带小参数的非线性系统的稳定性分析

●〔乌克兰〕阿·阿·玛尔德纽克　孙振绮　著

科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

本书介绍了根据标量、向量与矩阵值李雅普诺夫函数刻画的带小参数非线性系统稳定性分析的新方法，同时介绍了更有效地解决工程技术中的一些稳定性分析问题的实例.

正如稳定性理论领域的专家指出的，"带小参数的非线性系统稳定性分析"是讨论初始系统稳定性的新方法. 它有别于李雅普诺夫稳定性和关于两种测度的稳定性. 本书在构造李雅普诺夫函数中创造性运用扰动方法与均值法，并在李雅普诺夫直接方法的框架内提供了矩阵值李雅普诺夫函数在奇异扰动系统中的新的应用.

本书可供应用数学、应用物理学、控制与电气工程、通信网络等专业的专家与科技人员参考使用，也可作为相应专业的研究生教材.

图书在版编目(CIP)数据

带小参数的非线性系统的稳定性分析/(乌克兰)阿·阿·玛尔德纽克，孙振绮著. —北京：科学出版社，2005

ISBN 7-03-016646-9

Ⅰ. 带… Ⅱ. ①阿…②孙… Ⅲ. 非线性－稳定性(数学)－分析 Ⅳ. O175.13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 151842 号

责任编辑：陈玉琢 祖翠娥/责任校对：鲁 素

责任印制：安春生/封面设计：黄华斌

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

丽 源 印 刷 厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2006 年 3 月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2006 年 3 月第一次印刷 印张：16 1/2

印数：1—3 000 字数：310 000

定价：40.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

前　言

许多现代科学技术问题,包括力学、物理学、流体动力学、连续粒子射线的电动力学、空间技术、天体动力学与其他众多领域问题的研究都要归结到研究带小参数的非线性系统. 在研究各类实际问题时,所研究方程组的解在某种意义上的稳定性是关键问题. 在某些情况下,可把古典稳定性理论的方法推广到带小参数系统. 但在解决非线性振动与稳定性理论的问题中遇到相当大的困难,这就是描述系统状态的变量的增加且其中含有临界变量. 此外,具有临界变量可能导致:不仅一次近似不能解决稳定性问题,而且随后到某阶的非线性近似,也不能解决所提出的问题.

为克服这些难题,在近四十年间,许多数学家对带小参数系统进行了详细地研究,提出了许多新的方法,可归纳如下:

(1) 在研究含自由项有限次幂的系统关于两个不同测度的稳定性时发展了李雅普诺夫直接方法.

(2) 根据构造李雅普诺夫函数,用扰动方法分析某些类线性系统与非线性系统的稳定性.

(3) 根据比较原理与非线性力学的均值方法的思想推广李雅普诺夫直接方法.

(4) 在研究奇异扰动系统稳定性时,深入研究了李雅普诺夫矩阵值函数方法及其应用.

本书主要研究带小参数系统,特别是带小参数的非线性弱关联系统. 同时,在解决具体所述问题时运用(或发展运用)方法(1)～(4).

本书内容共 5 章. 下面介绍各章内容摘要:

第 1 章介绍带小参数系统定性分析方法的数学原理,其中包括积分不等式与微分不等式理论、方程的解析理论中的必要知识,李雅普诺夫直接方法的基本定理,庞加莱关于把解展成小参数幂的定理. 同时还着重讨论了带小参数系统稳定性的定义及这些定义与李雅普诺夫古典定义的联系.

第 2 章包括深入研究新方法解决弱关联大系统的稳定性问题的成果. 这里,运用李雅普诺夫直接方法与比较原理得出了非线性系统关于两个不同测度的稳定性条件. 同时引入了弱关联复合系统中的孤立子系统的动力学性质,根据向量李雅普诺夫函数与 M 矩阵理论得到所研究系统稳定性的代数准则. 在该章最后一节讨论了运动的半稳定性问题并应用得到的结论研究自动控制问题的稳定性.

