高职高专“十一五”规划教材

高校教材

An Introduction to Applied Mathematics

An Introduction to Applied Mathematics

应用数学基础

谢国瑞等 编著

华东师范大学出版社

高职高专"十一五"规划教材

应用数学基础

An Introduction to Applied Mathematics

谢国瑞等 编著

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

应用数学基础/谢国瑞主编.一上海:华东师范大学出版社,2006.5
ISBN 7-5617-4731-4

I.应... II.谢... III.应用数学-高等学校:技术学校一教材 IV.029

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 054569 号

高职高专“十一五”规划教材
应用数学基础

主　　编　谢国瑞
策划组稿　大中专教材事业部
项目编辑　朱建宝
文字编辑　钱林义
封面设计　陆　弦
版式设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
电　　话　021-62450163 转各部　行政传真 021-62572105
网　　址　www.ecnupress.com.cn　www.hdsdbook.com.cn
市 场 部　传真 021-62860410　021-62602316
邮购零售　电话 021-62869887　021-54340188

印 刷 者　常熟市华通印刷有限公司
开　　本　787×1092　16 开
印　　张　16
字　　数　379 千字
版　　次　2006 年 7 月第一版
印　　次　2006 年 7 月第一次
印　　数　11 000
书　　号　ISBN 7-5617-4731-4/O · 164
定　　价　24.00 元

出 版 人　朱杰人

(如发现本版图书有印订质量问题,请寄回本社市场部调换或电话 021-62865537 联系)

前言

编写本书的目的是为培养应用型、技能型人才的高职高专院校、成人高校提供一本合用的应用数学教材。根据高职高专教育的培养任务和学生的实际，数学课程应作为文化素质教育的重要载体，在增强学生的就业能力、创业能力，以及终身学习能力上发挥重要作用。

数学是一门历史悠久但又不断增添新内容的科学。单从数学的应用这一层面看，近十年的进展就十分惊人。数学的概念、语言及思维方式，正日益渗透到人们工作和生活的方方面面。例如，媒体中的天气预报、财经报道等无不蕴涵着数学知识。如果把这看成是一种趋势，也是不足为怪的，因为用大量文字也难以表达清楚的事情如果用数学语言表达，可能只需寥寥数语。因此，在知识经济社会里，每一个注重效率、追求工作质量的人，都应不断提高数学文化素养，何况是作为高级的应用性人才的高职高专的毕业生呢？

基于上述原因，本教材的建构以数学内容为载体，注重培养学生的思维方法和创新能力，力求使数学源于实践、用于实践，消除部分学生对数学的厌烦和恐惧心理。具体而言，本书以求解各种极值问题为线索，淡化数学理论，以典型的应用实例为架构，以专业学习和未来的职业生涯中遇到最多的数学知识（线性数学、微积分、概率统计）为载体，提高学生的数学文化素养。

本书由七章组成，周学时为 4～6，一学期内可学完。书中打“*”的内容供选用。以下对各章设计思路进行简单分析，供师生们参考。

第 1 章线性代数方程组和矩阵初步。这里涉及的讨论线性代数方程组的解和求可逆矩阵的逆矩阵，乃至第 2 章中解线性规划的单纯形法，用的都是矩阵行初等变换的方法（以解线性代数方程组高斯-若尔当消元法为原型）。这里，主要是用此方法解决一些有实际意义的问题，如“费用分摊问题”、“联合收入问题”等等。在此可看到正确树立概念对解决问题的关键作用。关于解法的训练，数据不宜繁琐，但学生须能分辨用于讨论方程组的解、用于求可逆矩阵的逆矩阵、用于解线性规划时具体做法之异同，以及在讨论方程组解时怎样识别方程组的状态（是唯一解、无解还是无穷多解）。

第 2 章线性规划简介。线性规划是 20 世纪 40 年代发展起来的一个应用面很宽的应用数学分支。本章有几个示例及对偶线性规划的介绍均颇具启发性，若稍作由此及彼的联想，就有可能用于处理现在或将会面临的某些实际问题。

