

学习新坐标书系

CHUANG XINSIWEI

创新思维

初三 数学

依据 2000 年最新修订的教学大纲编写
思维训练与生活实际相结合
激发创新意识提高应用能力

吉林教育出版社

学习新坐标书系

创新思维

初三数学

主编 马宝昌

鄂奕津

ANGXINS
JANGXINSI
UANGXINSIV
.HUANGXINSIW.
.CHUANGXINSIWE.
-ICHUANGXINSIWEI
EICHUANGXINSIWEI
WEICHUANGXINSIWEI
SWEICHUANGXINSIWEI
NSWEICHUANGXINSIWEI
.INSIWEICHUANGXINSIWEI
GXINSIWEICHUANGXINSIWEI
NGXINSIWEICHUANGXINSIWEI
ANGXINSIWEICHUANGXINSIWEI
JANGXINSIWEICHUANGXINSIWEI
UANGXINSIWEICHUANGXINSIWEI
HUANGXINSIWEICHUANGXINSIWEI
VEICHUANGXINSIWEI
VEICHUANGXINSIWEI
VEICHUANGXINSIWEI

图书在版编目 (CIP) 数据

创新思维·初三数学/马宝昌主编. —长春:吉林教育出版社, 2000.7
(学习新坐标书系)
ISBN 7-5383-4108-0

I. 创... II. 马... III. 数学课 - 初中 - 教学参考资料
IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2000) 第 33595 号

责任编辑:徐 谦

封面设计:赵 君

出版:吉林教育出版社 (长春市同志街 55 号 邮编:130021)
发行:吉林教育出版社
印刷:长春市第九印刷厂

开本: 850×1168 毫米 1/32	印张: 10.75	字数: 243 千字
版次: 2000 年 7 月第 1 版	2000 年 7 月第 1 次印刷	
印数: 1—10 000 册	定价: 12.00 元	

目 录

代数同步部分

第十二章 一元二次方程	(1)
第一单元 一元二次方程	(1)
第二单元 可化为一元二次方程的分式方程和无理方程	(12)
第三单元 二元二次方程组	(24)
第十三章 函数及其图像	(39)
第一单元 正比例函数、一次函数	(39)
第二单元 二次函数、反比例函数	(56)
第十四章 统计初步	(82)

代数专题部分

专题一 求证 M 、 N 是一元二次方程的两个根	(88)
专题二 与求二次函数解析式有关的问题	(92)
专题三 构造一次函数及反比例函数	(97)
专题四 构造二次函数	(102)
专题五 需要判断结论的题目	(109)

几何同步部分

第六章 解直角三角形	(115)
第一单元 锐角三角函数	(115)
第二单元 解直角三角形	(126)
第七章 圆	(139)
第一单元 圆的有关性质	(139)
第二单元 直线与圆的位置关系	(160)

第三单元 圆和圆的位置关系	(194)
第四单元 正多边形和圆	(216)

几何专题部分

专题一 证线段、角相等与倍分	(229)
专题二 证两线平行与垂直	(234)
专题三 证线段的比例式和等积式	(238)
专题四 折纸问题	(243)
专题五 几何定值问题	(247)

综合部分	(253)
------------	-------

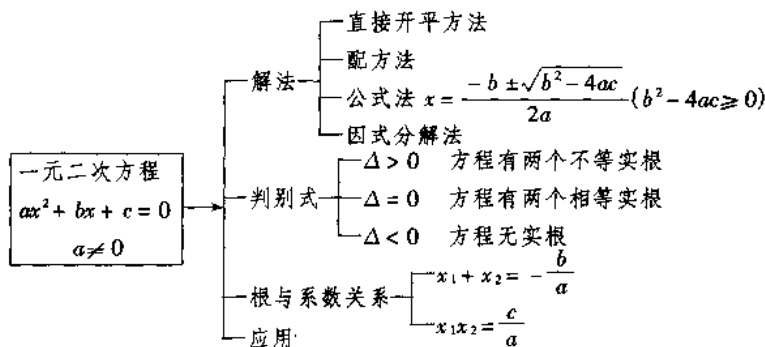
参考答案	(272)
------------	-------

代数同步部分

第十二章 一元二次方程

第一单元 一元二次方程

梳理知识 建立网络



创新思维 灵活运用

【同源题】

例1 已知方程 $x^2 + 2x = k - 1$ 无实根，求证方程 $x^2 + kx = 1 - 2k$ 一定有两个不相等的实数根。

□分析 一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 是判断一元二次方程根的情况的重要依据。

当 $b^2 - 4ac > 0$ 时，方程有两个不相等的实数根；当 $b^2 - 4ac = 0$ 时，方程有两个相等的实数根；当 $b^2 - 4ac < 0$ 时，方程没有实数根。

