东方教育 EAST EDUCATION

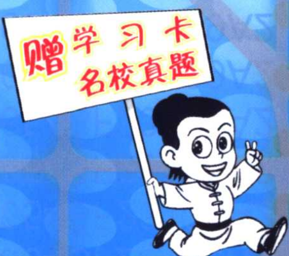
高等学校教材经典同步辅导丛书

# 概率论与数理统计

第三版

# 习题全解

普通高等教育国家规划教材研究中心
东方教育教材研发中心 组编
浙江大学 刁玉全 主编




新华出版社

高等学校教材经典同步辅导丛书

# 概率论与数理统计

## （第三版）

# 习题全解


普通高等教育国家规划教材研究中心
东方教育教材研发中心 组编
浙江大学 刁玉全 主编



新华出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

概率论与数理统计习题全解/刁玉全编著.
北京:新华出版社,2006.2
ISBN 7-5011-7406-7
Ⅰ.概… Ⅱ.刁… Ⅲ.①概率论—高等学校—解题
②数理统计—高等学校—解题 Ⅳ.021-44
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 005332 号

**概率论与数理统计习题全解**

---

责任编辑: 丁慧
装帧设计: 东方教育视觉艺术中心
责任校对: 肖宇波
出版发行: 新华出版社
地　　址: 北京石景山区京原路 8 号
网　　址: http://www.xinhuapub.com
邮　　编: 100043
经　　销: 新华书店
印　　刷: 北京市昌平百善印刷厂
开　　本: 850mm×1168mm　1/32
印　　张: 7
字　　数: 168 千字
版　　次: 2006 年 2 月第 1 版
印　　次: 2006 年 2 月北京第 1 次印刷
书　　号: ISBN 7-5011-7406-7
定　　价: 7.00 元

# 六大特色　成就你的智慧之选

打开本书，你或许心存疑虑，这是符合我需要的书吗？

许多人面对书架上琳琅满目的各种辅导书时，失去了自己的方向。不过，很多同学在拥有本书后，发现选书其实很容易。问起他们一致选择本书的原因，看法惊人的一致……

## 专业权威

对于教辅书，最重要的莫过于对教材的研究与透彻领悟。为此我们除了邀请在对教材的编写有深入研究的普通高等教育国家规划教材研究中心和东方教育教材研发中心的专家外，还特地邀请北京大学、清华大学、同济大学、浙江大学等著名高校的知名教授参与编写本书，将他们多年的授课心得融入到本书中，确保符合教材精神、符合专业权威的要求。

## 正文高质量

质量是生存之本，对教辅书而言尤其如此。我们为此制订了严格科学的图书编撰、校对、审核等流程标准。每本书的原稿必须是两位专家同时独立编写，二者择其优；每本书的稿件必须经过四次严格的专业校对，四次审核；最后完稿我们会将稿件送至少3位该课程的教授各自独立审核稿件；书中的每道题必须经过3位精通该课程的研究生各自独立的计算；其间任何一道流程没有符合要求，我们会不断的修改，一直改到符合我们的标准……

为了质量我们不惜花费时间、精力。正文高质量，是百万读者信任我们的最大奥秘。

## 结构详尽 内容丰富

一本好书的结构，需要考虑读者的需求，有科学的结构设计。为此，我们设置了科学合理的结构，透过书中的小栏目（如学习要求、知识网络图等），你可以事半功倍地学习新知识、掌握新知识。

## 真正的习题全解

很多书都有习题全解，相信这也是同学们最关心的问题。本书所有习题解题过程、解题方法均是一线教学名师多年教学经验之精华、教材编写专家多年研究之心得，是课后习题最科学最典型的方法。