第 3 章到第 5 章是微积分的一个概要性的介绍。享有电子计算机之父美誉的匈牙利裔美籍大数学家冯·诺依曼(John Von Neumann)曾说：“微积分是近代数学中最伟大的成就，对它的重要性作怎样的估计也不会过分。”高等学校的微积分课程，历来备受重视，国内外出

版的有关教材也不计其数。根据本课程的目的，对这部分内容的教学是特别需要注意把握的。

第3章主要介绍常量、变量与改变量以及函数、极限、连续等基本概念，介绍了两个重要极限，但这里着力点在于介绍常量与变量的联系，而不是去计算过多的习题。第4章为导数，计算部分主要是用好几个最基本的导数公式及对基本法则的运用，而不是用定义来计算或讨论可微性，要阐明导数的各种实际意义，并用导数解实际问题。在学时许可的情况下，打"*"的"偏导数"一节也值得介绍一下。第5章为积分，对定积分要讲清定积分记号的意义，多倚重几何意义，通过常量与变量的联系，引进变上限定积分，用函数的方法解决定积分的计算，完成微积分的基本公式。不定积分也是注意用好几个最基本的公式，就积分法而言主要介绍凑微分法中较简单的场合。在这里，让学生了解一些微分方程的概念也是有益的。

第6章概率初步。在这里，古典概率的直接计算应限于处理最简单的情形，应花一定时间于讨论间接计算，然后介绍条件概率的思想，建立起随机意识。

第7章随机变量简介。这一章学习对随机性问题的提出问题的方式和处理方法，并引向介绍随机变量。这一章介绍的"贝叶斯决策"、"求职面试"等实例也颇有启发性。

编写这样的教材，我们感到经验还非常不够，在试图解决一个问题的时候引发了更多的问题。我们殷切地期望得到广大高职高专教育工作者，特别是数学教师的帮助，希望你们提出宝贵的意见和建议，为编写切合我国高职高专数学教学实际情况的应用数学教材贡献力量。

最后，感谢华东师范大学出版社组织我们编写这本教材。参加本书编写工作的有汪国强教授、郝志峰教授、孙薇荣教授，以及在上海工商外国语职业学院与我共同执教的冯家裕、邵晓华、陈士屏、陆履亨、李昌文、王刚等老师，还有袁国贞、刘丽萍、乔琼等同志也为本书的编写付出了辛勤的劳动，在此一并表示谢意。由于本人水平有限，更因时间仓促，书中错漏、不妥之处在所难免，敬请读者批评指正。

谢国瑞　谨识
2006年5月

目录

第1章　线性代数方程组和矩阵初步

第2章　线性规划简介

第3章　函数　极限

第4章　导　　数

第5章 积 分

第6章 概率初步

第 7 章* 随机变量简介

第 1 章　线性代数方程组和矩阵初步

本章主要讨论线性代数方程组的解，并引入矩阵的概念及运算. 介绍用高斯-若尔当(Gauss - Jordan)消元法讨论线性代数方程组的解及逆矩阵的问题.

1.1　解线性代数方程组的消元法

1.1.1　二元线性代数方程组

一个线性代数方程组的解，属以下三种状态之一：有唯一解、无解或有无限多解. 先以二元线性代数方程组为例作出说明.

在平面直角坐标系中，二元线性方程的图像(坐标能满足方程的点集)是一条直线. 例如，方程

$$2x + y = 8, \text{即 } y = 8 - 2x,$$

在将它的两个解$\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}$及$\begin{bmatrix}0\\8\end{bmatrix}$在坐标平面上用点表示后，联结两点的直线即为此方程的图像(图 1 - 1). 理由是此直线上任一点的坐标正是该方程的一个解，反之，以方程的任一解作为坐标，也正是这条直线上的一个点. 这样从几何上也看出一个二元线性方程有无限多解的事实.