因此，本题的条件 $x^2 + 2x = k - 1$ 无实数根，就是说 $b^2 - 4ac < 0$ ，这样就可以求出 k 的范围。注意在使用判别式时，要把方程化成一般形式。

求出 k 的取值范围后, 要证 $x^2 + kx = 1 - 2k$ 一定有两个不相等的实数根, 那么再证这个方程的判别式一定大于零就可以了.

□**解题** 方程 $x^2 + 2x = k - 1$ 可化为 $x^2 + 2x - k + 1 = 0$,

由方程无实根, 则 $\Delta_1 = 2^2 - 4(-k + 1) < 0$, $\therefore k < 0$.

而方程 $x^2 + kx = 1 - 2k$ 可化为 $x^2 + kx + 2k - 1 = 0$,

则 $\Delta_2 = k^2 - 4(2k - 1) = k^2 - 8k + 4$,

当 $k < 0$ 时, $k^2 > 0$, $-8k > 0$, $\therefore k^2 - 8k + 4 > 0$, 即 $\Delta_2 > 0$.

$\therefore$ 方程 $x^2 + kx = 1 - 2k$ 一定有两个不相等的实根.

□**同源** 一元二次方程根的判别式在判别方程的根的情况时, 非常有用, 类似的题目有:

(1) m 为何值时, 方程 $(m+1)x^2 - 4mx + 4m - 2 = 0$ 有两个不相等的实数根.

(2) 若关于 x 的一元二次方程 $mx^2 + mx + 5 = m$ 有两个相等的实根, 求 m 的值.

(3) 已知关于 x 的一元二次方程 $5x^2 - 2\sqrt{6}px + 5q = 0$ ($p \neq 0$) 有两个相等的实数根, 求证方程 $x^2 + px + q = 0$ 有两个不相等的实数根.

例2 已知: 关于 x 的方程 $x^2 + 3x - m = 0$ 的两个实数根的平方和等于 11.

求证: 关于 x 的方程 $(k-3)x^2 + kmx - m^2 + 6m - 4 = 0$ 有实数根.

□**分析** 一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的两个实根为 x_1 、 x_2 , 则必满足如下三个条件:

(1) 有两个实根, 则 $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$.

(2) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$.

(3) $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

本题中还有一个条件就是两个实数根的平方和等于 11, 则 $x_1^2 + x_2^2 = 11$.

由上述关系就能求出 m 的值, 从而可以化简要证的方程, 再去证明这个方程的判别式大于等于零就可以了.

□解题 设方程①, $x^2 + 3x - m = 0$ 的两个实数根是 x_1, x_2 , 根据题意, 得

$$\begin{cases} \Delta_1 = 9 + 4m \geq 0, \\ x_1 + x_2 = -3, \\ x_1 \cdot x_2 = -m, \\ x_1^2 + x_2^2 = 11. \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} m \geq -\frac{9}{4}, \\ m = 1. \end{cases} \quad \therefore m = 1.$$

把 $m = 1$ 代入方程② $(k-3)x^2 + kmx - m^2 + 6m - 4 = 0$ 中,

得 $(k-3)x^2 + kx + 1 = 0$.

当 $k-3=0$, 即 $k=3$ 时, 方程②是一元一次方程,

$\therefore$ 当 $m=1$ 且 $k=3$ 时, 方程②有实数根, $x = -\frac{1}{3}$.

当 $k-3 \neq 0$, 即 $k \neq 3$ 时, 方程②是一元二次方程,

$\therefore \Delta_2 = k^2 - 4(k-3) = (k-2)^2 + 8 > 0$,

$\therefore$ 当 $m=1$ 且 $k \neq 3$ 时, 方程②有两个不相等的实数根.