# 六大特色　成就你的智慧之选

## 网络学习卡

通过随书赠送的学习卡，只要登录东方教育网（www.dongfangedu.com.cn），就可以获得在线学习、在线下载、论坛交流、信息浏览等精彩服务内容。

## 超值赠送 超值服务

购买本书你可以随书获得如下超值回报和服务：

赠送名校历年期末真题；赠送期末模拟试题；可以增值至66元的学习卡。

### 知识链接：何谓优秀图书?

读者心中优秀图书的标准是什么？东方教育网历时一年对北京、上海、广州、西安、武汉等十几个城市100多所大学五万余名在校大学生进行了问卷调查，根据问卷结果，我们整理出了如下表格，希望对你购书能有所帮助。

| 图书类别 / 对比项目 | 一般图书 | 较好图书 | 优秀图书 |
|---|---|---|---|
| 专业性权威性 | 内容东拼西凑，没有深入研究教材 | 内容专业性不强，无法理解教材的编写思想 | 内容全部由教材研究专家撰写，结合多年教学经验之精华，确保专业权威 |
| 正文质量 | 没有主次，结构混乱，错漏百出 | 重点不明显，结构不够科学，内容不够新颖 | 重点突出、主次分明，符合循序渐进的学习课程，有科学的审校流程体系 |
| 课后习题解答 | 纯粹的习题解答 | 有习题解答，内容介绍抄袭教材，解答不深入 | 详尽的解题过程，确保每道题解题方法的科学性典型性代表性 |
| 网络学习卡 | 无 | 无 | 有，资料丰富，在线答疑，互动交流，意见反馈等等 |
| 售后服务 | 无 | 有，但读者无法及时获得售后增值服务 | 读者可以通过读者调查表、电邮、网站论坛等方式与编者交流，及时发布最新信息 |

# 东方教育教材研发中心
# 经典同步辅导丛书编委会

# 目录 / Contents

## 第五章 大数定律及中心极限定理



## 第六章 样本及抽样分布



## 第七章 参数估计



## 第八章 假设检验

# 第一章

# 概率论的基本概念

## 学习要求

1. 了解样本空间的概念；理解随机事件的概念；掌握事件的关系与运算.
2. 理解概率、条件概率的概念；掌握概率的基本性质；掌握计算古典型概率和几何型概率；掌握概率的加法公式、乘法公式、减法公式、全概率公式以及贝叶斯公式.
3. 理解事件独立性的概念；掌握用事件独立性进行概率计算；理解独立重复试验的概念；掌握计算有关事件概率的方法.

## 知识网络图

- 概率论的基本概念
  - 随机事件——事件的关系与运算
    - 样本空间、事件定义
    - 事件间的运算关系
    - 运算形式和法则
  - 概率
    - 定义和性质
      - 定义
        - 统计定义
        - 古典定义
        - 几何定义
      - 性质
        - 非负、有界
        - 单调不减
        - 连续可加
    - 计算
      - 古典概率
      - 几何概率
      - 条件概率
      - 全概率公式
      - 贝叶斯公式
    - 事件的独立性

## 学习卡片

有限可加性　$P(A_1\cup A_2\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$

（$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两不相容）

独立性　$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdots P(A_n)$

（$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立）

加法公式　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)$$

$$+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

乘法公式　$P(AB)=P(A)P(B|A)$

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

减法公式　$P(B-A)=P(B)-P(AB)$

全概率公式　$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+\cdots+P(A|B_n)P(B_n)$

贝叶斯公式　$P(B_i|A)=\dfrac{P(A\mid B_i)P(B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(A\mid B_j)P(B_j)}\ (i=1,2\cdots n)$

## 课后习题全解

1. 写出下列随机事件的样本空间

(1)记录一个小班一次数学考试的平均分数(设以百分制记分)；

(2)生产产品直到有 10 件正品为止，记录生产产品的总件数；

(3)对某工厂出厂的产品进行检查，合格的记上"正品"，不合格的记上"次品"，如连续查出 2 个次品就停止检查，或检查 4 个产品就停止检查，记录检查的结果；

(4)在单位圆内任意取一点，记录它的坐标.

**解**　(1)$S=\{\frac{i}{n}\mid i=0,1,\cdots,100n\}$，其中 $n$ 为小班人数；

(2)$S=\{10,11,\cdots\}$；

(3)$S=\{00,100,0100,0101,0110,1100,1010,1011,0111,1101,1110,1111\}$，其中 0 表示次品，1 表示正品；

(4)$S=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$.