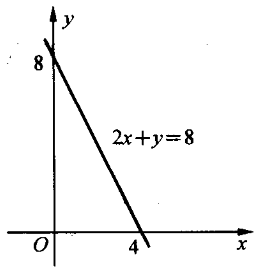


图 1 - 1

有的实际问题中常要对同时出现的若干个线性方程作为一个整体来考虑，此时常要求出满足所有方程的未知数，这就是解线性代数方程组. 例如，将

$$x + y = 3, \tag{1-1}$$

$$2x - 3y = -4 \tag{1-2}$$

两个方程作为整体来讨论，就成一**线性方程组**(system of linear equations). (1 - 1)是方程组的第 1 个方程，而(1 - 2)是第 2 个方程. 对于线性方程组，其求解要借助于**等价变形**，即同解变形. 最常用的**等价变形**是以下三类：

1. 交换组内任两个方程的次序(或编号)；
2. 任一方程乘一非零常数；

3. 任一方程经数量倍(即在两端乘同一常数)后加到另一方程去.

例 1 试通过对方程组等价变形,解方程组

$$\begin{cases} x+y=3, & (1-3) \\ 2x-3y=-4. & (1-4) \end{cases}$$

解 作第 3 类变形,将(1-3)乘(−2)后加到(1-4)去,得到

$$\begin{cases} x+y=3, & (1-3) \\ -5y=-10. & (1-4') \end{cases}$$

这是与原方程组同解的.

作第 2 类变形,在(1-4′)两端乘$\left(-\frac{1}{5}\right)$,得

$$\begin{cases} x+y=3, & (1-3) \\ y=2. & (1-4'') \end{cases}$$

再作第 3 类变形,将(1-4″)乘(−1)后加到(1-3)去,得

$$\begin{cases} x=1, & (1-3') \\ y=2. & (1-4'') \end{cases}$$

这显然与原给方程组也同解,但目前已明显表出了解,故方程组的解是$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$.

例 2 试用方程组等价变形,解方程组

$$\begin{cases} 2x-3y=-4, & (1-4) \\ -4x+6y=2. & (1-5) \end{cases}$$

解 作第 3 类等价变形,将(1-4)乘 2 后加到(1-5)去,得

$$\begin{cases} 2x-3y=-4, & (1-4) \\ 0x+0y=-6. & (1-5') \end{cases}$$

如果方程组有解则必成立

$$0=-6, \qquad (1-5')$$

而这是不可能的,故知方程组无解.

例 3 解方程组

$$\begin{cases} 2x-3y=-4, & (1-4) \\ -4x+6y=8. & (1-6) \end{cases}$$

解 作第 3 类等价变形,将(1-4)乘 2 后加到(1-6)去,得等价方程组

$$\begin{cases} 2x-3y=-4, & (1-4) \\ 0x-0y=0. & (1-6') \end{cases}$$

这时方程(1 - 6′)是个平凡等式 $0=0$，于是未知数 x，y 所应适合的条件是方程组变成与其等价的单个方程

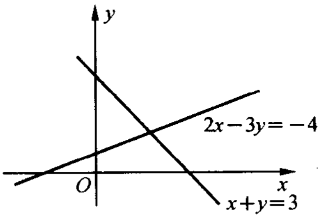
$$2x-3y=-4, \qquad (1-4)$$

实质上等价于

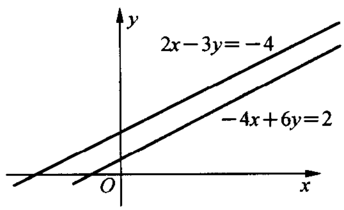
$$y=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}x.$$

这样,所给方程组有无限多个解,解集是 $\left\{\begin{bmatrix} k \\ \frac{2}{3}k+\frac{4}{3} \end{bmatrix} \middle| k\in\mathbf{R}\right\}$; 或表示解为 $\begin{cases} x=k, \\ y=\frac{2}{3}k+\frac{4}{3}, \end{cases}$ 其中 k 是任意实数;或 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k \\ \frac{2}{3}k+\frac{4}{3} \end{bmatrix}$, k 是任意实数.

