

带小参数的非线性系统的 稳定性分析

●〔乌克兰〕阿·阿·玛尔德纽克 孙振绮 著



科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

本书介绍了根据标量、向量与矩阵值李雅普诺夫函数刻画的带小参数非线性系统稳定性分析的新方法,同时介绍了更有效地解决工程技术中的一些稳定性分析问题的实例。

正如稳定性理论领域的专家指出的,“带小参数的非线性系统稳定性分析”是讨论初始系统稳定性的新方法。它有别于李雅普诺夫稳定性和关于两种测度的稳定性。本书在构造李雅普诺夫函数中创造性运用扰动方法与均值法,并在李雅普诺夫直接方法的框架内提供了矩阵值李雅普诺夫函数在奇异扰动系统中的新的应用。

本书可供应用数学、应用物理学、控制与电气工程、通信网络等专业的专家与科技人员参考使用,也可作为相应专业的研究生教材。

图书在版编目(CIP)数据

带小参数的非线性系统的稳定性分析/(乌克兰)阿·阿·玛尔德纽克,孙振绮著. —北京:科学出版社,2005

ISBN 7-03-016646-9

I. 带… II. ①阿…②孙… III. 非线性—稳定性(数学)—分析
IV. O175.13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 151842 号

责任编辑:陈玉琢 祖翠娥/责任校对:鲁 素

责任印制:安春生/封面设计:黄华斌

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

丽 源 印 刷 厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2006 年 3 月第 一 版 开本: B5(720×1000)

2006 年 3 月第一次印刷 印张: 16 1/2

印数:1—3 000 字数: 310 000

定价: 40.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

前 言

许多现代科学技术问题,包括力学、物理学、流体动力学、连续粒子射线的电动力学、空间技术、天体动力学与其他众多领域问题的研究都要归结到研究带小参数的非线性系统. 在研究各类实际问题时,所研究方程组的解在某种意义上的稳定性是关键问题. 在某些情况下,可把古典稳定性理论的方法推广到带小参数系统. 但在解决非线性振动与稳定性理论的问题中遇到相当大的困难,这就是描述系统状态的变量的增加且其中含有临界变量. 此外,具有临界变量可能导致:不仅一次近似不能解决稳定性问题,而且随后到某阶的非线性近似,也不能解决所提出的问题.

为克服这些难题,在近四十年间,许多数学家对带小参数系统进行了详细地研究,提出了许多新的方法,可归纳如下:

(1) 在研究含自由项有限次幂的系统关于两个不同测度的稳定性时发展了李雅普诺夫直接方法.

(2) 根据构造李雅普诺夫函数,用扰动方法分析某些类线性系统与非线性系统的稳定性.

(3) 根据比较原理与非线性力学的均值方法的思想推广李雅普诺夫直接方法.

(4) 在研究奇异扰动系统稳定性时,深入研究了李雅普诺夫矩阵值函数方法及其应用.

本书主要研究带小参数系统,特别是带小参数的非线性弱关联系统. 同时,在解决具体所述问题时运用(或发展运用)方法(1)~(4).

本书内容共5章. 下面介绍各章内容摘要:

第1章介绍带小参数系统定性分析方法的数学原理,其中包括积分不等式与微分不等式理论、方程的解析理论中的必要知识,李雅普诺夫直接方法的基本定理,庞加莱关于把解展成小参数幂的定理. 同时还着重讨论了带小参数系统稳定性的定义及这些定义与李雅普诺夫古典定义的联系.

第2章包括深入研究新方法解决弱关联大系统的稳定性问题的成果. 这里,运用李雅普诺夫直接方法与比较原理得出了非线性系统关于两个不同测度的稳定性条件. 同时引入了弱关联复合系统中的孤立子系统的动力学性质,根据向量李雅普诺夫函数与M矩阵理论得到所研究系统稳定性的代数准则. 在该章最后一节讨论了运动的半稳定性问题并应用得到的结论研究自动控制问题的稳定性.