在第 3 章中叙述了运用渐近的均值法结合庞加莱的扰动方法,解决构造形如小参数幂级数的李雅普诺夫函数问题. 在该章中,对某些类型(线性与具有积分近似的非线性)运动扰动方程组运用上面提到的(小参数幂级数型)李雅普诺夫函数进行了论证. 这里还引进了切达耶夫关于具有周期系数的线性方程组解的稳定性的定理并进行在标准形式的非线性方程组上的推广. 在该章最后一节介绍了当生成方程组具有非渐近稳定的零解时,对部分变元的稳定性的定理.

在第 4 章中介绍一个研究带小参数的非线性方程组的解的稳定性的一般方法. 它推广了李雅普诺夫直接方法,并把它与非线性力学的渐近方法结合起来. 这里对所研究类型的方程组引入推广的李雅普诺夫稳定性的基本定理与切达耶夫不稳定性定理. 由于构造退化方程组的解的困难,在该章中讨论两种精确解的替换方法,即用极限方程组的解或逼近生成方程组的精确解的特殊函数组来替换精确解. 作为应用考虑弱关联振荡方程组.

第 5 章专门介绍奇异扰动系统的稳定性分析. 对此,运用根据矩阵值函数推广的李雅普诺夫直接方法. 所提供的方法可降低对退化系统与边界层的动力学性质的要求且可得出原系统的渐近稳定性的新条件. 作为在工程上的应用,研究了鲁立叶-波斯特尼柯夫奇异扰动系统.

因此,本书介绍了近四十年间对带小参数系统解的稳定性的分析进行深入研究得到的主要方法. 这些方法不是彻底解决了所讨论的问题,但是利用这些方法可以解决许多现代技术与工艺的实际问题. 此外,这一领域对于在这一方向上继续寻求更有效的方法仍留有宽阔的空间.

乌克兰科学院院士 Ю. А. 米特洛波里斯基不止一次地向本书第一作者乌克兰科学院通讯院士阿·阿·玛尔德纽克建议把注意力转向深入研究对于工程应用是可行的非线性系统的稳定性的分析方法. 本书所提供的方法正是在方程的定性理论的现代发展的框架内对这一问题的回答.

在完成本课题研究的过程中,个别问题曾与教授:Н. В. Азбелевый、В. М. Старжинский、Е. Л. Тонковый、Ю. А. Рябовый 等讨论过. 借此机会,对他们的关注与讨论结果表示衷心的感谢.

本书所叙述的许多主要结果是 1978～2005 年在乌克兰科学院力学研究所过程的稳定性研究部得到的. А. Каримжанов、В. И. Косолапов、Л. Н. Чернецкая 积极参与了详细研究书中讨论的问题. 本书利用了他们的某些研究成果,并标明了对应的参考文献.

哈尔滨工业大学孙振绮教授于 1996 年应邀作为访问学者与本书第一作者进行合作研究,十多年来,双方真诚合作,取得多项研究成果. 在俄罗斯《科学报告》、乌克兰《数学杂志》、《应用力学》等刊物上发表论文多篇,并合作用中文于中国科学出版社出版专著《实用稳定性及应用》. 本书是根据中国哈尔滨工业大学与乌克兰

科学院力学研究所科研合作协议完成的最新研究成果. 我们相信,本书的出版,将进一步加强中国与乌克兰学者在该领域内的互相学习与交流.

本书可供应用数学、应用物理学、控制与电气工程、通信网络等专业的专家与科技人员参考使用,也可作为相应专业的研究生教材.

阿·阿·玛尔德纽克　孙振绮

2005 年于哈尔滨

目　　录

第1章　带小参数系统的定性分析的数学原理

1.1　引　　言

对于许多现实世界的过程的数学建模都用含小正参数 μ 的非线性微分方程组,其中 μ 参与过程的时间刻度的确定,在一般情况可表为方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{Y}(t,\boldsymbol{y},\mu), \qquad \boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}_0 \tag{1.1.1}$$

其中 $\boldsymbol{y}(t) \in \mathbf{R}^n$ 是方程组在时刻 $t \in R_0$, $R_0 = [t_0, +\infty)$, $t_0 \in \mathbf{R}$,的状态向量,$\boldsymbol{Y}$: $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times M \to \mathbf{R}^n$, $M = (0,1]$, μ 是小非负参数.