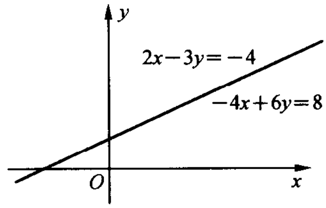
在图 1 - 2(a)、(b)、(c)中,分别显示例 1、例 2、例 3 三个二元线性方程组解的三种状况之几何意义.



(a) 一对相交直线有惟一公共点



(b) 一对平行直线无公共点



(c) 重合直线每一点都是公共点

图 1 - 2

1.1.2 高斯 若尔当消元法

将未知数个数相等的多个线性方程看成一个整体,称为**线性方程组**. 若一个方程组含有 m 个方程、n 个未知数,常简称为 $m\times n$ **方程组**. $m\times n$ 方程组的解应是 n 维数组,将解数组各个分量依序代未知数时能使 m 个方程全部成立.

回顾上一段,用三类等价变形讨论 2×2 方程组解的过程,那里是依照这样的目标在进行的:通过三类等价变形,先用第 1 个方程,将方程组第 1 个未知数在各个方程中的系数变成只在第 1 个方程中成 1,其他方程中全为 0;再用第 2 个方程,将第 2 个未知数在各个方程中的系数变成只在第 2 个方程中成 1,其他方程中全为 0,如此等等. 由于整个过程只是通过方程组等价变形改变各个方程中未知数的系数,可省写未知数,用列表形式凸现其系数的变化过程. 可将例 1 的计算重现于下:表 1 - 1 给出的是例 1 的原方程组, r_1 是第 1 行(row),是方程(1 - 3)的系数; r_2 是第 2 行,是方程(1 - 4)的系数;而常数列(column)由方程右端的常数组成.

表 1 - 1

	x	y	常数列
r_1	1	1	3
r_2	2	-3	-4

经等价运算 $r_1\times(-2)+r_2$，得

表 1 - 2

r_1	1	1	3
r_2'	0	-5	-10

经运算 $r_2'\times\left(-\frac{1}{5}\right)$，得

表 1 - 3

r_1	1	1	3
r_2''	0	1	2

经运算 $r_2''\times(-1)+r_1$，得

表 1 - 4

r_1'	1	0	1
r_2''	0	1	2

第 1 个未知数 x 列的位置成$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，第 2 个未知数 y 列的位置成$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$，因原方程组与表 1 - 4代表的方程组

$$x=1$$
$$y=2$$

同解，故这就是方程组的解，或者说，此时常数列位置成为方程组的解$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$.

这样求方程组解的方法称为消元法(elimination)**或一般称为高斯-若尔当**(Gauss - Jordan)**消元法.**

例 4 用高斯-若尔当消元法解 3×3 方程

$$\begin{cases}x-2y+2z=-1,\\3x+2y+2z=9,\\2x-3y-3z=6.\end{cases}$$

解 按上列步骤，列表运算如下：

表 1 - 5

	x	y	z		
r_1	①	-2	2	-1	$\times(-3)$ $\times(-2)$
r_2	3	2	2	9	
r_3	2	-3	-3	6	

$$\text{表 1-6}\quad \left|\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -4 & 12 \\ 0 & 1 & -7 & 8 \end{array}\right|$$

$$\text{表 1-7}\quad \left|\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & ① & -7 & 8 \\ 0 & 8 & -4 & 12 \end{array}\right| \quad \times(-8) \quad \times(2)$$

$$\text{表 1-8}\quad \left|\begin{array}{ccc:c} ① & 0 & -12 & 15 \\ 0 & ① & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 52 & -52 \end{array}\right| \quad \times\left(\frac{1}{52}\right) \quad \times(7) \quad \times(12)$$

$$\text{表 1-9}\quad \left|\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right|$$