综上所述, 当方程①的两个实数根的平方和等于 11 时, 方程②有实数根.

□同源 应用一元二次方程根与系数关系解的题目多种多样, 以下几题各有特色.

(1) 关于 x 的方程 $x^2 + (2m-3)x + m^2 + 6 = 0$ 的两实根之积是两实根之和的 2 倍, 求 m 的值.

(2) 已知: 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (m^2+3)x + \frac{1}{2}(m^2+2) = 0$.

①试证: 无论 m 取任何实数, 方程有两个正根;

②设 x_1, x_2 为方程的两根, 且满足 $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = \frac{17}{2}$, 求 m 的值.

(3) 关于 x 的方程 $x^2 - mx - \frac{3}{4}m - 1 = 0$, ①

与 $2x^2 - (m+6)x - m^2 + 4 = 0$ ②

若方程①的两个实数根的平方和等于方程②的一个整数根, 求 m 的值.

(4) 已知: 关于 x 的方程 $x^2 - 2mx + \frac{1}{4}n^2 = 0$, 其中 m 、 n 分别是一个等腰三角形的腰与底边的长.

①求证: 这个方程有两个不相等的实根;

②若方程两实根的差的绝对值是 8, 并且等腰三角形的面积是 12, 求这个三角形的内切圆的面积.

例 3 当 m 是什么值时, 关于 x 的方程 $x^2 - 4x + 3m + 1 = 0$ 有两个不相等的正实根?

□分析 (1) 当 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, 且 $\frac{c}{a} > 0$, $-\frac{b}{a} > 0$ 时, 方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根都是正数.

(2) 当 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, 且 $\frac{c}{a} > 0$, $-\frac{b}{a} < 0$ 时, 方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根都是负数.

(3) 当 $\frac{c}{a} < 0$ 时, 方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根异号.

(4) 当 $\frac{c}{a} < 0$, $-\frac{b}{a} > 0$ 时, 方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根异号且正根的绝对值较大.

(5) 当 $\frac{c}{a} < 0$, $-\frac{b}{a} < 0$ 时, 方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根异号且负根的绝对值较大.

(6) 当 $c = 0$ 时, 方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有一个根为 0.

□解题 设方程的两实根为 x_1 、 x_2 ,

$$\therefore \begin{cases} \Delta = b^2 - 4ac > 0, \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0, \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} > 0. \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} (-4)^2 - 4(3m-1) > 0, \\ 4 > 0, \\ 3m+1 > 0. \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} m < 1, \\ m > -\frac{1}{3}. \end{cases} \quad \text{即} -\frac{1}{3} < m < 1.$$

$\therefore$ 当 $-\frac{1}{3} < m < 1$ 时, 原方程有两个不相等的正实根.

□同源 根据上面的分析可解以下题目:

(1) 当 k 是什么整数时, 方程 $(k^2-1)x^2-6(3k-1)x+72=0$ 有两个不相等的正整数根?

(2) m 为何整数时, 关于 x 的方程 $3x^2+6x+m=0$ 有两个负实根?

(3) 已知: 关于 x 的方程 $kx^2+(2k-1)x+k-1=0$ ① 只有整数根.

且关于 y 的一元二次方程 $(k-1)y^2-3y+m=0$ ② 有两个实数根 y_1 和 y_2 .

(i) 当 k 为整数时, 确定 k 的值;

(ii) 在(i)的条件下, 若 $m > -2$, 用关于 m 的代数式表示 $y_1^2+y_2^2$.

【开放题】

例1 已知方程 $x^2-2ax+a^2+a-1=0$ 有两个实数根, 化简 $\sqrt{a^2-2a+1}+|2+a|$.

□分析 题目的条件是: 方程有两个实数根, 这就是说 $\Delta \geq 0$, 从而可以确定 a 的取值范围.

而 $\sqrt{a^2-2a+1} = \sqrt{(a-1)^2}$ 进一步化简时, 需要讨论 a 的范围, 显然 $a-1 \geq 0$ 时, $\sqrt{(a-1)^2} = a-1$, $a-1 < 0$ 时, $\sqrt{(a-1)^2} = 1-a$.

