全国高等农林院校"十一五"规划教材

2005年全国高等农业院校优秀教材

高等数学

第二版

惠淑荣　李喜霞　主编

中国农业出版社

全国高等农林院校“十一五”规划教材

2005 年全国高等农业院校优秀教材

高等数学

第二版

惠淑荣　李喜霞　主编

中国农业出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/惠淑荣，李喜霞主编，—2 版．—北京：
中国农业出版社，2006.8
全国高等农林院校“十一五”规划教材
ISBN 7-109-11021-4

Ⅰ．高…　Ⅱ．①惠…②李…　Ⅲ．高等数学-高等学校-教材　Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 064267 号

内 容 提 要

本教材是根据编者多年的教学实践，按照教育部“21 世纪中国高等学校农林/医药类专业数理化基础课程的创新与实践”项目的成果，并在《高等数学》（第一版）的基础上编写的。在编写过程中我们渗透了一些现代数学的思想、语言和方法，增加了微积分在经济、管理学中的应用内容，保留了第一版教材的系统、风格及优点，并对一些内容做了适当精简和合并。

全书内容包括函数、极限与连续，导数与微分及其应用，积分及其应用，空间解析几何，二元函数的微积分及其应用，微分方程，无穷级数和 Mathematica 数学软件。

本教材可作为农林牧水产院校本专科学生的学习教材，也可作为研究生、教师和科技人员的学习参考书。

中国农业出版社出版
（北京市朝阳区农展馆北路 2 号）
（邮政编码 100026）
出版人：傅玉祥
责任编辑　朱　雷

中国农业出版社印刷厂印刷　　新华书店北京发行所发行
2002 年 8 月第 1 版　　2006 年 8 月第 2 版
2006 年 8 月第 2 版北京第 1 次印刷

开本：720mm×960mm　1/16　　印张：26.5
字数：479 千字
定价：33.80 元

编者名单

主　编　惠淑荣　李喜霞

副主编　王　倩　于　淼

　　　　董建国

参　编　陶桂洪　越培玉

　　　　宋　贽

主　审　张国伟

前　言

本教材是按照“高等农业院校高等数学教学大纲”，并在原高等农林牧水产院校教材《高等数学》的基础上重新组织编写的。

全书内容包括函数、极限与连续，导数与微分及其应用，积分及其应用，空间解析几何，二元函数的微积分及其应用，微分方程和无穷级数。同时，本教材还引进了 Mathematica 软件在高等数学中应用的内容，以便学生利用计算机解决高等数学的一些基本问题。为了便于学生检查自己的学习情况，全面复习和巩固每一章所学的内容，在每章后都附有自测题。

本教材在编写上有如下特点：

1. 教材中保留了极限的“$\varepsilon-\delta$”语言定义，也引入了朴素的极限概念，要求教学中在“$\varepsilon-\delta$”定义上尽量少花时间，以免在一开头就形成了“大头块”的极限论，让初学者望而生畏。

2. 在选材上突出数学理论应用的实际案例，这样使学生在学完基础的数学知识后，不但知道所学的数学知识有什么用，而且还知道怎样用。

3. 通过对数学软件 Mathematica 的引入，使学生知道怎样在计算机上实现数学的推导，计算，画图，怎样将自己的想法通过计算机去完成。

本教材由沈阳农业大学惠淑荣教授负责提出全书编写的整体思路。教材的理论部分由沈阳农业大学惠淑荣教授等同志编写，

Mathematica数学软件部分由沈阳农业大学刘强老师编写。

本教材的编写得到了编者所在院校同行们的大力支持和帮助，在此我们表示衷心的感谢。

限于编写水平和编写时间仓促，因而教材中一定存在不妥之处，敬请专家、读者批评指正。

编　者

2006年5月

目 录

第一章 1 函数、极限与连续

函数是高等数学研究的主要对象．所谓函数关系就是变量之间的依赖关系．极限方法则是研究变量的一种基本方法．本章在复习函数概念的基础上，着重介绍极限的概念、函数的连续性以及它们的一些性质．