2. 设 $A,B,C$ 为三事件，用 $A,B,C$ 的运算关系表示下列各事件.

(1)$A$ 发生，$B$ 与 $C$ 不发生；

(2)$A$ 与 $B$ 都发生，而 $C$ 不发生；

(3)$A,B,C$ 中至少有一个发生；

(4)$A,B,C$ 都发生；

(5)$A,B,C$ 都不发生；

(6)$A,B,C$ 中不多于一个发生；

(7)$A,B,C$ 中不多于两个发生；

(8)$A,B,C$中至少有两个发生.

**解** (1)$A\overline{B}\,\overline{C}$;(2)$AB\overline{C}$;(3)$A\cup B\cup C$;(4)$ABC$;(5)$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$;
(6)$\overline{A}\,\overline{B}\cup\overline{A}\,\overline{C}\cup\overline{B}\,\overline{C}$;(7)$\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$;(8)$AB\cup BC\cup AC$.

3. 设$A,B$是两个事件且$P(A)=0.6,P(B)=0.7$. 问:(1)在什么条件下$P(AB)$取到最大值,最大值是多少?(2)在什么条件下$P(AB)$取到最小值,最小值是多少?

**解** (1)因为$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B),P(A)=0.6$,
$P(B)=0.7$
所以$P(A)<P(B)\leqslant P(A\cup B)$
所以当$A\subset B$时,$P(A\cup B)=P(B)$,$P(AB)$达到最大值,且
$P(AB)=P(A)=0.6$;
(2)当$A\cup B=S$时,$P(AB)$取到最小值,此时
$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.6+0.7-1=0.3$

4. 设$A,B,C$是三事件,且$P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4},P(AB)=P(BC)=0,P(AC)=\dfrac{1}{8}$,求$A,B,C$至少有一个发生的概率.

**解** 事件至少发生一个可表示为$A\cup B\cup C$. 又$0\leqslant P(ABC)\leqslant P(BC)=0$. 由此可知$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{8}=\dfrac{5}{8}$.

5. 在一标准英语字典中有55个由两个不同的字母所组成的单词,若从26个英文字母中任取两个字母予以排列,问能排列上述单词的概率是多少?

**解** 两个不同字母排列,可出现两种不同结果. 如用不同的顺序排列$o$与$n$,可得两个单词. 从26个字母中任取两个字母排列,不同的结果数为$P_{26}^2$记$A$=“正好是该字典中的一个单词”,则$A$包含的结果数为55. 从而

$$P(A)=\frac{55}{P_{26}^2}=\frac{55}{26\times 25}=\frac{11}{130}$$

6. 在房间里有10个人,分别佩戴从1号到10号的纪念章,任选3人

记录其纪念章的号码,(1)求最小号码为 5 的概率;(2)求最大的号码为 5 的概率.

**解** (1)、(2)有同一样本空间且所含元素个数为 $C_{10}^3$.

(1)记 $A$="最小号码为 5",则 $A$ 的样本点数为 $C_5^2$;故

$P(A)=\frac{C_5^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{12}$;

(2)记 $B$="最大号码为 5",则 $B$ 的样本点数为 $C_4^2$,故

$P(B)=\frac{C_4^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{20}$.

7. 某油漆公司发出 17 桶油漆,其中白漆 10 桶,黑漆 4 桶,红漆 3 桶,在搬运中所有标签脱落,交货人随意将这些发给顾客,问一个订货 4 桶白漆,3 桶黑漆和 2 桶红漆的顾客,能按所定颜色如数得到定货的概率是多少?