对于 $|2+a|$ 的讨论也是如此, $2+a \geq 0$, 则 $|2+a| = 2+a$, $2+a < 0$, 则 $|2+a| = -2-a$.

这样的题目需要开放思维, 联想各个知识要点, 认真讨论每一个必要的环节, 得出正确的答案.

□解题 $\because$ 方程 $x^2-2ax+a^2+a-1=0$ 有两个实数根,

$\therefore \Delta = (-2a)^2 - 4(a^2+a-1) = -4a+4 \geq 0, \therefore a \leq 1$.

当 $a \leq -2$ 时,

$$\sqrt{a^2-2a+1}+|2+a| = \sqrt{(a-1)^2}+|2+a| = 1-a-2-a = -2a-1.$$

当 $-2 < a \leq 1$ 时,

$$\sqrt{a^2-2a+1}+|2+a| = \sqrt{(a-1)^2}+|2+a| = 1-a+2+a = 3.$$

□解后 用字母表示数之后, 注意字母的取值范围是很重要的, 从

本题的解题过程可以看出,字母在不同的范围内取值时,所得结果不同.因此,必须研究字母的取值范围才能准确解题.

例 2 已知方程 $(x-1)(x-2)=k^2$, k 为实数,且 $k \neq 0$, 不解方程证明:

- (1) 这个方程有两个不相等的实数根;
- (2) 这两个根一个大于 1, 另一个小于 1.

□分析 (1) 显然是去证明判别式的值大于 0, 可先把方程化为一般形式, 再通过计算判别式的值得出结论.

(2) 要证明两个根一个大于 1, 另一个小于 1, 按常规方法比较困难.

若 α, β 是两个不等的实根, 不妨设 $\alpha > 1, \beta < 1$, 则 $\alpha - 1 > 0, \beta - 1 < 0$, 从而 $(\alpha - 1)(\beta - 1) < 0$, 从这一思路可以设法证.

$(\alpha - 1)(\beta - 1) < 0$, 就可说明 $\alpha - 1, \beta - 1$ 异号, 也就是 α, β 中一个大于 1, 另一个小于 1.

这一证明方法有一定难度, 也体现了思维的灵活性.

□解题 (1) 原方程整理, 得 $x^2 - 3x + 2 - k^2 = 0$.

$$\therefore \Delta = (-3)^2 - 4(2 - k^2) = 9 - 8 + 4k^2 = 1 + 4k^2 > 0,$$

$\therefore$ 原方程有两个不等的实根.

(2) 设原方程的两个不等实根分别为 α, β , 则:

$$(\alpha - 1)(\beta - 1) = \alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1 = 2 - k^2 - 3 + 1 = -k^2.$$

$$\because k \neq 0, \therefore -k^2 < 0, \text{ 即 } (\alpha - 1)(\beta - 1) < 0,$$

$\therefore \alpha - 1$ 与 $\beta - 1$ 异号,

$\therefore$ 原方程的一个根大于 1, 另一个根小于 1.

□解后 若有一个实数 a , 要证方程的两个实数根 α, β 一个大于 a , 另一个小于 a , 则只要证 $(\alpha - a)(\beta - a) < 0$ 就可以了.

例 3 若 $a, b, c, d > 0$, 证明: 在方程① $\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{2a+bx} + \sqrt{cd} = 0$, ② $\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{2b+cx} + \sqrt{ad} = 0$, ③ $\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{2c+dx} + \sqrt{ab} = 0$, ④ $\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{2d+ax} + \sqrt{bc} = 0$ 中, 至少有两个方程有不相等的实数根.

□分析 要证明四个方程至少有两个方程有不相等的实数根可先分

别求出四个方程的判别式,但这四个方程的判别式形式上都比较复杂,且不易判断判别式的值是否大于0.

根据四个判别式的特点,可以求其中两个判别式的和,当和大于0时,这两个判别式至少有一个大于零,这一思路为解此题打开通路.