在第3章中叙述了运用渐近的均值法结合庞加莱的扰动方法,解决构造形如小参数幂级数的李雅普诺夫函数问题.在该章中,对某些类型(线性与具有积分近似的非线性)运动扰动方程组运用上面提到的(小参数幂级数型)李雅普诺夫函数进行了论证.这里还引进了切达耶夫关于具有周期系数的线性方程组解的稳定性的定理并进行在标准形式的非线性方程组上的推广.在该章最后一节介绍了当生成方程组具有非渐近稳定的零解时,对部分变元的稳定性的定理.

在第4章中介绍一个研究带小参数的非线性方程组的解的稳定性的的一般方法.它推广了李雅普诺夫直接方法,并把它与非线性力学的渐近方法结合起来.这里对所研究类型的方程组引入推广的李雅普诺夫稳定性的基本定理与切达耶夫不稳定性定理.由于构造退化方程组的解的困难,在该章中讨论两种精确解的替换方法,即用极限方程组的解或逼近生成方程组的精确解的特殊函数组来替换精确解.作为应用考虑弱关联振荡方程组.

第5章专门介绍奇异扰动系统的稳定性分析.对此,运用根据矩阵值函数推广的李雅普诺夫直接方法.所提供的方法可降低对退化系统与边界层的动力学性质的要求且可得出原系统的渐近稳定性的新条件.作为在工程上的应用,研究了鲁立叶-波斯特尼柯夫奇异扰动系统.

因此,本书介绍了近四十年间对带小参数系统解的稳定性的分析进行深入研究得到的主要方法.这些方法不是彻底解决了所讨论的问题,但是利用这些方法可以解决许多现代技术与工艺的实际问题.此外,这一领域对于在这一方向上继续寻求更有效的方法仍留有宽阔的空间.

乌克兰科学院院士 Ю. А. 米特洛波里斯基不止一次地向本书第一作者乌克兰科学院通讯院士阿·阿·玛尔德纽克建议把注意力转向深入研究对于工程应用是可行的非线性系统的稳定性的分析方法.本书所提供的方法正是在方程的定性理论的现代发展的框架内对这一问题的回答.

在完成本课题研究的过程中,个别问题曾与教授:Н. В. Азбелевый、В. М. Старжинский、Е. Л. Тонковий、Ю. А. Рябовый 等讨论过.借此机会,对他们的关注与讨论结果表示衷心的感谢.

本书所叙述的许多主要结果是1978~2005年在乌克兰科学院力学研究所过程的稳定性研究部得到的.А. Каримжанов、В. И. Косолапов、Л. Н. Чернецкая 积极参与了详细研究书中讨论的问题.本书利用了他们的某些研究成果,并标明了对应的参考文献.

哈尔滨工业大学孙振绮教授于1996年应邀作为访问学者与本书第一作者进行合作研究,十多年来,双方真诚合作,取得多项研究成果.在俄罗斯《科学报告》、乌克兰《数学杂志》、《应用力学》等刊物上发表论文多篇,并合作用中文于中国科学出版社出版专著《实用稳定性及应用》.本书是根据中国哈尔滨工业大学与乌克兰

科学院力学研究所科研合作协议完成的最新研究成果。我们相信,本书的出版,将进一步加强中国与乌克兰学者在该领域内的互相学习与交流。

本书可供应用数学、应用物理学、控制与电气工程、通信网络等专业的专家与科技人员参考使用,也可作为相应专业的研究生教材。

阿·阿·玛尔德纽克 孙振绮

2005 年于哈尔滨

目 录

前言

第 1 章 带小参数系统的定性分析的数学原理	1
1.1 引言	1
1.2 基本不等式	1
1.2.1 格洛努奥尔(Гронуолл)型不等式	1
1.2.2 毕哈里(Бихари)型不等式	5
1.2.3 微分不等式	9
1.2.4 积分不等式	13
1.3 带小参数的方程组的解的一般性质	15
1.3.1 解对参数的连续相依性、可微性与解析性	15
1.3.2 解的延拓定理	21
1.3.3 庞加莱定理	22
1.4 稳定性的原本的定义	25
1.4.1 关于初始条件的扰动的稳定性	25
1.4.2 关于已知函数的稳定性	26
1.4.3 具有经常作用扰动的稳定性	27
1.5 关于李雅普诺夫意义稳定性的条件	29
1.5.1 李雅普诺夫函数及其定号性	29
1.5.2 推广的李雅普诺夫导函数	32
1.5.3 关于稳定与不稳定的定理	33
1.6 比较原理的主要定理	37
1.7 带小参数方程组的稳定性定义	39
1.7.1 平衡状态	40
1.7.2 稳定性定义	41
1.7.3 稳定区域	42
1.7.4 吸引	42
1.7.5 吸引区域	43
1.7.6 渐近稳定性	44
1.7.7 渐近稳定区域	45
1.7.8 运动增长的定义	46