本章内容安排如下:

1.2 节介绍常用的不等式,其中包括 Гронуолл 与 Бихари 基本不等式、微分不等式与积分不等式.

1.3 节叙述微分方程组对参数 μ 的相依性定理. 这里还证明用有限退化方程代替微分方程. 实质上是使对表示方程组解的、按参数的幂展开的级数的收敛半径的估计更精确化.

此外,这里还介绍了解的延拓定理和庞加莱关于把解表示成小参数的幂级数的定理.

1.4 节叙述李雅普诺夫原来的运动稳定性的不同类型的定义.

1.5 节介绍李雅普诺夫直接方法的发展中的某些结论与带有纯量、向量李雅普诺夫函数的比较原理的基本定理.

1.6 节叙述带小参数系统解的 μ 稳定的不同类型的定义. 这里,还将用一些具体的例子讨论李雅普诺夫意义稳定性与 μ 稳定之间的联系.

因此,本章既含有已知结果又含有新的论断,它们的结合便构成带小参数微分方程组解的数学分析的基础.

1.2　基本不等式

1.2.1　格洛努奥尔(Гронуолл)型不等式

我们从一个最简单且最常用的积分不等式开始介绍.

定理 1.2.1　设函数 $m, v \in C(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+)$. 其次,假设对某个 $c \geqslant 0$ 满足不等式

$$m(t) \leqslant c + \int_{t_0}^{t} v(s)m(s)\mathrm{d}s, \qquad t \geqslant t_0 \geqslant 0 \tag{1.2.1}$$

则

$$m(t) \leqslant c\exp\left[\int_{t_0}^{t} v(s)\mathrm{d}s\right], \qquad t \geqslant t_0 \tag{1.2.2}$$

证明 如果 $c>0$,则由不等式(1.2.1)得不等式

$$\frac{m(t)v(t)}{c + \int_{t_0}^{t} v(s)m(s)\mathrm{d}s} \leqslant v(t)$$

对它积分得

$$\ln\left[c + \int_{t_0}^{t} v(s)m(s)\mathrm{d}s\right] - \ln c \leqslant \int_{t_0}^{t} v(s)\mathrm{d}s$$

考虑到式(1.2.1)便可化为式(1.2.2).

如果 $c=0$,则不等式(1.2.1)对任何 $\varepsilon>0$ 都成立,因而由上面证明知,当 $c=\varepsilon$ 时有不等式(1.2.2)成立. 令 $\varepsilon\to 0$,得 $m(t)\equiv 0$,从而定理得证.

这里所进行的定理 1.2.1 的传统证明有重要意义. 然而也可利用线性微分不等式与常数变易公式证明这个定理. 对此,考虑更一般的情形.

定理 1.2.2 设 $m,v,h\in C(\mathbf{R}_+,\mathbf{R}_+)$且

$$m(t) \leqslant h(t) + \int_{t_0}^{t} v(s)m(s)\mathrm{d}s, \qquad t \geqslant t_0 \tag{1.2.3}$$

则

$$m(t) \leqslant h(t) + \int_{t_0}^{t} [v(s)h(s)]\exp\left(\int_{s}^{t} v(\xi)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}s, \qquad t \geqslant t_0 \tag{1.2.4}$$

如果函数 h 是可微的,则

$$m(t) \leqslant h(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t} v(s)\mathrm{d}s\right) + \int_{t_0}^{t} h'(s)\exp\left(\int_{s}^{t} v(\xi)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}s, \qquad t \geqslant t_0 \tag{1.2.5}$$

证明 为证明不等式(1.2.4),令

$$p(t) = \int_{t_0}^{t} v(s)m(s)\mathrm{d}s$$

使有 $p(t_0)=0$ 且 $p'(t)\leqslant v(t)m(t),t\geqslant t_0$.