□解题 设这四个方程的判别式分别为 Δ_1 、 Δ_2 、 Δ_3 、 Δ_4 , 则

$$\Delta_1 = (\sqrt{2a+b})^2 - 4 \times \frac{1}{2} \sqrt{cd} = 2a+b-2\sqrt{cd}, \quad ①$$

$$\Delta_2 = (\sqrt{2b+c})^2 - 4 \times \frac{1}{2} \sqrt{ad} = 2b+c-2\sqrt{ad}, \quad ②$$

$$\Delta_3 = (\sqrt{2c+d})^2 - 4 \times \frac{1}{2} \sqrt{ab} = 2c+d-2\sqrt{ab}, \quad ③$$

$$\Delta_4 = (\sqrt{2d+a})^2 - 4 \times \frac{1}{2} \sqrt{bc} = 2d+a-2\sqrt{bc}, \quad ④$$

$$\begin{aligned} \text{而 } \Delta_1 + \Delta_3 &= 2a+b-2\sqrt{cd}+2c+d-2\sqrt{ab} \\ &= (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 + (\sqrt{c}-\sqrt{d})^2 + a+c > 0, \end{aligned} \quad ⑤$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 + \Delta_4 &= 2b+c-2\sqrt{ad}+2d+a-2\sqrt{bc} \\ &= (\sqrt{a}-\sqrt{d})^2 + (\sqrt{b}-\sqrt{c})^2 + b+d > 0. \end{aligned} \quad ⑥$$

若 $\Delta_1 \leq 0$, $\Delta_3 \leq 0$, 则 $\Delta_1 + \Delta_3 \leq 0$, 与⑤式矛盾, 故 Δ_1 、 Δ_3 中至少有一个大于零.

同理, 由⑥可知: Δ_2 、 Δ_4 中至少有一个大于零, 故 Δ_1 、 Δ_2 、 Δ_3 、 Δ_4 中至少有两个大于零, 即所给的四个方程中至少有两个方程有不相等的实数根.

□解后 本题中“由两数之和大于零, 则其中至少有一个数大于零”, 这种判断方法是十分重要的, 也是十分新颖的, 这种思考方法可以拓宽解题思路.

【多解题】

例1 解方程 $x^2 + 2x - 3 = 0$.

□分析 解方程的方法很多, 一般的方程都可以有多种解法, 在掌握各解法的基础上, 针对不同的题目选择出最简捷的解法非常重要.

□**解题** 解法 1: (配方法)

$$x^2 + 2x = 3,$$

两边加 1, 则 $x^2 + 2x + 1 = 4$,

$$\therefore (x+1)^2 = 4,$$

$$\therefore x+1 = \pm 2, \therefore x_1 = 1, x_2 = -3.$$

解法 2: (因式分解法)

原方程可化为 $(x+3)(x-1) = 0$,

$$\therefore x+3 = 0, \text{ 或 } x-1 = 0,$$

$$\therefore x_1 = 1, x_2 = -3 \text{ 是原方程的根.}$$

解法 3: (公式法)

$$\therefore a = 1, b = 2, c = -3,$$

$$\therefore x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}, \therefore x_1 = 1, x_2 = -3.$$

解法 4: (利用根与系数关系)

$$x_1 + x_2 = -2, x_1 x_2 = -3,$$

观察可得 $x_1 = 1, x_2 = -3$.

□**解后** 一题多解可以开拓解题的思路, 但在解的过程中应该找出最佳的解题方法.

例 2 已知方程 $x^2 + kx + \sqrt{2} = 0$ 的一个根是 -1 , 求 k 的值及另一根.

□**分析** 本题有两种常见的解法, 都很有特色:

一种是: 由根与系数关系设方程的另一个根为 x_1 , 则由两根之和、两根之积的关系, 得出两个关于 x_1 及 k 的方程, 解这个方程组求出 x_1 及 k 的值.

另一种方法是: 由 -1 是原方程的根, 把 $x = -1$ 代入原方程, 则可求出 k 的值, 进而求出方程的根.

