全国奥数总领队担纲　金牌教练倾力打造

CHUZHONG SHUXUE JINGSAI PEIYOU JIAOCHENG

初中数学竞赛培优教程

（基础知识）

李胜宏　马茂年　主编

浙江大學出版社

初中数学竞赛培优教程

（基础知识）

李胜宏　马茂年　主编

浙江大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

初中数学竞赛培优教程. 基础知识 / 李胜宏，马茂年主编. 一杭州：浙江大学出版社，2004.1
ISBN 7-308-03569-7

Ⅰ.初... Ⅱ.①李... ②马... Ⅲ.数学课-初中-教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 115032 号

出版发行 浙江大学出版社
(杭州浙大路 38 号 邮政编码 310027)
(E-mail:zupress@mail.hz.zj.cn)
(网址:http://www.zjupress.com)
责任编辑 杨晓鸣 王同裕
排　　版 浙江大学出版社电脑排版中心
印　　刷 浙江省上虞印刷厂
开　　本 787mm×960mm 1/16
印　　张 18.5
字　　数 385 千字
版 印 次 2004 年 1 月第 1 版 2006 年 1 月第 6 次印刷
印　　数 26001—29000
书　　号 ISBN 7-308-03569-7/·669
定　　价 23.00 元

前　言

近年来,在国际数学奥林匹克竞赛(IMO)中,我国选手频频取得优异成绩,在国内外产生了极大反响。国际数学奥林匹克竞赛吸引着越来越多的师生参与,全国各种层次的数学竞赛活动空前活跃。为了满足广大师生开展课外活动的需要,我们编写了这套初中数学竞赛培优教程丛书,包括基础知识、专题讲座和全真模拟三个分册。

本套丛书就是为了提高学生数学能力,为学生适应初中数学奥林匹克竞赛活动而编写的普及性辅助读物。其主要优点:一是"竞赛",二是"同步"。所谓"竞赛"是指在内容的选取上和处理方法上具有趣味性、启发性、技巧性和拓广性,并特别注重创新能力的培养;所谓"同步"主要是指内容选取的基础性以及内容安排上与教学进度基本一致,使用时可灵活取舍其中的内容,也可提前或错后讲解使用。

本丛书博采众长,独具匠心,有的放矢,注重实效,值得学生认真读,认真用,认真练。

考试和竞赛命题的核心是理解和驾驭知识的能力。近年来,加强理解和驾驭知识能力的考查,正是中考、高考、竞赛命题展示给人们的一条清晰的思路。本丛书则把这条思路具体化为一条清晰的分析训练思路,这样的编写指导思想是产生精品的保障。

仔细品味,这套丛书还具有以下几个突出的特点:

第一、知识体例新

首先是赛题目标和知识编排新,本丛书以最新教改精神为依据,以现行初中新课标为蓝本编写;其次是对赛题体例编排新,紧扣教材和初中数学竞赛大纲,步步推进、设题解题、释疑解难、迁移延伸、逐层深入;其三是题型(材料)新,书中选用题型(材料)都是按中考、竞赛要求精心设计的,令读者耳目一新。

第二、解题方法细

首先是对赛题讲解细致入微；其次是重点、难点详细讲析，既有解题过程又有思路点拨；再次是解题方法细，一题多解，多题一法变通训练，总结规律；最后从基本知识入手，能力训练序列化。

第三、内容讲解精

首先是对竞赛内容讲解精，真正体现围绕重点，突破难点，引发思考，启迪思维，根据赛点要求，巧设问题，精讲精练，使学生举一反三，触类旁通；其次是练习配置精，注重典型性，避免随意性，注重迁移性，避免孤立性，实现由知识到能力的过渡。

第四、大纲研究透

首先是对竞赛大纲研究透彻，居高临下把握知识，立足于教材，又不拘泥于教材；其次是对学生知识储备研究得透，学习目标科学可行，注重知识“点”与“面”的联系，“教”与“学”的联系；再次是对问题讲解透彻，一题多问，一题多解，培养求异思维和创新思维能力。

