot c=a \cdot (b \cdot c)$;

③分配律 $a(b+c)=ab+ac$ 。

运算时, 如果运算的式子里没有括号, 就要先算乘方、开方, 次算乘、除, 最后算加、减; 如果有括号, 就先算括号里的数。

例 3 计算:

$$\left(3\frac{1}{3}\right)^2 - (-6.5) \times \frac{12}{13} + (-2)^4 + [(-2)^3 + 2].$$

$$\begin{aligned}\text{解 原式} &= \left(\frac{10}{3}\right)^2 - \left(-\frac{13}{2}\right) \times \frac{2^2 \times 3}{13} + 16 + (-8 + 2) \\ &= \frac{100}{9} + 6 - \frac{8}{3} = \frac{100 + 54 - 24}{9} = 14\frac{4}{9}.\end{aligned}$$

注意: 化带分数为假分数, 化小数为分数, 化某合数为质因数。

例 4 把下列各数按从小到大的顺序用不等号连结起来:

$$|-5|, -3, \left|\frac{2}{3}\right|, 0, \sqrt{5}, -\left|-\frac{1}{\sqrt{2}}\right|.$$

$$\text{解 } \because |-5|=5, \left|\frac{2}{3}\right| \approx 0.67, \sqrt{5} \approx 2.24,$$

$$-\left|-\frac{1}{\sqrt{2}}\right| = -\frac{1}{\sqrt{2}} \approx -0.71,$$

$$\therefore -3 < -\left|-\frac{1}{\sqrt{2}}\right| < 0 < \left|\frac{2}{3}\right| < \sqrt{5} < |-5|.$$

例 5 在①自然数范围内, ②整数范围内, 哪些数能满足关系式 $-2 < x < 6$?

解 在自然数范围内, 能满足关系式 $-2 < x < 6$ 中的数是 1, 2, 3, 4, 5;

在整数范围内, 能满足关系式 $-2 < x < 6$ 中的数是 -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5.

例 6 设 a 是任意实数, 化简 $\sqrt{a^2} + \sqrt{(1-a)^2}$.

$$\begin{aligned} \text{解 } \sqrt{a^2} + \sqrt{(1-a)^2} &= |a| + |1-a| = \begin{cases} 2a-1 & (\text{当 } a \geq 1 \text{ 时}), \\ 1 & (\text{当 } 0 \leq a < 1 \text{ 时}), \\ 1-2a & (\text{当 } a < 0 \text{ 时}). \end{cases} \end{aligned}$$

例 7 证明 $\sqrt{2}$ 是无理数.

证明 用反证法

假设 $\sqrt{2}$ 是有理数, 那么 $\sqrt{2}$ 可表示成分数, 即 $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$ (其中 m, n 是自然数, 且 m, n 互质),

$\therefore 2 = \left(\frac{n}{m}\right)^2, n^2 = 2m^2, \because n^2$ 是偶数, n 也是偶数, 设 $n = 2p$, 那么 $m^2 = 2p^2, \therefore m$ 也是偶数.

这样, m, n 都是偶数, 与 m, n 互质的假设相矛盾, 因此 $\sqrt{2}$ 不是有理数, 而是无理数.

例 8 有理数 a, b, c 应满足什么条件, 才能使方程 $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c 都不为 0) 在有理数范围内有解? 如果 $\sqrt{(a-2)^2} + |b+1| + (c+3)^2 = 0$, 则该方程的解是不是在有理数范围之内?

$$\text{解 } ax^2 + bx + c = 0, x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

$\because a, b, c$ 为有理数, 且皆不为 0, 则当 $b^2 - 4ac = M^2$, 方程为有理数根, 所以要使方程在有理数范围内有解, 必须

满足 $b^2 - 4ac$ 为完全平方。

又因为各项非负数的和为 0，则每项必须为 0，就是

$$\because \sqrt{(a-2)^2} = |a-2| \geq 0, |b+1| \geq 0, (c+3)^2 \geq 0,$$

$$\therefore a=2, b=-1, c=-3, \text{ 则方程为 } 2x^2 - x - 3 = 0.$$

$$\because b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25 = 5^2,$$

$\therefore$ 方程的解为有理数。

6. 复数 (见附录1)