这就得到方程组的解是$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

从计算过程看出，在表 1-5 中是利用带圈的数字 1 依方程组的等价变形法则将第 1 列即 x 所在列变成$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$的，在表 1-7 中，是利用带圈数字 1 依等价变形法则将第 2 列即 y 所在列变成$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，再在表 1-8 中利用带圈的数字 52，依等价变形法则，将第 3 列，即 z 所在列变成$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. 称表 1-8 中三个带圈数字(位置)是第 1、2、3 次消元的**主元(位置)**，而表 1-6 中进行的将第 2、3 行交换位置相当于不愿将数字 8 作第 2 次消元的主元，而要用数字 1 作为主元，故做交换二行位置这件事相当于**选**主元. 而选主元的目的可以是为了便于运算的进行(像本例就是)，或是为了提高运算的精度，也可能是迫不得已而为之.

例 5 试用高斯-若尔当消元法(常简称 G-J **消元法**)解方程组

$$\begin{cases} -3x+7y+2z=3, \\ 2x+4y-3z=-1, \\ x-3y+7z=2. \end{cases}$$

解 将上例的表解过程写成更紧凑的简化形式，有

表 1-10

x	y	z		等价运算	记　号
-3	7	2	3		
2	4	-3	-1		r_{13}
1	-3	7	2		
1	-3	7	2		
2	4	-3	-1	$\times(-2)$　$\times(3)$	$r_{12}(-2)$
-3	7	2	3		$r_{13}(3)$
1	-3	7	2	$\times(3)$	$r_2\left(\frac{1}{10}\right)$
0	10	-17	-5	$\times\left(\frac{1}{10}\right)$	$r_{21}(3)$
0	-2	23	9	$\times(2)$	$r_{23}(2)$
1	0	$\frac{19}{10}$	$\frac{1}{2}$		$r_3\left(\frac{10}{196}\right)$
0	1	$-\frac{17}{10}$	$-\frac{1}{2}$	$\times\left(\frac{17}{10}\right)$　$\times\left(-\frac{19}{10}\right)$	$r_{32}\left(\frac{17}{10}\right)$
0	0	$\frac{196}{10}$	8	$\times\left(\frac{10}{196}\right)$	$r_{31}\left(-\frac{19}{10}\right)$
1	0	0	$-\frac{27}{98}$		
0	1	0	$\frac{19}{98}$		
0	0	1	$\frac{20}{49}$		

故方程组的解是三维数组，横写成行是$\left(-\frac{27}{98}, \frac{19}{98}, \frac{20}{49}\right)$. 即解为

$$x=-\frac{27}{98},\ y=\frac{19}{98},\ z=\frac{20}{49}.$$

在表中已对方程组所作的等价变形用了今后通用的简记法：

1. 对第 1 类变形记成如 r_{13}，表示将组内的第 1、第 3 个方程交换位置.

2. 对第 2 类变形记成如 $r_2\left(\frac{1}{10}\right)$，表示将第 2 方程(即表的第 2 行)乘常数$\frac{1}{10}$.

3. 对第 3 类变形记成如 $r_{12}(-2)$，表示将组内第 1 个方程乘常数(-2)后加到组内第 2 个方程去(这样，改变了组内的第 2 个方程的形式，第 1 个方程没有改变).

例 6　试用 G-J 消元法解方程组

$$\begin{cases} x-2y+z=3, \\ 2x-3y-z=7, \\ 5x-8y-z=20. \end{cases}$$

解　列表计算如表 1-11：

表 1-11

x	y	z		
①	-2	1	3	$r_{12}(-2)$
2	-3	-1	7	
5	-8	-1	20	$r_{13}(-5)$
1	-2	1	3	$r_{21}(2)$
0	①	-3	1	
0	2	-6	5	$r_{23}(-2)$
1	0	-5	5	
0	1	-3	1	
0	0	0	3	

到这里，已知题给方程组与方程组

$$\begin{cases} x-5z=5, \\ y-3z=1, \\ 0=3. \end{cases}$$

等价，此方程组因含有"$0=3$"这样永远不能成立的方程而无解. 故题给方程组无解. 常称无解的方程组为**矛盾方程组**或**不相容方程组**.