因 $m(t)\leqslant h(t)+p(t)$,故有

$$p'(t) \leqslant v(t)p(t) + v(t)h(t), \qquad t \geqslant t_0$$

令 $q(t) = p(t)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} v(s)\mathrm{d}s\right)$，容易验证 $q(t_0)=0$ 且

$$q'(t)=[p'(t)-v(t)p(t)]\exp\left(-\int_{t_0}^{t} v(s)\mathrm{d}s\right)$$
$$\leqslant h(t)v(t)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} v(s)\mathrm{d}s\right)$$

由此得

$$q(t)\leqslant\int_{t_0}^{t} h(s)v(s)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} v(\xi)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}s,\qquad t\geqslant t_0$$

由于我们得到不等式

$$p(t)\leqslant\int_{t_0}^{t} v(s)h(s)\exp\left(\int_{s}^{t} v(\xi)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}s,\qquad t\geqslant t_0$$

由此可直接得到(1.2.4).

为证明不等式(1.2.5)，用 $p(t)$表示不等式(1.2.3)的右端，使有

$$p'(t) = v(t)m(t) + h'(t),\qquad p(t_0) = h(t_0)$$

现在，不难求得

$$p(t)\leqslant h(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t} v(s)\mathrm{d}s\right)+\int_{t_0}^{t} h'(s)\exp\left(\int_{s}^{t} v(\xi)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}s,\qquad t\geqslant t_0$$

由此得到估计(1.2.5).

从形式上看估计式(1.2.4)与(1.2.5)是不同的. 事实上它们是等价的. 譬如在不等式(1.2.5)的右端对第二加项分部积分，得

$$\int_{t_0}^{t} h'(s)\exp\left(\int_{s}^{t} v(\xi)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}s$$
$$= h(t) - h(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t} v(\xi)\mathrm{d}\xi\right)+\int_{t_0}^{t} h(s)v(s)\exp\left(\int_{s}^{t} v(\xi)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}s$$

考虑到估计式(1.2.5)便给出估计式(1.2.4). 因而，易知对函数 h 的可微性的假设，没有给出任何新的结论.

如果在定理 1.2.2 中假定，函数 h 是正的且不减的函数，则估计式(1.2.4)可化为

$$m(t)\leqslant h(t)\exp\left(\int_{t_0}^{t} v(s)\mathrm{d}s\right),\qquad t\geqslant t_0 \tag{1.2.6}$$

令 $w(t)=\dfrac{m(t)}{h(t)}$，由不等式(1.2.3)得

$$w(t) \leqslant 1 + \int_{t_0}^{t} v(s)w(s)\mathrm{d}s, \qquad t \geqslant t_0$$

根据定理 1.2.1,由此得

$$w(t) \leqslant \exp\left(\int_{t_0}^{t} v(s)\mathrm{d}s\right)$$

从而得到式(1.2.6).

估计式可由不等式(1.2.4)得到. 因为

$$\begin{aligned}
& h(t) + \int_{t_0}^{t} v(s)h(s)\exp\left(\int_{t_0}^{t} v(\xi)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}s \\
\leqslant\ & h(t)\left[1 + \int_{t_0}^{t} v(s)\exp\left(\int_{s}^{t} v(\xi)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}s\right] \\
=\ & h(t)\left(1 - \int_{s}^{t} \mathrm{e}^{\sigma(s)}\mathrm{d}\sigma(s)\right) \\
=\ & h(t)\exp\left(\int_{t_0}^{t} v(\xi)\mathrm{d}\xi\right), \qquad t \geqslant t_0
\end{aligned}$$

例 1.2.1 设 $m \in C(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+)$且 $m(t) \leqslant \int_{t_0}^{t} (A + Bm(s))\mathrm{d}s$,$t \geqslant t_0$,其中 $A>0, B>0$. 则

$$m(t) \leqslant \frac{A}{B}[\exp(B(t - t_0)) - 1], \qquad t \geqslant t_0$$

例 1.2.2 设 $m \in C(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+)$且 $m(t) \leqslant A + \int_{t_0}^{t} (B + Cm(s))\mathrm{d}s$, $t \geqslant t_0$,其中 $A, B>0$ 且 $C>0$. 则

$$m(t) \leqslant \frac{B}{C}[\exp(C(t - t_0)) - 1] + A\exp(C(t - t_0)), \qquad t \geqslant t_0$$

例 1.2.3 设 $m \in C(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+)$且当 $B>0$ 时有

$$m(t) \leqslant \mathrm{e}^{t} + B\int_{t_0}^{t} m(s)\mathrm{d}s, \qquad t \geqslant t_0$$