第一节 函　　数

一、函数的概念

在观察自然现象或研究技术问题时，常常发现有几个变量在变化着，它们并不是孤立的，而是相互依赖、相互制约的．变量之间的确定性依赖关系，就称为**函数关系**．

定义　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集．如果存在一个对应法则 f，对于每个数 $x\in D$，变量 y 按此法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$．数集 D 叫做这个函数的**定义域**，x **叫做自变量**，y 叫做**因变量**．

当 x 取值 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$．当 x 取遍 D 的各个数值时，对应函数值的全体组成的数集 $w=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的**值域**．

函数 $y=f(x)$ 中表示对应关系的记号 f 也可改用其他字母，例如"φ"，"F"，等等．这时函数就记作 $y=\varphi(x)$，$y=F(x)$，等等．

如果自变量在定义域内任取一个数值时，对应的函数值总只有一个，这种函数叫做**单值函数**，否则叫做**多值函数**．例如，函数 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$，$x\in[-1,1]$，是多值函数．今后，若无特殊说明，所讨论的函数都是指单值函数．定义域和对应法则是函数的两个要素．函数可用表格、图像或解析式表示．

在用解析式表示的函数中,有时会遇到一个函数要用几个式子表示的情形.

例如,绝对值函数 $f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$,其定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$[0,+\infty)$,其图形如图 1-1 所示.

又如符号函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$$

其定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$\{-1,0,1\}$,其图形如图 1-2 所示.符号函数也可记作$y=\operatorname{sgn} x$.

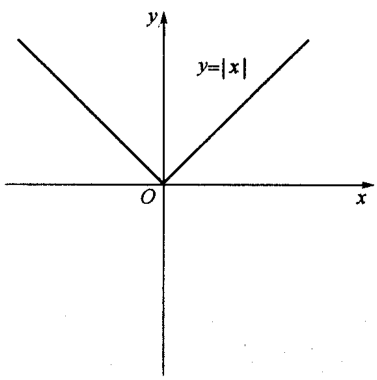

图 1-1

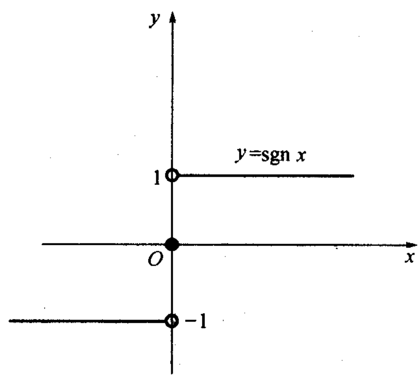

图 1-2

这种在定义域内的不同范围用不同的式子表示的一个函数,称为**分段函数**.

例 1 已知分段函数

$$y=f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1+x, & x>1,\end{cases}$$

试求(1)函数的定义域,值域;(2)$f\left(\frac{1}{2}\right)$,$f(1)$,$f(3)$;(3)画出函数的图形.

解 (1) 函数的定义域 $D=[0,+\infty)$,值域为$[0,+\infty)$;

(2) 因为$\frac{1}{2}\in[0,1]$,所以 $f\left(\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$;

因为 $1\in[0,1]$,所以 $f(1)=2\sqrt{1}=2$;

因为 $3\in(1,+\infty)$,所以 $f(3)=1+3=4$.