**解** 取发给顾客 9 桶油漆的所有可能情况为样本空间,其中含样本数为 $C_{17}^9$. 记 $A$ 为正确的发放,则 $A$ 含有的样本数为 $C_{10}^4 C_4^3 C_3^2$,从而

$$P(A)=\frac{C_{10}^4 \cdot C_4^3 \cdot C_3^2}{C_{17}^9}=\frac{252}{2431}$$

8. 在 1500 个产品中有 400 个次品,1100 个正品,任取 200 个,(1)求恰有 90 个次品的概率;(2)求至少有 2 个次品的概率.

**解** (1)产品的所有取法构成样本空间,其中所含的样本数为 $C_{1500}^{200}$,用 $A$ 表示取出的产品中恰有 90 个次品,则 $A$ 中的样本数为 $C_{400}^{90} \cdot C_{1100}^{110}$,因此

$$P(A)=\frac{C_{400}^{90} \cdot C_{1100}^{110}}{C_{1500}^{200}}$$

(2)用 $B$ 表示至少有 2 个次品,则 $\overline{B}$ 表示取出的产品中至多有一个次品,$\overline{B}$ 中的样本点数为 $C_{400}^1 C_{1100}^{199}+C_{1100}^{200}$,从而 $P(\overline{B})=\frac{C_{400}^1 C_{1100}^{199}+C_{1100}^{200}}{C_{1500}^{200}}$,因此

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{C_{400}^1 C_{1100}^{199}+C_{1100}^{200}}{C_{1500}^{200}}.$$

9. 从5双不同的鞋子中任取4只，这4只鞋子中至少有2只配成一双的概率是多少？

**解** 由题意，样本空间所含的样本点数为 $C_{10}^4$，用 $A$ 表示"4只鞋中至少有2只配成一双"，则 $\overline{A}$ 表示"4只鞋中没有2只配成一双"，$\overline{A}$ 的样本点数为 $C_5^4 \cdot 2^4$（先从5双鞋中任取4双，再从每双中任取一只）. 则 $P(\overline{A})=\frac{C_5^4 \cdot 2^4}{C_{10}^4}=\frac{8}{21}$，从而

$$P(A)=1-\frac{8}{21}=\frac{13}{21}$$

10. 在11张卡片上分别写上 probability 这11个字母，从中任意连抽7张，求其排列结果为 ability 的概率．

**解** 所有可能的排列构成样本空间，其中包含的样本点数为 $P_{11}^7$. 用 $A$ 表示"正确的排列"，则 $A$ 包含的样本点数为 $C_1^1 \cdot C_2^1 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1 \cdot C_1^1 \cdot C_1^1 \cdot C_1^1=4$

则 $$P(A)=\frac{4}{P_{11}^7}=0.0000024=2.4\times10^{-6}$$

11. 将3个球随机地放入4个杯中去，求杯子中球的最大个数分别为1，2，3的概率.

**解** 把3个球放入4只杯中共有 $4^3$ 种．

记 $A$="杯中球的最大个数为1"，事件 $A$ 即为从4只杯中选出3只，然后将3个球放到3只杯中去，每只杯中一个球，则 $A$ 所含的样本点数为 $C_4^3 \cdot P_3^3=24$，则

$$P(A)=\frac{24}{4^3}=\frac{3}{8}$$

记 $B$="杯中球的最大个数为2"，事件 $B$ 即为从4只杯中选出1只，再从3个球中选中2个放到此杯中，剩余1球放到另外3个杯中的某一个中，则 $B$ 所含的样本点数为 $C_4^1 \cdot C_3^2 \cdot C_3^1=36$

$$P(B)=\frac{36}{4^3}=\frac{9}{16}$$

记 $C$="杯中球的最大个数为3"，类似地，$C$ 所含的样本点数 $C_4^1 \cdot C_3^3=4$，从而

$$P(C)=\frac{4}{4^3}=\frac{1}{16}$$

12. 50 只铆钉随机地取来用在 10 个部位上，其中有 3 只铆钉强度太弱，每个部位用 3 只铆钉，若将 3 只强度太弱的铆钉都装在一个部件上，则这个部件强度就太弱，问发生一个部件强度太弱的概率是多少？

**解**　记 $A$ 表示“发生一个部件强度太弱”，则 $A$ 所含的样本点数为 $C_{10}^{1}C_{47}^{27}\frac{27!}{(3!)^9}$. 将 50 个铆钉装在 10 个部件上的所有方法的全体看作样本空间，则所含的样本点数为 $C_{50}^{30}\frac{30!}{(3!)^{10}}$.