1.8 带小参数的方程组的 μ 稳定性与李雅普诺夫意义稳定性的联系	46
1.9 参考文献注释	48
参考文献	49
第2章 非线性方程组的稳定性的分析	52
2.1 引言	52
2.2 问题的提法	52
2.3 对两个测度的稳定性的充分条件	54
2.4 建立在纯量比较方程上的 μ 稳定性条件	64
2.5 个别子系统的动力学性质的分析	68
2.6 μ 稳定性的代数条件	72
2.6.1 一致渐近 μ 稳定	72
2.6.2 全局一致渐近 μ 稳定	74
2.6.3 指数 μ 稳定	75
2.6.4 不稳定与完全不稳定	78
2.7 关于弱关联系统运动的半稳定性	80
2.7.1 弱关联系统(2.2.1)的半稳定性的一般问题	80
2.7.2 对 $m=2$ 的情形分析系统(2.7.1)的半稳定性	81
2.8 某些力学系统运动稳定性的分析	84
2.8.1 飞机纵向运动的稳定性	84
2.8.2 含有微小非线性项的非直接控制系统	86
2.8.3 带有不稳定的子系统的非直接控制系统	88
2.9 参考文献注释	90
参考文献	90
第3章 构造李雅普诺夫函数与非自治系统的稳定性	93
3.1 引言	93
3.2 均值系统与非自治系统的稳定性	93
3.2.1 切塔耶夫定理	93
3.2.2 非线性方程组的一般情形	95
3.3 关于均值方程组的渐近稳定性区域的估计	98
3.3.1 定理(波戈柳波夫)	98
3.3.2 渐近稳定区域	99
3.4 用扰动方法构造李雅普诺夫函数	101
3.4.1 辅助方程组的作用	101
3.4.2 未受扰动方程组的渐近稳定解的情形	103
3.4.3 拟线性方程组	104

3.4.4 临界情形	105
3.4.5 对高次近似影响的估计	108
3.4.6 均值法与多项式解	110
3.4.7 特殊的临界情形	112
3.4.8 向量李雅普诺夫函数	117
3.5 对于带小参数的非自治方程组的李雅普诺夫函数	121
3.5.1 带微扰动的非自治线性方程组	121
3.5.2 具有周期系数的线性方程组	122
3.5.3 一类非自治非线性方程组	125
3.6 具有经常作用扰动的标准方程组	127
3.6.1 辅助论断	127
3.6.2 关于稳定性的定理	130
3.7 对部分变元的稳定性	132
3.8 参考文献注释	137
参考文献	138
第4章 带有中立部分的非线性系统稳定性的分析	141
4.1 引言	141
4.2 在有限区间上的运动稳定性	141
4.2.1 问题的提法	141
4.2.2 关于稳定性的定理	142
4.3 具有中立部分的非线性系统的稳定性分析	148
4.3.1 辅助结论	148
4.3.2 关于稳定性的定理	150
4.3.3 不稳定的条件	154
4.3.4 渐近稳定性条件	157
4.4 运用辅助系统的方法推广定理	161
4.5 具有非渐近稳定的子系统的大型系统的动力学	167
4.5.1 运动稳定性与不稳定性的充分条件	167
4.5.2 弱关联振动系统的分析	178
4.6 带有减震器的双转子定向仪的稳定性	187
4.6.1 关于部分变元的稳定性定理	187
4.6.2 定向仪稳定性的条件	188
4.7 参考文献注释	191
参考文献	192
第5章 奇异扰动系统	194

