经济数学基础

微积分

（第3版）

韩玉良 于永胜 郭林 编著

清华大学出版社

经济数学基础

微积分（第3版）

韩玉良 于永胜 郭 林 编著

清华大学出版社
北京

内容简介

本书根据教育部高等学校财经类专业微积分教学大纲的要求编写而成.全书分为12章,内容包括:准备知识、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、微分方程初步、级数、向量代数与空间解析几何、多元函数的微分学、重积分.本次修订在第2版的基础上增加了各节后的习题,供学生练习之用.

本书可作为高等学校经济、管理类各专业的教材.

图书在版编目(CIP)数据

微积分/韩玉良,于永胜,郭林编著.—3版.—北京:清华大学出版社,2006.9

(经济数学基础)

ISBN 7-302-13451-0

Ⅰ.微…　Ⅱ.①韩…　②于…　③郭…　Ⅲ.微积分—高等学校—教材　Ⅳ.O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第081301号

出 版 者:清华大学出版社　　**地　　址**:北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn　　**邮　　编**:100084
社 总 机:010-62770175　　**客户服务**:010-62776969

组稿编辑:刘　颖

文稿编辑:王海燕

印 刷 者:北京密云胶印厂

装 订 者:北京国马印刷厂

发 行 者:新华书店总店北京发行所

开　　本:185×230　**印张**:24.5　**字数**:516千字

版　　次:2006年9月第3版　2006年9月第1次印刷

书　　号:ISBN 7-302-13451-0/O·561

印　　数:1~3000

定　　价:29.00元

编委会

主　编　韩玉良

编　委（按姓氏笔画为序）

于永胜　李鸿儒　陈卫星　郭　林

崔书英　隋亚莉　魏　平

第3版前言

进入21世纪以来，随着现代技术的发展及市场经济对人才的需求，我国人才培养的规模和策略都发生了很大的变化，相应的教育理念和模式也都在不断的调整之中，作为传统教育科目的数学受到了很大的冲击，改革与探索势在必行.为此，我们于1998年承担了山东省高等学校面向21世纪教学内容和课程体系改革计划的项目，编写了一套适合于财经类专业使用的“经济数学基础”系列教材.这套教材包括《微积分》、《线性代数》、《概率统计》和《数学实验》及其相应的学习指导书共7部，于2000年8月出版，2004年8月修订再版.这套系列教材曾获得2001年山东省优秀教学成果奖.此次就是在原有教材的基础上，结合我们几年来的使用情况，听取一线教师及专家的意见，进一步修订而成.

从教学实际出发，我们的观点是，适合的才可能成为最好的，因此在编写这套教材的过程中，我们始终注意把握财经类专业对数学的需求和财经类专业学生的特点.数学思想是数学的灵魂，因此在介绍基本概念、基本理论和基本方法时，除了结合它们的产生背景、几何应用、经济应用给学生直观的了解之外，我们始终注意从数学理论的发现、发展直至应用等多角度来讲述，让数学思想贯穿始终，使学生从总体上把握对数学观念、数学思维、数学语言、数学方法的宏观认识，让学生感受到数学的美妙和严谨，提高其科技文化素质.“没有留下翅膀的痕迹，我已飞过天空”，泰戈尔的这行诗句或许可以用来形容素质教育的一种境界.

高等教育的发展改变了原有的教学环境和对象，为了适应学生个性化的教学要求，很多学校都实行了分层次教学.在这一点上本套教材通过辅助教材的配合较好地实现了这项功能.在

保证教材必要的系统性和严谨性的同时，在强调理论或应用方面，部分内容有较大的选择余地和拓展空间，但并不影响阅读的连贯性；通过对典型例题的讲解，教会学生如何思考问题和分析问题的方法；习题的选配也按题型、难度分成不同层次，可以适当选择.

在处理传统教学与现代技术方面，我们增加了与教材紧密结合的数学实验的内容，通过实验，推进了数学与计算机的相互结合，培养学生运用数学理论和方法建立数学模型，进而提高数值处理和数值计算的能力. 同时应用计算机展示了数学中抽象性、严谨性的一面，培养了学生的应用能力和创新精神.