第五、课外知识全

首先是知识分布全面，真正体现了“一套在手，学习内容全有”的编写指导思想；其次是本丛书的信息量大，涵盖了初中数学课程全部内容和教与学的全部过程，内容丰富，题量充足，融入各种新颖题型，补充了各类具有知识性和人文性的课外知识；再次是适用对象全面，着眼于全国重点、普通中学的所有初中学生，内容由浅入深，由易到难。

只有适合的，才是最好的，您的关注是我们的期盼，您的满意是我们的欣慰。尽管我们在成书过程中，本着近乎苛刻的态度，题题推敲，层层把关，力求能够帮助读者更好地把握丛书的脉络和精华，但丛书中也难免有疏忽和纰漏之处。检验本丛书质量的惟一标准是广大师生使用本丛书的实践，作为教研领域的最新成果，我们期盼它的社会效益，也诚挚地希望广大师生的批评指正。

数学竞赛虽然有一定难度，但奥林匹克竞赛金牌也不是高不可攀的，也许本丛书会为你摘取金牌作好铺垫。让我们共同努力，在数学的奇妙天地中去体味数学，学习数学，开垦数学。

本书由全国数学奥林匹克竞赛总领队李胜宏教授和金牌教练马茂年主编。

目　录

一、丰富的图形世界

【赛点目标】

1. 了解和掌握几何概念，抓住定义中的关键词语，确切地理解几何概念的本质属性.

2. 掌握概念之间的区别与联系，注意把概念的文字语言、符号语言和图形有机地结合起来，全方位地掌握几何概念.

3. 掌握识图和画图的基本技能，能用几何语言准确、简练地表述.

4. 认识几何图形的研究对象及研究方法，从对数、式的运算逐步转变到用逻辑推理的方法对几何图形的性质进行论证.

5. 了解几何图形的展开与折叠，以及从不同方向看几何图形.

【方法述要】

1. 掌握求线段的总条数的方法.

2. 掌握求三角形的总个数的方法.

3. 掌握求正方形的总个数的方法.

4. 掌握求一些特殊图形的总个数的方法.

5. 掌握立体图形的视图方法，以及展开和折叠.

【赛题精讲】

例 1 数出下图1-1中线段的总条数.

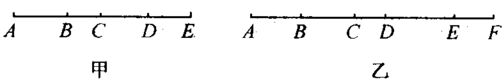


图 1-1

解 图甲中的线段上共有 4 条基本线段 AB, BC, CD, DE；

由两条基本线段组成的线段有 3 条：AC, BD, CE；

由三条基本线段组成的线段有 2 条：AD, BE；

由四条基本线段组成的线段有 1 条：AE.

所以，图甲中线段的总条数是 $4+3+2+1=10$.

用同样的方法，我们可以求得图乙中线段的总条数是

$$5+4+3+2+1=15.$$

说明 从上面的例子,不难发现,线段的总条数与线段上的点数有关,正好等于从1开始的几个连续自然数的和,最后一个加数是线段上总点数减1.如果线段上的点数是 n,那么线段的总条数是 $1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)$.

我们利用公式 $(n+1)^2=n^2+2n+1$(n 是自然数),求前 n 个自然数的和,令 $n=1,2,3,\cdots,n$,则

$$2^2=1^2+2\times1+1$$
$$3^2=2^2+2\times2+1$$
$$4^2=3^2+2\times3+1$$
$$5^2=4^2+2\times4+1$$
$$\cdots\cdots$$
$$(n+1)^2=n^2+2n+1$$

以上各式左右分别相加可得 $(n+1)^2=1+2(1+2+3+4+\cdots+n)+n$.

所以 $1+2+3+4+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$,

显然 $1+2+3+\cdots+(n-1)=\dfrac{(n-1)(n-1+1)}{2}=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

例 2 数出下图1-2中三角形的总个数.