5.1 引言	194
5.2 问题的提法	194
5.3 渐近稳定性的条件	196
5.4 自治奇异扰动系统的吉洪诺夫(ТИХОНОВ)定理的推广	200
5.4.1 问题的提出	200
5.4.2 生成方程组的非渐近稳定的情形	201
5.4.3 指数稳定的生成方程组的情形	207
5.5 矩阵值函数及其定号性质	210
5.6 矩阵值李雅普诺夫函数方法	212
5.7 关于稳定与不稳定的一般定理	215
5.8 奇异扰动大系统的描述与分解	216
5.9 大系统稳定性的条件	218
5.9.1 非自治系统	218
5.9.2 自治系统	231
5.10 不稳定的充分条件	242
5.10.1 非自治系统	242
5.10.2 自治系统	243
5.11 大系统的绝对稳定性	244
考虑鲁立叶型奇异扰动系统	244
5.12 参考文献注释	250
参考文献	251

第 1 章 带小参数系统的定性分析的数学原理

1.1 引言

对于许多现实世界的过程的数学建模都用含小正参数 μ 的非线性微分方程组, 其中 μ 参与过程的时间刻度的确定, 在一般情况可表为方程组

$$\frac{dy}{dt} = Y(t, y, \mu), \quad y(t_0) = y_0 \quad (1.1.1)$$

其中 $y(t) \in \mathbf{R}^n$ 是方程组在时刻 $t \in R_0, R_0 = [t_0, +\infty), t_0 \in \mathbf{R}$, 的状态向量, $Y: \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times M \rightarrow \mathbf{R}^n, M = (0, 1], \mu$ 是小非负参数.

本章内容安排如下:

1.2 节介绍常用的不等式, 其中包括 Гронуолл 与 Бихари 基本不等式、微分不等式与积分不等式.

1.3 节叙述微分方程组对参数 μ 的相依性定理. 这里还证明用有限退化方程代替微分方程. 实质上是使对表示方程组解的、按参数的幂展开的级数的收敛半径的估计更精确化.

此外, 这里还介绍了解的延拓定理和庞加莱关于把解表示成小参数的幂级数的定理.

1.4 节叙述李雅普诺夫原来的运动稳定性的不同类型的定义.

1.5 节介绍李雅普诺夫直接方法的发展中的某些结论与带有纯量、向量李雅普诺夫函数的比较原理的基本定理.

1.6 节叙述带小参数系统解的 μ 稳定的不同类型的定义. 这里, 还将用一些具体的例子讨论李雅普诺夫意义稳定性与 μ 稳定之间的联系.

因此, 本章既含有已知结果又含有新的论断, 它们的结合便构成带小参数微分方程组解的数学分析的基础.

1.2 基本不等式

1.2.1 格洛努奥尔(Гронуолл)型不等式

我们从一个最简单且最常用的积分不等式开始介绍.

定理 1.2.1 设函数 $m, v \in C(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+)$. 其次, 假设对某个 $c \geq 0$ 满足不等式

$$m(t) \leq c + \int_{t_0}^t v(s)m(s)ds, \quad t \geq t_0 \geq 0 \quad (1.2.1)$$

则

$$m(t) \leq c \exp \left[\int_{t_0}^t v(s)ds \right], \quad t \geq t_0 \quad (1.2.2)$$

证明 如果 $c > 0$, 则由不等式(1.2.1)得不等式

$$\frac{m(t)v(t)}{c + \int_{t_0}^t v(s)m(s)ds} \leq v(t)$$

对它积分得

$$\ln \left[c + \int_{t_0}^t v(s)m(s)ds \right] - \ln c \leq \int_{t_0}^t v(s)ds$$

考虑到式(1.2.1)便可化为式(1.2.2).

如果 $c = 0$, 则不等式(1.2.1)对任何 $\epsilon > 0$ 都成立, 因而由上面证明知, 当 $c = \epsilon$ 时有不等式(1.2.2)成立. 令 $\epsilon \rightarrow 0$, 得 $m(t) \equiv 0$, 从而定理得证.

这里所进行的定理 1.2.1 的传统证明有重要意义. 然而也可利用线性微分不等式与常数变易公式证明这个定理. 对此, 考虑更一般的情形.