(3) 根据函数定义,在$[0,1]$上,函数的图形为曲线 $y=2\sqrt{x}$,在$(1,+\infty)$

上，函数的图形为直线 $y=1+x$，该函数图形如图 1-3 所示．

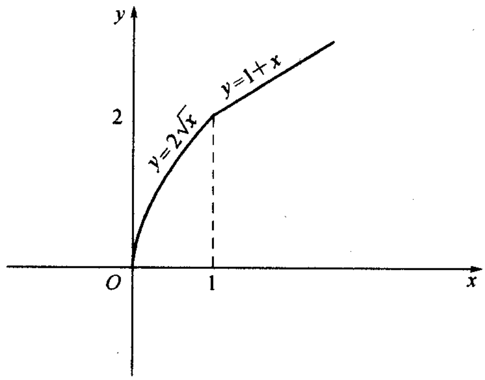

图 1-3

例 2 设 x 为任一实数，不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分，记作$[x]$，例如

$$\left[\frac{5}{7}\right]=0,[\sqrt{2}]=1,[\pi]=3,[-1]=-1,[-3.5]=-4.$$

把 x 看成变量，则函数 $y=[x]$的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $w=\mathbf{Z}$，图形为阶梯形曲线，如图 1-4 所示，在 x 为整数值处发生跳跃，跃度为 1，这函数称为取整函数．

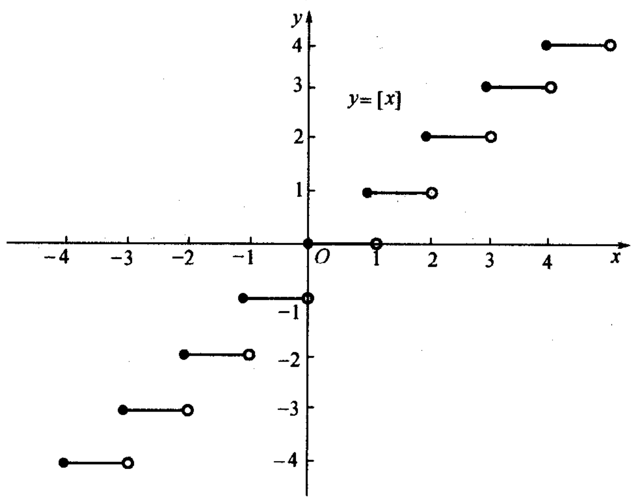

图 1-4

二、函数的几种特性

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $A\subset D$. 如果存在正数 M，使得对于一切 $x\in A$，有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 A 上**有界**. 如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 A 上**无界**；这就是说，如果对于任何正数 M，总存在 $x_1\in A$，使 $|f(x_1)|>M$，那么函数 $f(x)$ 在 A 上无界.

例如，函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界，因为存在正数 $M=1$，对于一切 $x\in(-\infty,+\infty)$，有 $|\sin x|\leqslant 1$. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 内无界，因为对于 $(0,1)$ 内的一切 x，能使 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$ 成立的 M 是不存在的. $f(x)$ 在 $(1,2)$ 内是有界的，因为可取正数 $M=1$，对于一切 $x\in(1,2)$，都有 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$.

有界函数的图形介于直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间.

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加**的，区间 I 为函数 $f(x)$ 的单调增区间；如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调减少**的，区间 I 为函数 $f(x)$ 的单调减区间.

例如，函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调增加，在区间 $(-\infty,0)$ 上单调减少，但在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内不是单调的.

3. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于坐标原点对称（即若 $x\in D$，则必有 $-x\in D$）. 如果对于任何 $x\in D$，恒有

$$f(-x)=f(x)$$

成立，则称 $f(x)$ 为**偶函数**. 如果对于任何 $x\in D$，恒有

$$f(-x)=-f(x)$$

成立，则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

例如，函数 $f(x)=x^2$ 是偶函数，函数 $f(x)=x^3$ 是奇函数.

又如，$f(x)=\sin x$ 是奇函数，函数 $f(x)=\cos x$ 是偶函数，函数 $f(x)=\sin x+\cos x$ 既非奇函数，也非偶函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于坐标原点对称.

4. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在不为零的数 T，使得对于任何 $x\in D$，有 $(x\pm T)\in D$ 且

$$f(x+T)=f(x)$$

恒成立，则称函数 $f(x)$ 为**周期函数**，T 称为函数 $f(x)$ 的**周期**. 通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.

例如，函数 $f(x)=\sin x$，$f(x)=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；函数 $f(x)=\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

以 T 为周期的周期函数，在定义域内每个长度为 T 的区间上，其图形有相同的形状.