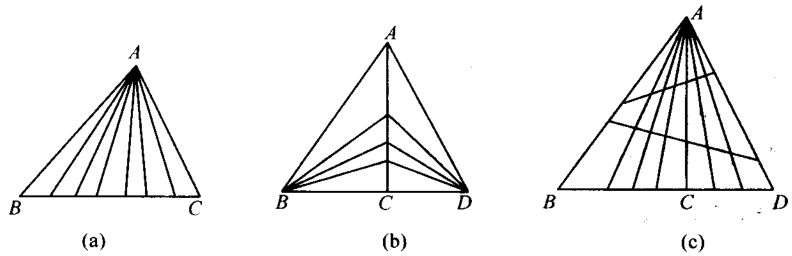


图 1-2

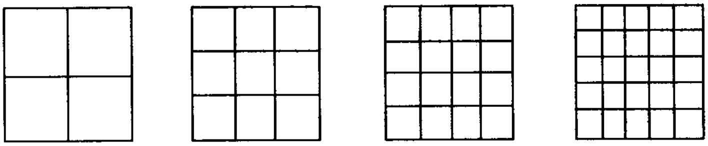
解 数三角形的总个数的规律与数线段方法类似,如图 1-2(a),三角形的总个数为 $1+2+3+4+\cdots+7=\dfrac{7(7+1)}{2}=28$.

图 1-2(b)是一个复合图形,可采用分类的方法去数:

先看在△ABC 中三角形的个数,应为 $1+2+3+4=10$ 个,显然在△ACD 中也应有 10 个三角形.另外,以 BD 为底边的三角形有 4 个.因此共有 $10+10+4=24$ 个三角形.

请读者数出图 1-2(c)中三角形的个数.

例 3 数出下图1-3中正方形的总个数.



(1) (2) (3) (4)

图 1-3

解 为方便起见,假设每个小方格的边长为 1 个单位,并称为基本线段.

在(1)中,每边有两条基本线段,所以长为 1 个长度单位的正方形有 $2\times2=4$(个),边长为 2 个长度单位的正方形有 $1\times1=1$(个),即 $1\times1+2\times2=1^2+2^2=5$(个).

在(2)中,每边有 3 条基本线段,有 2 条 2 个长度单位的线段,有 1 条 3 个长度单位的线段,所以边长为 1 个长度单位的正方形有 $3\times3=9$(个),边长为 2 个长度单位的正方形有 $2\times2=4$(个),边长为 3 个长度单位的正方形有 $1\times1=1$(个),即 $1\times1+2\times2+3\times3=1^2+2^2+3^2=14$(个).

在(3)中,$1^2+2^2+3^2+4^2=30$(个).

在(4)中,$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=55$(个).

说明 如果一个正方形各边上都有 n 个相等的小格,那么正方形总数为

$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2$.

我们利用乘法公式 $(n+1)^3=n^3+3n^2+3n+1$ 来计算前 n 个自然数的平方和,令 $n=1,2,3,\cdots,n$,则

$$
\begin{aligned}
2^3&=1^3+3\times1^2+3\times1+1\\
3^3&=2^3+3\times2^2+3\times2+1\\
4^3&=3^3+3\times3^2+3\times3+1\\
5^3&=4^3+3\times4^2+3\times4+1\\
&\cdots\cdots\\
(n+1)^3&=n^3+3n^2+3n+1
\end{aligned}
$$

以上各式分别左右相加可得

$(n+1)^3=1+3(1^2+2^2+\cdots+n^2)+3(1+2+3+\cdots+n)+n$,

所以 $(n+1)^3=1+3(1^2+2^2+\cdots+n^2)+3\times\dfrac{n(n+1)}{2}+n$.

因此 $1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

例 4 图1-4所示,平面上有 16 个点,在每个点上钉上钉子,如以这些钉子为顶点,用线把它们围起来,你能围出几个正方形?