在本书的修订过程中，多年使用过本套教材的广大师生给我们提出了宝贵的意见和建议，对此表示诚挚的谢意！可以说，这套书是在使用实践中成长的. 本书的出版是我们多年探索、实践的结果，然而对数学教学的研究和探索永远没有止境，恳请广大读者继续提出宝贵意见. 最后感谢清华大学出版社对本书的再版给予的大力支持.

作　者

2006年7月

序

“经济数学基础”是高等学校经济类和管理类专业的核心课程之一.该课程不仅为后继课程提供必备的数学工具,而且是培养经济管理类大学生数学素养和理性思维能力的最重要途径.作为山东省高等学校面向21世纪教学内容和课程体系改革计划的项目,中国煤炭经济学院和烟台大学的部分老师组成课题组,详细研究了国内外一些有关的资料,根据经济管理专业的特点和教学大纲的要求,并结合自己的教学经验,编写了这套“经济数学基础”教材,包括《微积分》、《线性代数》、《概率统计》和《数学实验》.经过了一年多的试用,在充分听取校内外专家意见的基础上,课题组对教材进行了全面的修改和完善,使之达到了较高的水平.这套教材有以下特点:

第一,在加强基础知识的同时,注意把数学知识与解决经济问题结合起来.在教材各部分都安排了经济应用的内容,同时在例题、习题中增加了相当数量的经济应用问题,这有助于培养学生应用数学知识解决实际问题,特别是经济问题的能力.

第二,增加了数学实验的内容.其中一部分是与教学内容相关的演示与实验,借助于这些演示和实验,可以帮助学生更直观地理解和掌握所学的知识;另一部分是提供一些研究型问题(其中有相当一部分是经济方面的),让学生参与运用所学的数学知识建立模型,再通过上机实验来解决实际问题.应该说,这是对传统教学方法和教学过程较大的改革.

第三,为了解决低年级大学生普遍感到高等数学课抽象难学、不易掌握的问题,对一些重要的概念和定理尽可能从实际问题出发,从几何、物理或经济的直观背景出发,提出问题,然后再进行分析和论证,最后得到结论.对一些比较难的定理,则注重

运用从特殊到一般的归纳推理方式. 这样由浅入深使学生易于接受和掌握,同时在学习中领略了数学概念、数学理论的发现和发展过程,这对培养学生创造性思维能力是有帮助的.

相信这套教材的出版,对经济和管理类专业大学生的学习及综合素质的提高,定会起到积极的作用.

郭大钧

于山东大学南院

2000 年 6 月 16 日

目录

第 1 章 准备知识

本章为课程的学习做准备，先介绍一些在数学中广泛应用的术语和记号，然后介绍几个启发微积分基本概念的典型问题.

1.1 集合与符号

1. 集合

集合这一概念描述如下：一个集合是由确定的一些对象汇集的总体.组成集合的这些对象被称为集合的**元素**.通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素.

x 是集合 E 的元素这件事记为 $x\in E$(读作 x 属于 E)；

y 不是集合 E 的元素这件事记为 $y\notin E$(读作 y 不属于 E).

如果集合 E 的任何元素都是集合 F 的元素，则称 E 是 F 的**子集合**，简称为**子集**，记为

$$E\subset F(\text{读作 } E \text{ 包含于 } F),$$

或者

$$F\supset E(\text{读作 } F \text{ 包含 } E).$$

如果集合 E 的任何元素都是集合 F 的元素，并且集合 F 的任何元素也都是集合 E 的元素(即 $E\subset F$ 并且 $F\subset E$)，则称集合 E 与集合 F **相等**，记为

$$E=F.$$

为了方便起见，引入一个不含任何元素的集合——空集合 $\varnothing$.另外还约定：空集合 $\varnothing$ 是任何集合 E 的子集，即 $\varnothing\subset E$.