定理 1.2.2 设 $m, v, h \in C(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+)$ 且

$$m(t) \leq h(t) + \int_{t_0}^t v(s)m(s)ds, \quad t \geq t_0 \quad (1.2.3)$$

则

$$m(t) \leq h(t) + \int_{t_0}^t [v(s)h(s)] \exp \left(\int_s^t v(\xi)d\xi \right) ds, \quad t \geq t_0 \quad (1.2.4)$$

如果函数 h 是可微的, 则

$$m(t) \leq h(t_0) \exp \left(\int_{t_0}^t v(s)ds \right) + \int_{t_0}^t h'(s) \exp \left(\int_s^t v(\xi)d\xi \right) ds, \quad t \geq t_0 \quad (1.2.5)$$

证明 为证明不等式(1.2.4), 令

$$p(t) = \int_{t_0}^t v(s)m(s)ds$$

使有 $p(t_0) = 0$ 且 $p'(t) \leq v(t)m(t), t \geq t_0$.

因 $m(t) \leq h(t) + p(t)$, 故有

$$p'(t) \leq v(t)p(t) + v(t)h(t), \quad t \geq t_0$$

令 $q(t) = p(t)\exp\left(-\int_{t_0}^t v(s)ds\right)$, 容易验证 $q(t_0)=0$ 且

$$\begin{aligned} q'(t) &= [p'(t) - v(t)p(t)]\exp\left(-\int_{t_0}^t v(s)ds\right) \\ &\leq h(t)v(t)\exp\left(-\int_{t_0}^t v(s)ds\right) \end{aligned}$$

由此得

$$q(t) \leq \int_{t_0}^t h(s)v(s)\exp\left(-\int_{t_0}^s v(\xi)d\xi\right)ds, \quad t \geq t_0$$

由于我们得到不等式

$$p(t) \leq \int_{t_0}^t v(s)h(s)\exp\left(\int_s^t v(\xi)d\xi\right)ds, \quad t \geq t_0$$

由此可直接得到(1.2.4).

为证明不等式(1.2.5), 用 $p(t)$ 表示不等式(1.2.3)的右端, 使有

$$p'(t) = v(t)m(t) + h'(t), \quad p(t_0) = h(t_0)$$

现在, 不难求得

$$p(t) \leq h(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^t v(s)ds\right) + \int_{t_0}^t h'(s)\exp\left(\int_s^t v(\xi)d\xi\right)ds, \quad t \geq t_0$$

由此得到估计(1.2.5).

从形式上看估计式(1.2.4)与(1.2.5)是不同的. 事实上它们是等价的. 譬如在不等式(1.2.5)的右端对第二加项分部积分, 得

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^t h'(s)\exp\left(\int_s^t v(\xi)d\xi\right)ds \\ &= h(t) - h(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^t v(\xi)d\xi\right) + \int_{t_0}^t h(s)v(s)\exp\left(\int_s^t v(\xi)d\xi\right)ds \end{aligned}$$

考虑到估计式(1.2.5)便给出估计式(1.2.4). 因而, 易知对函数 h 的可微性的假设, 没有给出任何新的结论.

如果在定理 1.2.2 中假定, 函数 h 是正的且不减的函数, 则估计式(1.2.4)可化为

$$m(t) \leq h(t)\exp\left(\int_{t_0}^t v(s)ds\right), \quad t \geq t_0 \quad (1.2.6)$$

令 $w(t) = \frac{m(t)}{h(t)}$, 由不等式(1.2.3)得

$$w(t) \leq 1 + \int_{t_0}^t v(s)w(s)ds, \quad t \geq t_0$$

根据定理 1.2.1, 由此得

$$w(t) \leq \exp\left(\int_{t_0}^t v(s)ds\right)$$

从而得到式(1.2.6).