□**解题** 解法 1: 设方程的另一个根是 x_1 , 由根与系数的关系可知:

$$\begin{cases} -1 + x_1 = -k, \\ -1 \cdot x_1 = \sqrt{2}. \end{cases} \therefore x_1 = -\sqrt{2}, k = \sqrt{2} + 1.$$

解法 2: $\because -1$ 是方程的一个根, 则

$$(-1)^2 - k + \sqrt{2} = 0, k = \sqrt{2} + 1.$$

$$\therefore x^2 + (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2} = 0,$$

$$(x + \sqrt{2})(x + 1) = 0, x_1 = -1, x_2 = -\sqrt{2}.$$

$$\therefore k \text{ 的值为 } \sqrt{2} + 1, \text{ 方程的另一个根为 } -\sqrt{2}.$$

例3 已知关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根和为 S_1 , 平方和为 S_2 , 立方和为 S_3 , 求 $aS_3 + bS_2 + cS_1$ 的值.

□分析 若方程的两根为 x_1, x_2 , 则解题的思路有如下两条: 一是在方程中构造 $x_1 + x_2, x_1^2 + x_2^2, x_1^3 + x_2^3$ 这样三个关系. 另一个是先求出 $x_1 + x_2, x_1^2 + x_2^2, x_1^3 + x_2^3$ 的值, 再求代数式的值.

□解題 解法1: 设方程的两根为 x_1, x_2 , 则由方程根的定义有

$$ax_1^2 + bx_1 + c = 0, \quad \text{①}$$

$$ax_2^2 + bx_2 + c = 0. \quad \text{②}$$

$$\text{①} \times x_1, \text{ 得 } ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 = 0, \quad \text{③}$$

$$\text{②} \times x_2, \text{ 得 } ax_2^3 + bx_2^2 + cx_2 = 0, \quad \text{④}$$

$$\text{③} + \text{④}, \text{ 得 } a(x_1^3 + x_2^3) + b(x_1^2 + x_2^2) + c(x_1 + x_2) = 0,$$

$$\text{即 } aS_3 + bS_2 + cS_1 = 0.$$

解法2: 设方程两根为 x_1, x_2 , 则由根与系数关系有

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

$$\text{于是有 } x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{a}\right) = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}.$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2]$$

$$= \left(-\frac{b}{a}\right)\left[\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 3 \times \frac{c}{a}\right]$$

$$= -\frac{b(b^2 - 3ac)}{a^3}.$$

$$\therefore aS_3 + bS_2 + cS_1$$

$$= a \times \left[-\frac{b(b^2 - 3ac)}{a^3}\right] + b \times \frac{b^2 - 2ac}{a^2} + c \times \left(-\frac{b}{a}\right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{-b(b^2 - 3ac) + b(b^2 - 2ac) - abc}{a^2} \\
 &= \frac{-b^3 + 3abc + b^3 - 2abc - abc}{a^2} = 0.
 \end{aligned}$$

【易错题】

例1 m 为什么值时，一元二次方程 $(m+1)x^2 - 4mx + 4m - 2 = 0$ 有实数根？

□分析 方程为一元二次方程，则二次项系数必不为 0.

一元二次方程有实数根，则 $\Delta > 0$ ，或 $\Delta = 0$.

满足上述两个条件的 m 的值是使方程有实数根的 m 的值.

□解题 若 $m+1 \neq 0$ ，则 $m \neq -1$.

$$\begin{aligned}
 \Delta &= (-4m)^2 - 4(m+1)(4m-2) \\
 &= 16m^2 - 4(4m^2 + 2m - 2) \\
 &= 16m^2 - 16m^2 - 8m + 8 \\
 &= 8(1-m) \geq 0,
 \end{aligned}$$

$$\therefore 1-m \geq 0, m \leq 1.$$

$\therefore$ 当 $m \leq 1$ 且 $m \neq -1$ 时，原方程有实数解.

□解后 本题最容易出现的错误是求出 $m \leq 1$ ，而忽视一元二次方程定义中的条件 $m \neq -1$.

例2 m 为何值时，方程 $x^2 + (2m+1)x + m^2 + 1 = 0$ 的两个实数根的平方和等于 15？

□分析 已知方程的两实数根的平方和为 15，即 $x_1^2 + x_2^2 = 15$.

而 x_1 、 x_2 的值却无法求出，但由根与系数关系可知 $x_1 + x_2 = -(2m+1)$ ， $x_1 x_2 = m^2 + 1$.

从而建立起 $x_1^2 + x_2^2$ 与 $(x_1 + x_2)$ 、 $x_1 x_2$ 的关系就是非常重要的了. 事实上， $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$ ，这一关系应熟记.