则

$$m(t) \leqslant \exp[(B + 1)t - Bt_0], \qquad t \geqslant t_0$$

例 1.2.4 设 $m \in C(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+)$且对于 $t \geqslant t_0$ 满足不等式

$$m(t) \leqslant m(t_0)\exp(-r(t - t_0)) + \int_{t_0}^{t} [\exp(-r(t - s))](Am(s) + B)\mathrm{d}s$$

其中 $r, A, B>0$ 且 $r - A>0$. 则对于 $t \geqslant t_0$ 有

$$m(t) \leqslant m(t_0)\exp[-(r-A)(t-t_0)] + \frac{B}{r-A}[1-\exp(-(r-A)(t-t_0))]$$

其次,考虑带有可分核的积分不等式. 因为可把它们归结为线性微分不等式.

定理 1.2.3　设 $m, h, q, v \in C(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+)$且满足不等式

$$m(t) \leqslant h(t) + \int_{t_0}^{t} q(t)v(s)m(s)\mathrm{d}s, \qquad t \geqslant t_0 \tag{1.2.7}$$

则

$$m(t) \leqslant h(t) + q(t)\int_{t_0}^{t} v(s)h(s)\exp\left(\int_s^t v(\xi)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}s, \qquad t \geqslant t_0 \tag{1.2.8}$$

证明　设 $p(t) = \int_{t_0}^{t} v(s)m(s)\mathrm{d}s$,使有 $p(t_0)=0$ 且 $p'(t)=v(t)m(t)$. 由于 $m(t) \leqslant h(t)+q(t)p(t)$,故有

$$p'(t) \leqslant v(t)q(t)p(t) + v(t)h(t), \qquad t \geqslant t_0$$

从而得

$$p(t) \leqslant \int_{t_0}^{t} v(s)h(s)\exp\left(\int_s^t v(\xi)q(\xi)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}s, \qquad t \geqslant t_0$$

由此得到不等式(1.2.8).

推论 1.2.1　设 $m, h, g_i, v_i \in C(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+)$, $i=1,2,\cdots,n$,且

$$m(t) \leqslant h(t) + \sum_{i=1}^{n} g_i(t)\int_{t_0}^{t} v_i(s)m(s)\mathrm{d}s, \qquad t \geqslant t_0$$

则

$$m(t) \leqslant h(t) + G(t)\int_{t_0}^{t} V(s)h(s)\exp\left(\int_s^t V(\xi)G(\xi)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}s, \qquad t \geqslant t_0$$

其中 $G(t)=\sup\limits_{i} g_i(t)$ 且 $V(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i(t)$.

1.2.2　毕哈里(Бихари)型不等式

可把在 1.2.1 节考虑的格洛努奥尔积分不等式定理推广到个别类型的非线性积分不等式,这就是毕哈里不等式. 在这节将介绍这类不等式的某些结论,它们对应于在 1.2.1 节得到的结果.

定理 1.2.4　设 $m, v \in C(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+)$, $g \in C((0,\infty),(0,\infty))$且 $g(u)$关于 u

是不减的. 假设对某个 $c>0$,

$$m(t) \leqslant c + \int_{t_0}^{t} v(s)g(m(s))\mathrm{d}s, \qquad t \geqslant t_0 > 0 \tag{1.2.9}$$

则有下述不等式成立:

$$m(t) \leqslant G^{-1}\left[G(c) + \int_{t_0}^{t} v(s)\mathrm{d}s\right], \qquad t_0 \leqslant t < T$$

其中 $G(u) - G(u_0) = \int_{u_0}^{u} \frac{\mathrm{d}s}{g(s)}$, $G^{-1}(u)$是 $G(u)$的反函数且

$$T = \sup\left\{t \geqslant t_0 : G(c) + \int_{t_0}^{t} v(s)\mathrm{d}s \in \mathrm{dom}G^{-1}\right\}$$

证明 记不等式(1.2.9)的右端为 $p(t)$,且满足 $p(t_0)=c$ 与 $p'(t)\leqslant v(t)g(m(t))$. 因 g 不减且 $m(t)\leqslant p(t)$,故有 $p'(t)\leqslant v(t)g(p(t))$, $p(t_0)=c$. 从 t_0 到 t 积分这个不等式,得

$$G(p(t)) - G(c) = \int_{c}^{p(t)} \frac{\mathrm{d}z}{g(z)} \leqslant \int_{t_0}^{t} v(s)\mathrm{d}s$$