三、反函数

对于函数 $y=f(x)$，如果把 y 看作自变量，x 看作因变量，且由 $y=f(x)$ 能够确定一个新的函数 $x=\varphi(y)$，则称这个新的函数为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，可记作 $x=f^{-1}(y)$；相对于反函数 $x=f^{-1}(y)$ 来说，$y=f(x)$ 称为直接函数.

函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图形是相同的. 但是，习惯上常以 x 表示自变量，y 表示因变量，于是 $x=f^{-1}(y)$ 按习惯表示为 $y=f^{-1}(x)$，因此，函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形在同一坐标平面上，关于直线 $y=x$ 对称.

单值函数 $y=f(x)$ 的反函数不一定是单值的，例如，函数 $y=x^2$，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[0,+\infty)$，其反函数为 $y=\pm\sqrt{x}$，是多值函数. 单调函数的反函数一定存在，且亦为单调函数.

四、基本初等函数

幂函数：$y=x^\mu$（μ 是实常数）；

指数函数：$y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）；

对数函数：$y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$），当 $a=\mathrm{e}$ 时，记作 $y=\ln x$；

三角函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$；

反三角函数：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\mathrm{arc}\cot x$.

以上这五类函数统称为**基本初等函数**．对这些函数的定义和性质，在中学数学里已有较详细的介绍，此处不再赘述．

五、复合函数、初等函数

1. 复合函数

设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，且 $u=\varphi(x)$ 的函数值的全部或部分在 $f(u)$ 的定义域内，则通过变量 u，y 就是 x 的函数，记为 $y=f[\varphi(x)]$，并称它为前两个函数的**复合函数**，u 称为**中间变量**．

例如，函数 $y=\arctan u$ 与 $u=x^2$ 可以复合成函数 $y=\arctan(x^2)$，这里 $u=x^2$ 的值域在 $y=\arctan u$ 的定义域内．又例如 $y=\ln u$ 与 $u=\sin x$ 可以复合成函数 $y=\ln\sin x$，这里 $u=\sin x$ 的值域的一部分在 $y=\ln u$ 的定义域内．

必须注意，并不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数．例如，$y=\arcsin u$ 及 $u=2+\sqrt{x}$ 就不能复合成一个复合函数，这是因为 u 的值域完全不在 $y=\arcsin u$ 的定义域内．

复合函数也可由两个以上的函数经过复合构成．复合过程中的每个函数都是基本初等函数，或者是由常数及基本初等函数经过有限次四则运算（加、减、乘、除）得到的表达式．

例 3 指出下列函数的复合过程．

(1) $y=\tan^2 x$； (2) $y=\mathrm{e}^{(x-1)^2}$； (3) $y=\ln\{\ln[\ln(x^4+1)]\}$.

解 (1) $y=u^2$，$u=\tan x$，u 为中间变量；

(2) $y=\mathrm{e}^u$，$u=v^2$，$v=x-1$，u、v 为中间变量；

(3) $y=\ln u$，$u=\ln v$，$v=\ln w$，$w=x^4+1$，u、v、w 为中间变量．

2. 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数，称为**初等函数**．

例如，$y=\sin x+\cos^3 x$，$y=|x|=\sqrt{x^2}$，$y=\dfrac{x+\sqrt{x^2}}{2x}=\begin{cases}1, x>0\\0, x<0\end{cases}$ 都是初等函数．

函数 $y=\operatorname{sgn} x$，$y=[x]$，$y=\begin{cases}x+1, x\leqslant 0\\x-1, x>0\end{cases}$ 都不是初等函数，它们也称为分段初等函数，或非初等函数．

* 六、经济学中常用的函数模型

用数学方法解决生命科学及经济学等实际问题时，首先要建立这个问题的函数模型，将实际问题中的各个变量之间的关系用数学表达式表示出来，也就是建立函数关系．然后对函数模型进行综合分析、研究，以达到解决问题的目的．