估计式可由不等式(1.2.4)得到. 因为

$$\begin{aligned} h(t) + \int_{t_0}^t v(s)h(s)\exp\left(\int_{t_0}^s v(\xi)d\xi\right)ds \\ \leq h(t)\left[1 + \int_{t_0}^t v(s)\exp\left(\int_s^t v(\xi)d\xi\right)ds\right] \\ = h(t)\left(1 - \int_s^t e^{\sigma(s)}d\sigma(s)\right) \\ = h(t)\exp\left(\int_{t_0}^t v(\xi)d\xi\right), \quad t \geq t_0 \end{aligned}$$

例 1.2.1 设 $m \in C(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+)$ 且 $m(t) \leq \int_{t_0}^t (A + Bm(s))ds$, $t \geq t_0$, 其中 $A > 0, B > 0$. 则

$$m(t) \leq \frac{A}{B}[\exp(B(t - t_0)) - 1], \quad t \geq t_0$$

例 1.2.2 设 $m \in C(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+)$ 且 $m(t) \leq A + \int_{t_0}^t (B + Cm(s))ds$, $t \geq t_0$, 其中 $A, B > 0$ 且 $C > 0$. 则

$$m(t) \leq \frac{B}{C}[\exp(C(t - t_0)) - 1] + A\exp(C(t - t_0)), \quad t \geq t_0$$

例 1.2.3 设 $m \in C(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+)$ 且当 $B > 0$ 时有

$$m(t) \leq e^t + B \int_{t_0}^t m(s)ds, \quad t \geq t_0$$

则

$$m(t) \leq \exp[(B + 1)t - Bt_0], \quad t \geq t_0$$

例 1.2.4 设 $m \in C(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+)$ 且对于 $t \geq t_0$ 满足不等式

$$m(t) \leq m(t_0)\exp(-r(t - t_0)) + \int_{t_0}^t [\exp(-r(t - s))](Am(s) + B)ds$$

其中 $r, A, B > 0$ 且 $r - A > 0$. 则对于 $t \geq t_0$ 有

$$m(t) \leq m(t_0) \exp[-(r-A)(t-t_0)] \\ + \frac{B}{r-A} [1 - \exp(-(r-A)(t-t_0))]$$

其次,考虑带有可分核的积分不等式. 因为可把它们归结为线性微分不等式.

定理 1.2.3 设 $m, h, q, v \in C(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+)$ 且满足不等式

$$m(t) \leq h(t) + \int_{t_0}^t q(s) v(s) m(s) ds, \quad t \geq t_0 \quad (1.2.7)$$

则

$$m(t) \leq h(t) + q(t) \int_{t_0}^t v(s) h(s) \exp\left(\int_s^t v(\xi) d\xi\right) ds, \quad t \geq t_0 \quad (1.2.8)$$

证明 设 $p(t) = \int_{t_0}^t v(s) m(s) ds$, 使有 $p(t_0) = 0$ 且 $p'(t) = v(t) m(t)$.

由于 $m(t) \leq h(t) + q(t)p(t)$, 故有

$$p'(t) \leq v(t) q(t) p(t) + v(t) h(t), \quad t \geq t_0$$

从而得

$$p(t) \leq \int_{t_0}^t v(s) h(s) \exp\left(\int_s^t v(\xi) q(\xi) d\xi\right) ds, \quad t \geq t_0$$

由此得到不等式(1.2.8).

推论 1.2.1 设 $m, h, g_i, v_i \in C(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+)$, $i = 1, 2, \dots, n$, 且

$$m(t) \leq h(t) + \sum_{i=1}^n g_i(t) \int_{t_0}^t v_i(s) m(s) ds, \quad t \geq t_0$$

则

$$m(t) \leq h(t) + G(t) \int_{t_0}^t V(s) h(s) \exp\left(\int_s^t V(\xi) G(\xi) d\xi\right) ds, \quad t \geq t_0$$

其中 $G(t) = \sup_i g_i(t)$ 且 $V(t) = \sum_{i=1}^n v_i(t)$.

1.2.2 毕哈里(Бихари)型不等式

可把在 1.2.1 节考虑的格洛努奥尔积分不等式定理推广到个别类型的非线性积分不等式, 这就是毕哈里不等式. 在这节将介绍这类不等式的某些结论, 它们对应于在 1.2.1 节得到的结果.