从而得

$$m(t) \leqslant p(t) \leqslant G^{-1}\left[G(c) + \int_{t_0}^{t} v(s)\mathrm{d}s\right], \qquad t_0 \leqslant t < T$$

对于函数 $g\in C[\mathbf{R}_+,\mathbf{R}_+]$若 $g(u+v)\leqslant g(u)+g(v)$,则称 g 是下可加函数;若不等号取“$\geqslant$”,则称 g 是上可加函数.

定理 1.2.5 设 $m,v,h\in C(\mathbf{R}_+,\mathbf{R}_+)$, $g\in C((0,\infty),(0,\infty))$且函数 $g(u)$不减,同时有

$$m(t) \leqslant h(t) + \int_{t_0}^{t} v(s)g(m(s))\mathrm{d}s, \qquad t \geqslant t_0$$

则

(1) 如果函数 $g(u)$是下可加的,则

$$m(t) \leqslant h(t) + G^{-1}\left[G(c) + \int_{t_0}^{t} v(s)\mathrm{d}s\right], \qquad t_0 \leqslant t \leqslant T_0 < T \tag{1.2.10}$$

其中值 G, G^{-1}与 T 存在这样的值,使定理 1.2.4 中的 $c = \int_{t_0}^{T_0} v(s)g(h(s))\mathrm{d}s$;

(2) 若函数 h 不增,则

$$m(t) \leqslant -h(t_0) + G^{-1}\left\{G[h(t_0)] + \int_{t_0}^{t} v(s)\mathrm{d}s\right\}, \qquad t_0 \leqslant t < T \tag{1.2.11}$$

证明　设 $p(t) = \int_{t_0}^{t} v(s)g(m(s))\mathrm{d}s$ 且考虑 g 的性质，得 $p(t_0)=0$ 且

$$p'(t) \leqslant v(t)g(p(t)) + v(t)g(h(t))$$

我们指出，函数 $\sigma(t) = \int_{t_0}^{t} v(s)g(h(s))\mathrm{d}s$ 是不减的，且设 $c=\sigma(T_0)$ 对某个 $T_0: t_0 \leqslant T_0 < T$ 成立，从而得

$$p(t) \leqslant c + \int_{t_0}^{t} v(s)g(p(s))\mathrm{d}s, \qquad t_0 \leqslant t \leqslant T_0 < T$$

根据定理 1.2.4 由已知不等式得到估计式(1.2.10).

如果函数 h 是不增的，则由 $p(t)$ 的定义得 $g(m(t)) \leqslant g(h(t_0)+p(t))$. 设 $h(t_0)+p(t)=w(t)$，得

$$w(t) = p'(t) = v(t)g(m(t)) \leqslant v(t)g(w(t)), \qquad w(t_0) = h(t_0)$$

根据定理 1.2.5 由这个不等式可导出估计式(1.2.11).

如果在定理 1.2.5 中假定函数 $g(u)$ 是不增的且关于 u 是上可加的，则可得到估计式(1.2.10).

定理 1.2.6　设 $m, h \in C(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+)$，$g \in C((0,+\infty),(0,+\infty))$ 且函数 $g(u)$ 关于 u 不减. 假定 $K \in C[\mathbf{R}_+^3, \mathbf{R}_+]$，存在连续与非负的函数 $K_t(t,s)$ 且当 $t \geqslant t_0$ 时满足不等式

$$m(t) \leqslant h(t) + \int_{t_0}^{t} K(t,s)g(m(s))\mathrm{d}s$$

则

(1) 如果函数 g 是下可加的，那么

$$m(t) \leqslant h(t) + v_2(t) + G^{-1}\left[G(c) + \int_{t_0}^{t} v_1(s)\mathrm{d}s\right], \qquad t_0 \leqslant t \leqslant T_0 < T$$