在经济分析中，常常需要对成本、价格、需求、收益、利润等经济量的关系进行研究．下面介绍一些经济学中常用的函数模型．

1. 需求函数

需求是指在一定的价格条件下，消费者愿意购买并且有支付能力购买的商品量．

消费者对某种商品的需求是由商品自身的价格、消费者的偏好、消费者的收入、信贷的成本和难度、收入分配、其他商品的价格等多种因素决定的，这里只研究需求与价格的关系．

如果用 p 表示商品价格，Q 表示需求量，则

$$Q = Q(p) \quad (p\text{ 为自变量},Q\text{ 为因变量}).$$

一般说来，商品价格低，需求量就大；商品价格高，需求量就小．因此，需求函数是价格的单调减少函数．

2. 供给函数

供给是指在一定的价格条件下，生产者愿意出售并且有可供出售的商品量．

供给也是由多种因素决定的，这里略去价格以外的其他因素，只研究供给与价格的关系．

如果用 p 表示商品价格，S 表示供给量，则

$$S = S(p) \quad (p\text{ 为自变量},S\text{ 为因变量}).$$

一般说来，商品价格低，生产者不愿意生产，供给就少；商品价格高，供给就多．因此，供给函数是价格的单调增加函数．

3. 均衡价格

均衡价格是指市场上需求量与供给量相等时的价格，此时的需求量（或供给量）称为**均衡商品量**（或**均衡数量**）．

例 4 设某商品的需求函数为 $Q=b-ap(a、b>0)$，供给函数为 $S=cp-d$ $(c、d>0)$，求均衡价格 $\bar{p}$ 和均衡商品量 $\overline{Q}$.

解 由
$$Q=S,$$
即
$$b-a\bar{p}=c\bar{p}-d,$$
解得均衡价格为 $\bar{p}=\dfrac{b+d}{a+c}$，均衡商品量为 $\overline{Q}=\dfrac{bc-ad}{a+c}$.

4. 成本函数

总成本是指生产一定数量的产品所需的全部经济资源投入(如厂房、设备、劳动力、原材料、能源等)的价格或费用总额．它由固定成本(如厂房、设备等)与可变成本(如原材料、能源等)组成．可见可变成本是产品数量的函数．

平均成本是指生产一定量产品时,平均每单位产品的成本．

若 C 为总成本,C_1 为固定成本,C_2 为可变成本,$\overline{C}$为平均成本,q 为产品数量,则有

总成本函数 $C=C(q)=C_1+C_2(q)$,

平均成本函数 $\overline{C}=\overline{C}(q)=\dfrac{C(q)}{q}$.

例 5 已知某商品的总成本函数为 $C=100+\dfrac{q^2}{4}$,求当 $q=10$ 时的总成本、平均成本．

解 由 $C=100+\dfrac{q^2}{4}$ 可得

$$\overline{C}=\frac{C(q)}{q}=\frac{100}{q}+\frac{q}{4}.$$

于是当 $q=10$ 时,总成本为 $C=100+\dfrac{10^2}{4}=125$,平均成本为 $\overline{C}=\dfrac{C(10)}{10}=12.5$.

5. 收益函数

总收益是消费者售出一定数量商品所得到的全部收入．它是销量与价格的乘积．

平均收益是消费者售出一定数量的商品时,平均每售出一个单位商品的收入,即销售一定数量商品时的单位商品的销售价格．

总收益、平均收益都是售出商品数量的函数．

若 P 为商品价格,q 为商品量,R 为总收益,$\overline{R}$ 为平均收益,则有

$R=R(q)=q\cdot P(q)$,

$\overline{R}=\overline{R}(q)=\dfrac{R(q)}{q}=\dfrac{q\cdot P(q)}{q}=P(q)$.

例 6 设某产品的价格与销售量的关系为 $P=10-\dfrac{q}{5}$,求销售量为 30 时的总收益、平均收益．

解 $R(q)=qP(q)=10q-\dfrac{q^2}{5}$, $R(30)=120$,

$\overline{R}(q)=P(q)=10-\dfrac{q}{5}$, $\overline{R}(30)=4$.