(二) 代数式

1. 代数式

(1) 代数式的定义 用代数运算符号把数字和字母连结起来的式子，叫做代数式。

(2) 代数式的分类表

$$\text{代数式} \begin{cases} \text{有理式} \\ \text{无理式} \end{cases} \begin{cases} \text{整式} \\ \text{分式} \end{cases} \begin{cases} \text{单项式} \\ \text{多项式} \end{cases}$$

(3) 代数式的值 用数值代替代数式里的字母，计算得出的结果，叫做代数式的值。

2. 整式

(1) 有理式的定义 一个代数式如果只含有加、减、乘、除和乘方等五种运算，这样的代数式叫做有理代数式，简称有理式。

(2) 整式

① 整式的定义 一个代数式如果不含有除法运算，或虽有除法运算，但除数不含字母，这样的代数式叫做有理整式，简称整式。

整式按照它是由几个单项式的代数和组成的，可以分为单项式、二项式、三项式等等。项数在二项以上的统称为多

项式。

②整式的四则运算

i. 加、减法

(i) 去括号

$a + (b - c + d) = a + b - c + d$ (括号内的项都不变号)；

$a - (b - c + d) = a - b + c - d$ (括号内的项都变号)。

(ii) 合并同类项 将含有相同字母，且各字母的指数又一样的项(同类项)合并成一项，合并时只要把同类项系数的代数和作为结果的系数。

ii. 乘除法、乘方 在进行乘除法、乘方运算时，经常用到下面正整数指数幂的运算法则以及乘法公式：

正整数指数幂运算法则：

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \quad a^m \div a^n = a^{m-n} (a \neq 0, m > n);$$

$$(a^m)^n = a^{mn}; \quad (ab)^n = a^n b^n;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} (b \neq 0)。$$

乘法公式：

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2;$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3;$$

$$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3。$$

(i) 乘法

单项式乘以单项式：应用乘法交换律、结合律及幂的运算法则进行计算。

单项式乘以多项式：应用乘法对加法的分配律转化为单项式乘以单项式进行计算。

多项式乘以多项式：把一个多项式的各项分别乘以另一个多项式的每一项，并把所得的积相加。

(ii) 除法

单项式除以单项式：把系数和相同字母的幂分别相除，并把被除式单独有的字母连同它们的指数保留在商里。若某些字母在被除式里的指数小于除式里的指数，或者除式里出现某些在被除式里所没有的字母，则结果用分式表示。

多项式除以单项式：先把多项式的每一项除以这个单项式，再求商的代数和。

(iii) 乘方 应用积的乘方和幂的乘方法则进行运算。

例 1 计算代数式 $2x^3 - 5x^2 + 3x - 8$ 的值：

(1) 当 $x = -1$ 时； (2) 当 $x = \frac{1}{2}$ 时。

解 (1) 当 $x = -1$ 时，

$$\begin{aligned} 2x^3 - 5x^2 + 3x - 8 &= 2(-1)^3 - 5(-1)^2 + 3(-1) - 8 \\ &= -2 - 5 - 3 - 8 = -18; \end{aligned}$$

(2) 当 $x = \frac{1}{2}$ 时，

$$\begin{aligned} 2x^3 - 5x^2 + 3x - 8 &= 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{2}\right) - 8 \\ &= 2\left(\frac{1}{8}\right) - 5\left(\frac{1}{4}\right) + 3\left(\frac{1}{2}\right) - 8 \\ &= \frac{1}{4} - \frac{5}{4} + \frac{3}{2} - 8 = -7\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

例 2 试用语言叙述下列各式所确定的实数 a 、 b (或 a 、 b 、 c) 之间的关系或值的范围：

(1) $a^2 = b^2$;

(2) $a + b = 0$;