解 这个问题与前面数正方形个数是不同的.这个问题的正方形的边不是先画好

的，而是要我们自己去定．我们知道，正方形是四个角都是直角，四条边都相等的四边形．所以，只要四个顶点选得好，就可用线围出一个正方形来．

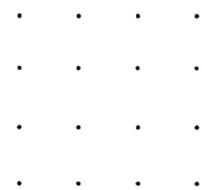


图 1-4

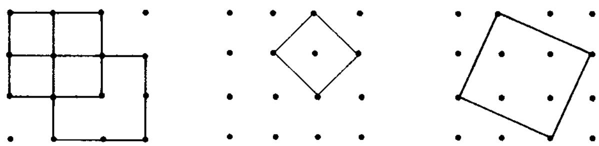
很明显，我们能围出 14 个图 1-5 甲那样的正向的正方形．

除此以外，我们还能围出如图 1-5 乙和图 1-5 丙所示的斜向正方形来，但不能围出更小或更大的斜向正方形．

图 1-5 乙中所示的斜向正方形有 4 个；

图 1-5 丙中所示的斜向正方形有 2 个．

即可围出 4+2 个斜向正方形，因此，在图 1-4 中共可围出 14+6=20 个正方形．



甲　　乙　　丙

图 1-5

说明　我们可以知道，有以下结果．

顶　点　数	2×2	3×3	4×4	5×5
正向正方形	1	5	14	30
斜向正方形	0	1	6	20
正方形总数	1	6	20	50

细心的同学不难从表中发现如下规律，对于 $n\times n$ 个顶点，可作出斜向正方形的个数恰好等于 $(n-1)\times(n-1)$ 个顶点时的正方形总数．

一般地，对于 $n\times n$ 个顶点可围出多少个正方形的问题，我们可以分别计算出正方形和斜向正方形的个数，再求其总和．

例 5　请数出图1-6所示的正五边形 $ABCDE$ 中三角形的个数．

解　在正五边形 $ABCDE$ 中，根据三角形的形状和大小可分如下六类：

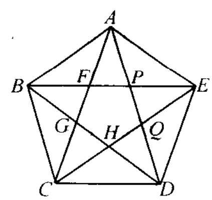


图 1-6

如$\triangle ABE$ 的有 5 个；

如$\triangle ABP$ 的有 10 个；

如$\triangle ABF$ 的有 5 个；

如$\triangle AFP$ 的有 5 个；

如$\triangle ACD$ 的有 5 个；

如△AGD 的有 5 个.

所以,图中共有 35 个三角形.

数几何图形的个数,关键是不要遗漏,也不要重数.

例 6　在三个圆 A,B,C 中分别有 13,17,18 个点,同时在圆 A 和 B 中有 4 个点,同时在圆 A 和 C 中有 7 个点,同时在圆 B 和 C 中有 5 个点,同时在三个圆中有 2 个点.你能回答在三个圆中共有几个点吗?

解　要正确回答这个问题,必须注意那些同时在两个圆和同时三个圆中的点.

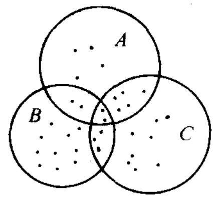


图 1-7

如图 1-7,如果把 A,B,C 三圆内的点数相加,那么,同时在两圆内的点数重复计算了一次,应当减去,但减去后,同时在三圆的那些点数又被多减了一次,应加回去.因此,例 6 的解法应该是:

点的总数 = A 中的点数 + B 中的点数 + C 中的点数 − 同时在 A 和 B 中的点数 − 同时在 A 和 C 中的点数 − 同时在 B 和 C 中的点数 + 同时在三个圆中的点数

$= 13 + 17 + 18 - 4 - 7 - 5 + 2 = 34$(个).

说明　这种方法叫做"容斥原理",这也是几何计数时常用的一种方法,它也常常被应用在求几何图形的面积.

例 7　如图1-8所示,哪些图形经过折叠可以围成一个棱柱?先想一想,再折一折.

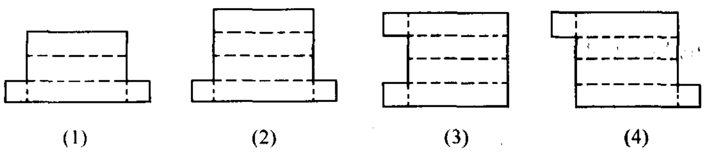


图 1-8

分析　先想一想,是对学生空间想像能力的更高要求.但也不能忽视折一折的作用,它可以作为验证想像或辅助发现结论的方法.