另外，在解这类题目时，还要注意实数根存在的条件，即 $\Delta \geq 0$.

□解题 设方程的两个实根分别为 x_1 、 x_2 ，

$$\text{则 } x_1 + x_2 = -(2m+1), x_1 x_2 = m^2 + 1.$$

$$\therefore x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 15,$$

$$\therefore [-(2m+1)]^2 - 2(m^2+1) = 15,$$

$$4m^2 + 4m + 1 - 2m^2 - 2 = 15, \quad m^2 + 2m - 8 = 0,$$

$$(m+4)(m-2) = 0, \quad \therefore m = -4, \quad m = 2.$$

$$\text{又 } \Delta = 4m^2 + 4m + 1 - 4m^2 - 4 = 4m - 3 \geq 0, \quad \therefore m \geq \frac{3}{4}.$$

$\therefore$ 当 $m = 2$ 时, 原方程两个实数根的平方和等于 15.

□解后 本题容易犯的缺点是忽视了 $\Delta \geq 0$ 这一条件, 而得出 $m = -4, m = 2$ 这两个值.

进一步计算可知, 当 $m = -4$ 时, 方程并没有实数根, 因此 $m = -4$ 应舍去.

开发潜能 迎接挑战

1. 利用根与系数的关系, 求作一个一元二次方程, 使它的根分别是方程 $2x^2 - 3x + 1 = 0$ 的各根的平方.

2. 关于 x 的方程 $x^2 + (m-2)x - m - 3 = 0$ 的两根的差的平方不大于 25, 求最大整数 m .

3. 已知 x_1, x_2 是关于 x 的方程 $4x^2 - (3m-5)x - 6m^2 = 0$ 两个实数根, 且 $\left| \frac{x_1}{x_2} \right| = \frac{3}{2}$, 求 m 的值.

4. 首项系数不相等的两个二次方程

$$(a-1)x^2 - (a^2+2)x + (a^2+2a) = 0 \quad \text{① 及 } (b-1)x^2 - (b^2+2)x +$$

$$(b^2+2b) = 0 \quad \text{② (其中 } a, b \text{ 为正整数) 有一个公共根, 求 } \frac{a^b + b^a}{a-b + b-a} \text{ 的值.}$$

掌握规律 融会贯通

1. 方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 是关于 x 的一元二次方程的一般形式.

2. $\Delta = b^2 - 4ac$ 是一元二次方程的根的判别式.

当 $b^2 - 4ac > 0$ 时, 有两个不相等的实数根;

当 $b^2 - 4ac = 0$ 时, 有两个相等的实数根;

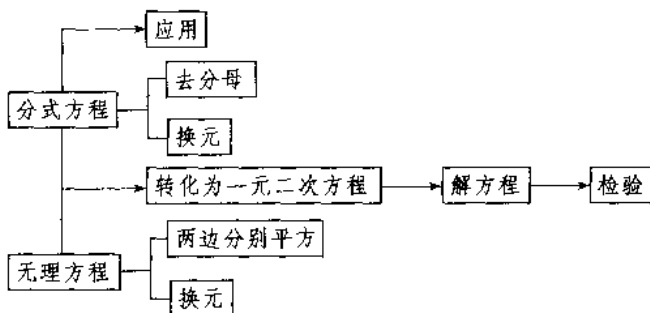
当 $b^2 - 4ac < 0$ 时, 没有实数根.

3. 如果一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的两个根是 x_1, x_2 , 那么 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

以两个数 x_1, x_2 为根的一元二次方程 (二次项系数为 1) 是 $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$.

第二单元 可化为一元二次方程的分式方程和无理方程

梳理知识 建立网络



创新思维 灵活运用

【同源题】

例 1 解方程 $\frac{x+4}{x^2+2x} - \frac{1}{x+2} = \frac{2}{x} + 1$.

分析 解分式方程的常用方法是去分母, 这个方程的公分母是 $x(x+2)$, 两边乘以公分母后, 把原方程化为一元二次方程, 则可求得一元二次方程的根.

但在解方程的过程中方程两边乘以 $x(x+2)$, 这时所得到的方程与原