定理 1.2.4 设 $m, v \in C(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+)$, $g \in C((0, \infty), (0, \infty))$ 且 $g(u)$ 关于 u

是不减的. 假设对某个 $c > 0$,

$$m(t) \leq c + \int_{t_0}^t v(s)g(m(s))ds, \quad t \geq t_0 > 0 \quad (1.2.9)$$

则有下列不等式成立:

$$m(t) \leq G^{-1} \left[G(c) + \int_{t_0}^t v(s)ds \right], \quad t_0 \leq t < T$$

其中 $G(u) - G(u_0) = \int_{u_0}^u \frac{ds}{g(s)}$, $G^{-1}(u)$ 是 $G(u)$ 的反函数且

$$T = \sup \left\{ t \geq t_0 : G(c) + \int_{t_0}^t v(s)ds \in \text{dom} G^{-1} \right\}$$

证明 记不等式 (1.2.9) 的右端为 $p(t)$, 且满足 $p(t_0) = c$ 与 $p'(t) \leq v(t)g(m(t))$. 因 g 不减且 $m(t) \leq p(t)$, 故有 $p'(t) \leq v(t)g(p(t))$, $p(t_0) = c$. 从 t_0 到 t 积分这个不等式, 得

$$G(p(t)) - G(c) = \int_c^{p(t)} \frac{dz}{g(z)} \leq \int_{t_0}^t v(s)ds$$

从而得

$$m(t) \leq p(t) \leq G^{-1} \left[G(c) + \int_{t_0}^t v(s)ds \right], \quad t_0 \leq t < T$$

对于函数 $g \in C[\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+]$ 若 $g(u+v) \leq g(u) + g(v)$, 则称 g 是下可加函数; 若不等号取“ $\geq$ ”, 则称 g 是上可加函数.

定理 1.2.5 设 $m, v, h \in C(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+)$, $g \in C((0, \infty), (0, \infty))$ 且函数 $g(u)$ 不减, 同时有

$$m(t) \leq h(t) + \int_{t_0}^t v(s)g(m(s))ds, \quad t \geq t_0$$

则

(1) 如果函数 $g(u)$ 是下可加的, 则

$$m(t) \leq h(t) + G^{-1} \left[G(c) + \int_{t_0}^t v(s)ds \right], \quad t_0 \leq t \leq T_0 < T \quad (1.2.10)$$

其中值 G, G^{-1} 与 T 存在这样的值, 使定理 1.2.4 中的 $c = \int_{t_0}^{T_0} v(s)g(h(s))ds$;

(2) 若函数 h 不增, 则

$$m(t) \leq -h(t_0) + G^{-1} \left\{ G[h(t_0)] + \int_{t_0}^t v(s)ds \right\}, \quad t_0 \leq t < T \quad (1.2.11)$$

证明 设 $p(t) = \int_{t_0}^t v(s)g(m(s))ds$ 且考虑 g 的性质, 得 $p(t_0) = 0$ 且

$$p'(t) \leq v(t)g(p(t)) + v(t)g(h(t))$$

我们指出, 函数 $\sigma(t) = \int_{t_0}^t v(s)g(h(s))ds$ 是不减的, 且设 $c = \sigma(T_0)$ 对某个

$T_0: t_0 \leq T_0 < T$ 成立, 从而得

$$p(t) \leq c + \int_{t_0}^t v(s)g(p(s))ds, \quad t_0 \leq t \leq T_0 < T$$

根据定理 1.2.4 由已知不等式得到估计式(1.2.10).

如果函数 h 是不增的, 则由 $p(t)$ 的定义得 $g(m(t)) \leq g(h(t_0) + p(t))$. 设 $h(t_0) + p(t) = w(t)$, 得

$$w(t) = p'(t) = v(t)g(m(t)) \leq v(t)g(w(t)), \quad w(t_0) = h(t_0)$$

根据定理 1.2.5 由这个不等式可导出估计式(1.2.11).

如果在定理 1.2.5 中假定函数 $g(u)$ 是不增的且关于 u 是上可加的, 则可得估计式(1.2.10).