解　(2)、(4)可以围成一个棱柱.

说明　先想像一下,再动手操作 ,再回想一下操作的过程,是培养学生空间观念的重要环节.

例 8　圆周上6点中的任意 3 点为顶点连成三角形,问一共可以连成几个不同的三角形.

解　如图 1-9 所示,一共可连成的三角形有△ABC,△ABD,△ABE,△ABF,△ACD,△ACE,△ACF,△ADE,△ADF,△AEF,△BCD,△BCE,△BCF,△BDE,△BDF,△BEF,△CDE,△CDF,△CEF,△DEF.

所以共有 20 个不同的三角形.

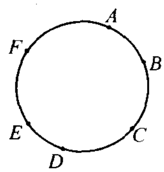


图 1-9

例 9 一块2×2的方格由 1×1 的方格构成，每个小方格涂上红、绿两种颜色之一，如果要求绿色方格的上方和右方不能与红色方格邻接，且上述四个小方格可以全部不涂绿色，也可全部涂上绿色，则可能的涂色方法有几种.

解 如果某方格被涂上绿色，那么，它的上方和右方方格也只能涂上绿色，因此，符合题目要求的涂色方法有：

$(1)\begin{bmatrix}\text{红} & \text{红}\\ \text{绿} & \text{绿}\end{bmatrix}$； $(2)\begin{bmatrix}\text{红} & \text{绿}\\ \text{红} & \text{红}\end{bmatrix}$； $(3)\begin{bmatrix}\text{红} & \text{绿}\\ \text{红} & \text{绿}\end{bmatrix}$；

$(4)\begin{bmatrix}\text{绿} & \text{绿}\\ \text{红} & \text{红}\end{bmatrix}$； $(5)\begin{bmatrix}\text{绿} & \text{绿}\\ \text{红} & \text{绿}\end{bmatrix}$； $(6)\begin{bmatrix}\text{绿} & \text{绿}\\ \text{绿} & \text{绿}\end{bmatrix}$.

所以，共有 6 种涂色方法.

说明 这里用到的方法叫枚举法.枚举法是最简单、最原始的一种计数方法，在计算时要求把计数的所有对象一一列举出来，以求得总数，在计数时要做到准确，即不重复，又不遗漏.

例 10 数出图1-10中长方体(包括正方体)的个数.

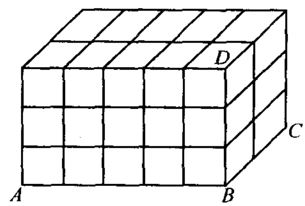


图 1-10

解 长方体的长 AB 棱上共有线段：$\dfrac{6\times5}{2}=15$ 条.

长方体的宽 BC 棱上共有线段：$\dfrac{3\times2}{2}=3$ 条.

而长方体的高 BC 棱共有线段：$\dfrac{4\times3}{2}=6$ 条.

$15\times3\times6=270$ 个.

因此，图中共有长方体 270 个.

例 11 如图1-11，一只甲虫从 A 点出发，沿图中线段爬到 F 点，如果爬行时，同一个点或同一条线段只能经过一次，那么这只甲虫最多有多少种不同的爬行方法？

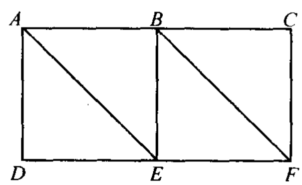


图 1-11

解 从 A 点出发，有三条路可走：AB，AE，AD.因此，可以分成三类计算不同的爬法数：

沿 AB 出发：
$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & & F & \\ A \arrow[r] & B \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & E \arrow[r] & F \\ & & C \arrow[r] & F\end{tikzcd}$$
，共有 3 种爬法；

沿 AE 出发：
$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & & F & & \\ A \arrow[r] & E \arrow[ur] \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[dr] & F & \\ & & & C \arrow[r] & F\end{tikzcd}$$
，共有 3 种爬法；

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad\quad\ \nearrow F \\ \text{沿 } AD \text{ 出发：} A\to D\to E\to B\to F \\ \qquad\qquad\qquad\quad\ \searrow C\to F \end{array}$$ ，共有 3 种爬法.