例 7　试用 G-J 消元法解方程组

$$\begin{cases} 3x+4y-3z=-6, \\ -x-y+2z=4, \\ x+2y+z=2. \end{cases}$$

解　列表计算如表 1-12：

表 1-12

x	y	z		
3	4	-3	-6	
-1	-1	2	4	r_{13}
1	2	1	2	
①	2	1	2	$r_{12}(1)$
-1	-1	2	4	
3	4	-3	-6	$r_{13}(-3)$
1	2	1	2	$r_{21}(-2)$
0	①	3	6	
0	-2	-6	-12	$r_{23}(2)$
1	0	-5	-10	
0	1	3	6	
0	0	0	0	

至此要进行第 3 次消元时，主元位置上是 0，而且无法通过交换方程来改选主元，因为这是方程组里最后一个方程的位置，若将前面方程往下挪，则将破坏前二次消元的成果，这是不允许的. 所以只能结束运算，说明原方程组与方程组

$$\begin{cases} x - 5z = -10, \\ y + 3z = 6. \end{cases}$$

同解，这个方程组明显有无限多个解. 事实上，分别现成地解出 x，y，有

$$x = -10 + 5z,$$
$$y = 6 - 3z.$$

而 z 是可任意取值的，于是，可将这个方程组的无限多个解表成

$$\begin{cases} x = -10 + 5k, \\ y = 6 - 3k, \\ z = k, \end{cases} \quad k \text{ 为任意实数，或} \left\{ \begin{bmatrix} -10 + 5k \\ 6 - 3k \\ k \end{bmatrix} \middle| k \in \mathbf{R} \right\}\text{，或表作} \begin{bmatrix} -10 + 5k \\ 6 - 3k \\ k \end{bmatrix}\text{，其}$$

中 k 可取任意实数. 令 k 取不同的值就可得到这个方程组的不同的具体解.

通过以上各例可看出，与 2×2 方程组一样，对一般的 $m \times n$ 线性方程组，其解的情况也有三种：有惟一确定的解，有无限多个解，或者无解，三者必居其一. 今后，对前面两种情形，即有解的方程组称为**相容方程组**，而称无解的方程组为**不相容方程组**或**矛盾方程组**.

1.1.3 应用举例

例 8（费用分摊问题） 设一个公司有 3 个生产部门 P_1，P_2，P_3 及 4 个管理部门 M_1，M_2，M_3，M_4. 公司规定，每个管理部门的费用由生产部门及其他管理部门分摊，分摊的比例由管理服务量确定，如表 1－13 所示：

表 1－13

承担比例 \ 部门 / 管理部门	M_1	M_2	M_3	M_4	P_1	P_2	P_3	自身费用
M_1	0	0.02	0.10	0.10	0.24	0.26	0.28	20 000
M_2	0.10	0	0.20	0.10	0.20	0.20	0.20	18 000
M_3	0	0	0	0	0.30	0.30	0.40	80 000
M_4	0.10	0.10	0.10	0	0.20	0.20	0.30	10 000

设若已知各个管理部门 M_1，M_2，M_3，M_4 的自身费用（如人员工资、办公费用等）依次为 2 万（元），1.8 万（元），8 万（元），1 万（元）. 试确定每个管理部门的总费用（自身费用加上承担其他管理部门费用的份额），并从而求出各生产部门所承担的管理费用.

解 设管理部门 M_1，M_2，M_3，M_4 发生的总费用分别为 x，y，z，w，它们都由两个部分组成：自身费用及承担其他管理部门费用的份额. 于是，由上表可知，对管理部门 M_1 应有