定理 1.2.6 设 $m, h \in C(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+)$, $g \in C((0, +\infty), (0, +\infty))$ 且函数 $g(u)$ 关于 u 不减. 假定 $K \in C[\mathbf{R}_+^3, \mathbf{R}_+]$, 存在连续与非负的函数 $K_t(t, s)$ 且当 $t \geq t_0$ 时满足不等式

$$m(t) \leq h(t) + \int_{t_0}^t K(t, s)g(m(s))ds$$

则

(1) 如果函数 g 是下可加的, 那么

$$m(t) \leq h(t) + v_2(t) + G^{-1} \left[G(c) + \int_{t_0}^t v_1(s)ds \right], \quad t_0 \leq t \leq T_0 < T$$

其中 G, G^{-1} 与 T 取值与定理 1.2.4 中的相同,

$$c = \int_{t_0}^{T_0} v_1(s)g(v_2(s))ds, \quad v_1(t) = K(t, t) + \int_{t_0}^t K_t(t, s)ds$$

$$v_2(t) = K(t, t)h(t) + \int_{t_0}^t K_t(t, s)g(h(s))ds$$

(2) 如果函数 h 是不增的, 则

$$m(t) \leq h(t) - h(t_0) + G^{-1} \left[G(h(t_0)) + \int_{t_0}^t v_1(s)ds \right], \quad t_0 \leq t < T$$

可将典型的非线性积分不等式的证明归结到定理 1.2.4. 有如下定理.

定理 1.2.7 设 $m, v \in C(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+)$ 且 $w \in C(\mathbf{R}_+^2, \mathbf{R}_+)$, 同时满足

$$m(t) \leq c + \int_{t_0}^t \{v(s)m(s) + w[s, m(s)]\} ds, \quad t \geq t_0 \quad (1.2.12)$$

其中 $c > 0$. 其次假设

$$w\left(t, z \exp\left(\int_{t_0}^t v(s) ds\right)\right) \leq \lambda(t) g(z) \exp\left(\int_{t_0}^t v(s) ds\right) \quad (1.2.13)$$

其中 $\lambda \in C(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+)$, $g \in C((0, \infty), (0, \infty))$ 且函数 $g(u)$ 关于 u 不减. 则

$$m(t) \leq G^{-1}\left[G(c) + \int_{t_0}^t \lambda(s) ds\right] \exp\left(\int_{t_0}^t v(s) ds\right), \quad t_0 \leq t < T \quad (1.2.14)$$

G, G^{-1} 与 T 和定理 1.2.4 中的取相同的值.

证明 设不等式 (1.2.12) 的右端等于 $p(t) \exp\left(\int_{t_0}^t v(s) ds\right)$, 使当利用式 (1.2.12) 与式 (1.2.13) 后得

$$\begin{aligned} [p'(t) + v(t)p(t)] \exp\left(\int_{t_0}^t v(s) ds\right) &= v(t)m(t) + w(t, m(t)) \\ &\leq [v(t)p(t) + \lambda(t)g(m(t))] \exp\left(-\int_{t_0}^t v(s) ds\right) \exp\left(\int_{t_0}^t v(s) ds\right) \end{aligned}$$

因函数 g 是不减的且 $m(t) \leq p(t) \exp\left(\int_{t_0}^t v(s) ds\right)$, 故有

$$p'(t) \leq \lambda(t)g(p(t)), \quad p(t_0) = c.$$

根据定理 1.2.4 由此得

$$p(t) \leq G^{-1}\left[G(c) + \int_{t_0}^t \lambda(s) ds\right], \quad t_0 \leq t < T$$

这就证明了估计式 (1.2.14).

例 1.2.5 设 $m, v, h \in C(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+)$, 使当 $c > 0, 0 \leq p < 1$ 时, 有

$$m(t) \leq c + \int_{t_0}^t v(s)m(s) ds + \int_{t_0}^t h(s)(m(s))^p ds, \quad t \geq t_0$$

则当 $t \geq t_0$ 时,

$$m(t) \leq \left\{ c^q + q \int_{t_0}^t h(s) \exp\left[q \int_{t_0}^s v(\xi) d\xi\right]^{1/q} \exp\left[\int_{t_0}^t v(s) ds\right] \right\}$$

其中 $q = 1 - p$.

如果核 $K(t, s)$ 满足 $K_t(t, s) \leq 0$, 则根据定理 1.2.6 只可能得到进一步的估