所以，最多有 9 种不同的爬法.

说明 本例中所用的图叫树形图，运用这种方法，形象直观，有条理，不易重复或遗漏，使人一目了然.

例 12 如图1-12(a)，将 8 个相同的正方形，重叠拼合在一起(要求 8 个正方形各有一对角线重合在一直线上)，问能否使出现的正方形总数超过 100 个？

(a) (b)

图 1-12

解 如图 1-12(b)所示，把 7 个正方形左侧的一个顶点摆在第一个正方形对角线八等分点上，且不妨设该正方形对角线的长为 1.

(1)上下两方的正方形：

以$\frac{1}{8}$为边长的有 $(1+2+3+4+5+6)\times 2=42$ 个；

以$\frac{2}{8}$为边长的有 $(1+2+3+4)\times 2=20$ 个；

以$\frac{3}{8}$为边长的有 $(1+2)\times 2=6$(个)；

(2)对角线位于同一直线上的正方形：

以$\frac{1}{8}$为边长的有 1 个； 以$\frac{2}{8}$为边长的有 2 个； 以$\frac{3}{8}$为边长的有 3 个； 以$\frac{4}{8}$为边长的有 4 个； 以$\frac{5}{8}$为边长的有 5 个； 以$\frac{6}{8}$为边长的有 6 个； 以$\frac{7}{8}$为边长的有 7 个； 以 1 为边长的有 8 个；

综合(1)，(2)图中共有正方形

$42+20+6+(1+2+3+4+5+6+7+8)=104$ 个超过 100 个，故满足题设要求的正方形超过 100 个.

【能力训练】

1. 下列图形中经折叠后可以变为一个棱柱的有(　　)

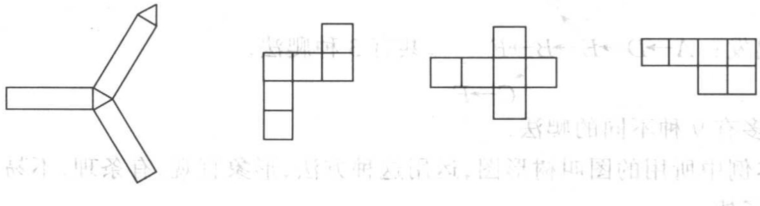


图 1-13

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

2. 如图 1-14 所示的立方体，如果把它展开，可以是下列图形中的(　　)

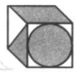
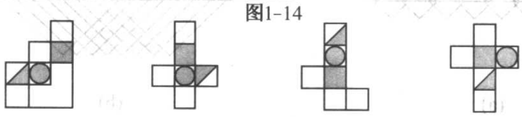


图1-14



(A)　　(B)　　(C)　　(D)

3. 图 1-15 中有多少个立方体？

4. 图 1-16 是由小立方块搭成的几何体的俯视图，小正方形的数字表示在该位置的小立方块的个数，再根据左视图所提供的信息，确定 x 和 y 的值，并画出主视图.

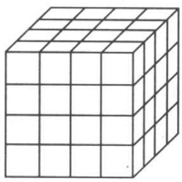


图 1-15

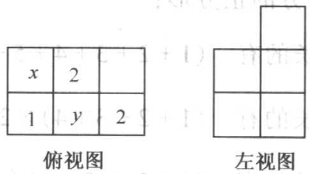


图 1-16

5. 在正方形方格纸上有 20 个点，其分布如图 1-17 所示，现用 4 个点作为正方形的 4 个顶点. 这样共可作出多少个正方形？

6. A，B，C 三个正方形纸片放在桌子，共占面积 48 平方厘米，已知 A 的面积为 25 平方厘米，B 的面积为 15 平方厘米，C 的面积为 30 平方厘米，A 与 B，B 与 C，C 与 A 的公共部分的面积分别为 8，6，10 平方厘米，求 A，B，C 公共部分的面积.