其中 G, G^{-1} 与 T 取值与定理 1.2.4 中的相同，

$$c = \int_{t_0}^{T_0} v_1(s)g(v_2(s))\mathrm{d}s, \qquad v_1(t) = K(t,t) + \int_{t_0}^{t} K_t(t,s)\mathrm{d}s$$

$$v_2(t) = K(t,t)h(t) + \int_{t_0}^{t} K_t(t,s)g(h(s))\mathrm{d}s$$

(2) 如果函数 h 是不增的，则

$$m(t) \leqslant h(t) - h(t_0) + G^{-1}\left[G(h(t_0)) + \int_{t_0}^{t} v_1(s)\mathrm{d}s\right], \qquad t_0 \leqslant t < T$$

可将典型的非线性积分不等式的证明归结到定理 1.2.4. 有如下定理.

定理 1.2.7　设 $m,v\in C(\mathbf{R}_+,\mathbf{R}_+)$ 且 $w\in C(\mathbf{R}_+^2,\mathbf{R}_+)$，同时满足

$$m(t)\leqslant c+\int_{t_0}^{t}\{v(s)m(s)+w[s,m(s)]\}\mathrm{d}s,\qquad t\geqslant t_0 \tag{1.2.12}$$

其中 $c>0$. 其次假设

$$w\left(t,z\exp\left(\int_{t_0}^{t}v(s)\mathrm{d}s\right)\right)\leqslant\lambda(t)g(z)\exp\left(\int_{t_0}^{t}v(s)\mathrm{d}s\right) \tag{1.2.13}$$

其中 $\lambda\in C(\mathbf{R}_+,\mathbf{R}_+)$，$g\in C((0,\infty),(0,\infty))$ 且函数 $g(u)$ 关于 u 不减. 则

$$m(t)\leqslant G^{-1}\left[G(c)+\int_{t_0}^{t}\lambda(s)\mathrm{d}s\right]\exp\left(\int_{t_0}^{t}v(s)\mathrm{d}s\right),\qquad t_0\leqslant t<T \tag{1.2.14}$$

G,G^{-1} 与 T 和定理 1.2.4 中的取相同的值.

证明　设不等式(1.2.12)的右端等于 $p(t)\exp\left(\int_{t_0}^{t}v(s)\mathrm{d}s\right)$，使当利用式(1.2.12)与式(1.2.13)后得

$$\begin{aligned}[p'(t)+v(t)p(t)]\exp\left(\int_{t_0}^{t}v(s)\mathrm{d}s\right)&=v(t)m(t)+w(t,m(t))\\&\leqslant[v(t)p(t)+\lambda(t)g(m(t))]\exp\left(-\int_{t_0}^{t}v(s)\mathrm{d}s\right)\exp\left(\int_{t_0}^{t}v(s)\mathrm{d}s\right)\end{aligned}$$

因函数 g 是不减的且 $m(t)\leqslant p(t)\exp\left(\int_{t_0}^{t}v(s)\mathrm{d}s\right)$，故有

$$p'(t)\leqslant\lambda(t)g(p(t)),\qquad p(t_0)=c.$$

根据定理 1.2.4 由此得

$$p(t)\leqslant G^{-1}\left[G(c)+\int_{t_0}^{t}\lambda(s)\mathrm{d}s\right],\qquad t_0\leqslant t<T$$

这就证明了估计式(1.2.14).

例 1.2.5　设 $m,v,h\in C(\mathbf{R}_+,\mathbf{R}_+)$，使当 $c>0,0\leqslant p<1$ 时，有

$$m(t)\leqslant c+\int_{t_0}^{t}v(s)m(s)\mathrm{d}s+\int_{t_0}^{t}h(s)(m(s))^{p}\mathrm{d}s,\qquad t\geqslant t_0$$

则当 $t\geqslant t_0$ 时，

$$m(t)\leqslant\left\{c^{q}+q\int_{t_0}^{t}h(s)\exp\left[q\int_{t_0}^{s}v(\xi)\mathrm{d}\xi\right]^{1/q}\exp\left[\int_{t_0}^{t}v(s)\mathrm{d}s\right]\right\}$$

其中 $q=1-p$.

如果核 $K(t,s)$ 满足 $K_t(t,s)\leqslant 0$，则根据定理 1.2.6 只可能得到进一步的估