2. 数集

全体正整数的集合，全体整数的集合，全体有理数的集合，全体实数的集合和全体复数的集合都是经常遇到的集合，约定分别用字母 $\mathbb{Z}_+$，$\mathbb{Z}$，$\mathbb{Q}$，$\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$ 来表示这些集合，即

$\mathbb{Z}_+$ 表示全体正整数的集合；

$\mathbb{Z}$ 表示全体整数的集合；

$\mathbb{Q}$ 表示全体有理数的集合；

$\mathbb{R}$ 表示全体实数的集合；

$\mathbb{C}$ 表示全体复数的集合.

另外，将非负整数、非负有理数和非负实数的集合分别记为$\mathbb{Z}_+$，$\mathbb{Q}_+$ 和$\mathbb{R}_+$，显然有

$$\mathbb{Z}_+ \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

和

$$\mathbb{Z}_+ \subset \mathbb{Z}_+ \subset \mathbb{Q}_+ \subset \mathbb{R}_+.$$

集合可以通过罗列其元素或指出其元素应满足的条件等办法来给出. 例如

$$\{1,2,3,4,5\}$$

表示由 1,2,3,4,5 这 5 个数字组成的集合，而$\{x\in\mathbb{R}\mid x>3\}$表示大于 3 的实数组成的集合. 又如：2 的平方根的集合可以记为 $\{x\in\mathbb{R}\mid x^2=2\}$或$\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$.

在本课程中经常遇到以下形式的实数集的子集.

(1) 区间

为了书写简练，将各种**区间**的符号、名称、定义列成表格，如表 1.1 所示($a,b\in\mathbb{R}$ 且 $a<b$).

表 1.1

符 号	名 称		定 义
(a,b)	有限区间	开区间	$\{x\mid a<x<b\}$
$[a,b]$		闭区间	$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$
$(a,b]$		半开区间	$\{x\mid a<x\leqslant b\}$
$[a,b)$		半开区间	$\{x\mid a\leqslant x<b\}$
$(a,+\infty)$	无限区间	开区间	$\{x\mid x>a\}$
$[a,+\infty)$		闭区间	$\{x\mid x\geqslant a\}$
$(-\infty,a)$		开区间	$\{x\mid x<a\}$
$(-\infty,a]$		闭区间	$\{x\mid x\leqslant a\}$

(2) 邻域

设 $a\in\mathbb{R}$，$\delta>0$. 数集$\{x\mid |x-a|<\delta\}$表示为 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta),$$

称为 a 的 δ **邻域**. 当不需要注明邻域的半径 δ 时，常把它表示为 $U(a)$，简称 a 的邻域.

数集$\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$表示为 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta)\setminus\{a\},$$

也就是在 a 的 δ 邻域 $U(a,\delta)$ 中去掉 a，称为 a 的 δ **去心邻域**. 当不需要注明邻域半径 δ 时，常将它表示为 $\mathring{U}(a)$，简称 a 的去心邻域.

3. 逻辑符号

微积分的语言是文字叙述和数学符号共同组成的，其中有些数学符号是借用数理逻辑的符号，使用这些数理逻辑的符号能使定义、定理的表述简明、准确. 数学语言的符号化是现代数学发展的一个趋势. 本书将普遍使用这些符号.

(1) 连词符号

符号“$\Rightarrow$”表示“蕴涵”或“推得”，或“若……，则……”.

符号“$\Leftrightarrow$”表示“必要充分”，或“等价”，或“当且仅当”.

例如：设 A,B 是两个陈述句，可以是条件，也可以是命题. 则 $A\Rightarrow B$ 表示若命题 A 成立，则命题 B 成立；或命题 A 蕴涵命题 B；称 A 是 B 充分条件，同时也称 B 是 A 的必要条件. 如，n 是整数$\Rightarrow n$ 是有理数. $A\Leftrightarrow B$ 表示命题 A 与命题 B 等价；或命题 A 蕴涵命题 $B(A\Rightarrow B)$，同时命题 B 也蕴涵命题 $A(B\Rightarrow A)$；或 $A(B)$是$B(A)$的必要充分条件.