图 1-17

7. 有 9 个小块堆成如 1-18 所示的样子，这个堆的表面包含小方块表面的数目有几个？

8. 图 1-19 中一共能数出几个长方形(正方形也算长方形).

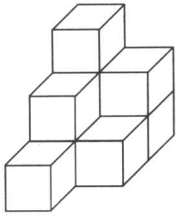


图 1-18

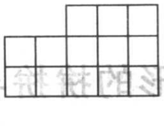


图 1-19

9.如图 1-20 是一个立方块所搭几何体的俯视图,正方形中的数字表示在该位置小立方块的个数,请你画出它的正视图和左视图.

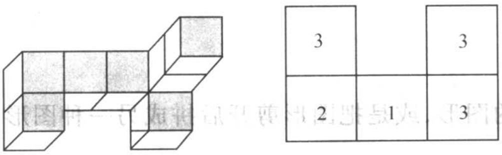


图 1-20

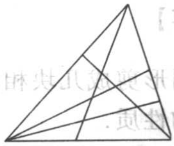


图1-21

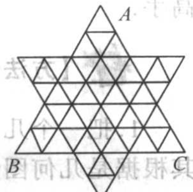


图1-22

10.图 1-22 中共有多少个三角形?

11.(1)图 1-23 中 8 条直线最多能把平面分成多少部分?

(2)图 1-24 中平面上 5 个圆最多能把平面分成多少个部分?

12.如图 1-25 中从 A 到 B(往东,北或东北三种方向)有几条不同路径(阴影部分不能进入).

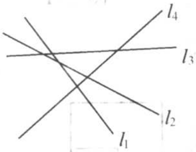


图 1-23

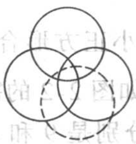


图 1-24

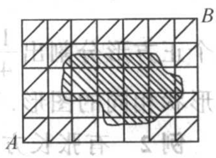


图 1-25

二、图形的拼拼与凑凑

【赛点目标】

1.拼图游戏历史悠久,它可以拼成各种各样的有趣几何图形,例如大家熟悉的七巧板.

2.图形中拚拚凑凑,画画做做有着广泛的应用,例如裁缝师傅便是这种拼拼凑凑的高手.

【方法述要】

1.把一个几何图形剪成几块相同形状的图形,或是把图形剪开后拼成另一种图形.其根据是几何图形的性质.

2.有些几何问题,看上去似乎很复杂,如果我们动手去做一做,用笔去画一画,发现并不困难.几何图形问题需要我们去动手操作.

【赛题精讲】

例 1 图2-1所示是由三个正方形组成的图形,请把它们分成四个形状、大小都相同的图形.

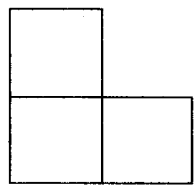


图 2-1

解 可以先不考虑形状,而考虑面积,要把三个正方形"分"成四个面积相等的部分,每部分面积应是正方形的面积的$\frac{3}{4}$,这就需要将每个正方形分割出$\frac{1}{4}$来,再把三个$\frac{1}{4}$小正方形合成一个与$\frac{3}{4}$个正方形形状相同的图形.于是我们就有了如图 2-2 的割法.

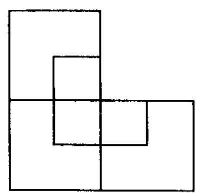


图 2-2

例 2 有张长方形纸片,长和宽分别是 9 和 4 厘米,请将它剪成两个形状、大小都相同的部分,并拼成一个正方形.

解 已知长方形的面积为 $9\times4=36$(平方厘米),所以正方形的边长为 6 厘米,因此可以把长方形上半部剪下 6 厘米下半部剪下 3 厘米,分成相等的两块,合起来正好拼成边长为 6 厘米的正方形,如图 2-3.

说明 我们看到,要正确地剪、拼,除了注意图形的特点外,还要根据已知条件去计算、去分析.