则　$$P(A)=\frac{C_{10}^{1}\cdot 1\cdot C_{47}^{27}\cdot\frac{27!}{(3!)^9}}{C_{50}^{30}\cdot\frac{30!}{(3!)^9}}=\frac{1}{1960}.$$

13. 已知 $P(\overline{A})=0.3,P(B)=0.4,P(A\overline{B})=0.5$，求 $P(B|A\cup\overline{B})$.

**解**　由于 $A=AB\cup A\overline{B}$，且 $(AB)\cap(A\overline{B})=\varnothing$

从而　$P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$

所以　$P(AB)=P(A)-P(A\overline{B})=0.7-0.5=0.2$

又　$P(A\cup\overline{B})=P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})$

$=0.7+0.6-0.5=0.8$

故　$$P(B|A\cup\overline{B})=\frac{P[B\cap(A\cup\overline{B})]}{P(A\cup\overline{B})}=\frac{P(AB)}{P(A\cup\overline{B})}=\frac{0.2}{0.8}=0.25.$$

14. 已知 $P(A)=\frac{1}{4},P(B|A)=\frac{1}{3},P(A|B)=\frac{1}{2}$. 求 $P(A\cup B)$.

**解**　$$P(AB)=P(B|A)\cdot P(A)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{6}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=\frac{1}{3}.$$

15. 掷两颗骰子，已知两颗骰子点数之和为 7，求其中有一颗为 1 点的概率(用两种方法).

**解 1**　取两颗点数之和为 7 的所有可能情况的全体为样本空间 $S$，则

$S=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$;用 $A$ 表示两颗骰子点数之和为 7,其中有一颗为 1 点的事件,则 $A=\{(1,6),(6,1)\}$,从而

$$P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

**解 2** 设 $X$ 为第一颗骰子的点数,$Y$ 为第二颗骰子点数,则

$$P(X+Y=7)=\frac{6}{36}$$

$$P(X=1|X+Y=7)=\frac{P(X=1)P(X+Y=7|X=1)}{\frac{6}{36}}$$

$$=\frac{\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}}{\frac{6}{36}}=\frac{1}{6}=P(Y=1|X+Y=7)$$

故 $P(\{X=1\}\cup\{Y=1\}|X+Y=7)=P\{X=6,Y=1\}+P\{X=1,Y=6\}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$.

16. 据以往资料表明,某一 3 口之家,患某种传染病的概率有以下规律:$P$\{孩子得病\}$=0.6$,$P$\{母亲得病|孩子得病\}$=0.5$,$P$\{父亲得病|母亲及孩子得病\}$=0.4$,求母亲及孩子得病但父亲未得病的概率.

**解** 令 $A=$\{孩子得病\},$B=$\{母亲得病\},$C=$\{父亲得病\},则 $P(A)=0.6$,$P(B|A)=0.5$,$P(C|AB)=0.4$,所以 $P(\overline{C}|AB)=0.6$,$P(AB\overline{C})=P(A)\cdot P(B|A)\cdot P(\overline{C}|AB)=0.6\times0.5\times0.6=0.18$ 故母亲及孩子得病,但父亲未得病的概率为 0.18.

17. 已知在 10 只产品中有 2 只次品,在其中取两次,每次任取一只,作不放回抽样,求下列事件的概率:

(1)两只都是正品; (2)两只都是次品;

(3)一只是正品,一只是次品; (4)第二次取出的是次品.

**解** 设 $A_i=$\{第 $i$ 次取出的是正品\},

$B_i=$\{第 $i$ 次取出的是次品\},$(i=1,2)$

(1)$P(A_1A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)=\frac{8}{10}\cdot\frac{7}{9}=\frac{28}{45}$;