再如：$A\subset B\Leftrightarrow$任意 $x\in A$，有 $x\in B$.

(2) 量词符号

符号“$\forall$”表示“任意”，或“任意一个”.

符号“$\exists$”表示“存在”，或“能找到”.

应用上述的数理逻辑符号表述定义、定理比较简练明确. 例如，数集 A 有上界、有下界和有界的定义：

$$\text{数集 } A \text{ 有上界} \Leftrightarrow \exists b\in\mathbb{R},\forall x\in A,\text{有 } x\leqslant b.$$

$$\text{数集 } A \text{ 有下界} \Leftrightarrow \exists a\in\mathbb{R},\forall x\in A,\text{有 } a\leqslant x.$$

$$\text{数集 } A \text{ 有界} \Leftrightarrow \exists M>0,\forall x\in A,\text{有 } |x|\leqslant M.$$

设有命题“集合 A 中任意元素 a 都有性质 $P(a)$”，用符号表示为

$$\forall a\in A,\text{有 } P(a).$$

显然，这个命题的否命题是“集合 A 中存在某个元素 a_0 没有性质 $P(a_0)$”，用符号表示为

$$\exists a_0\in A,\text{没有 } P(a_0).$$

这两个命题互为否命题. 由此可见，否定一个命题，要将原命题中的“$\forall$”改为“$\exists$”，将“$\exists$”改为“$\forall$”，并将性质 P 否定. 例如，数集 A 有上界与数集 A 无上界是互为否命题，用符号表示就是：

$$\text{数集 } A \text{ 有上界} \Leftrightarrow \exists b\in\mathbb{R},\forall x\in A,\text{有 } x\leqslant b.$$

$$\text{数集 } A \text{ 无上界} \Leftrightarrow \forall b\in\mathbb{R},\exists x_0\in A,\text{有 } b<x_0.$$

4. 其他符号

(1) max 与 min

符号“max”表示“最大”(它是 maximum(最大)的缩写).

符号“min”表示“最小”(它是 minimum(最小)的缩写).

例如：设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个数. 则：

$$\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$$

表示 n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中最大数；

$$\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$$

表示 n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中最小数.

(2) $n!$ 与 $n!!$

符号“$n!$”表示“不超过 n 的所有正整数的连乘积”，读作“n 的阶乘”即

$$n!=n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1,\quad 7!=7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1.$$

符号“$n!!$”表示“不超过 n 并与 n 有相同奇偶性的正整数的连乘积”，读作“n 的双阶乘”，即

$$(2k-1)!!=(2k-1)(2k-3)\cdots 5\cdot 3\cdot 1,$$
$$(2k-2)!!=(2k-2)(2k-4)\cdots 6\cdot 4\cdot 2,$$
$$9!!=9\cdot 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1,\quad 12!!=12\cdot 10\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2.$$

规定：$0!=1$.

(3) 连加符号 $\sum$ 与连乘符号 $\prod$

在数学中，常遇到一连串的数相加或一连串的数相乘，例如 $1+2+\cdots+n$ 或者 $m(m-1)\cdots(m-k+1)$ 等. 为简便起见，人们引入连加符号 $\sum$ 与连乘符号 $\prod$：

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1+x_2+\cdots+x_n,$$

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1x_2\cdots x_n.$$

这里的指标 i 仅仅用以表示求和或求乘积的范围，把 i 换成别的符号 j,k 等，也同样表示同一和或同一乘积，例如

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = x_1+x_2+\cdots+x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

$$\prod_{j=1}^{n} x_j = x_1x_2\cdots x_n = \prod_{i=1}^{n} x_i.$$

人们通常把这样的指标称为“哑指标”.

下面举几个例子说明连加符号 $\sum$ 与连乘符号 $\prod$ 的应用.

例 1.1 阶乘 $n!$ 的定义可以写成

$$n! = \prod_{j=1}^{n} j.$$

例 1.2 二项式定理可以表示为

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \mathrm{C}_n^j a^j b^{n-j} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a^{n-k} b^k,$$

其中