长春市教育局教育教学研究室组编

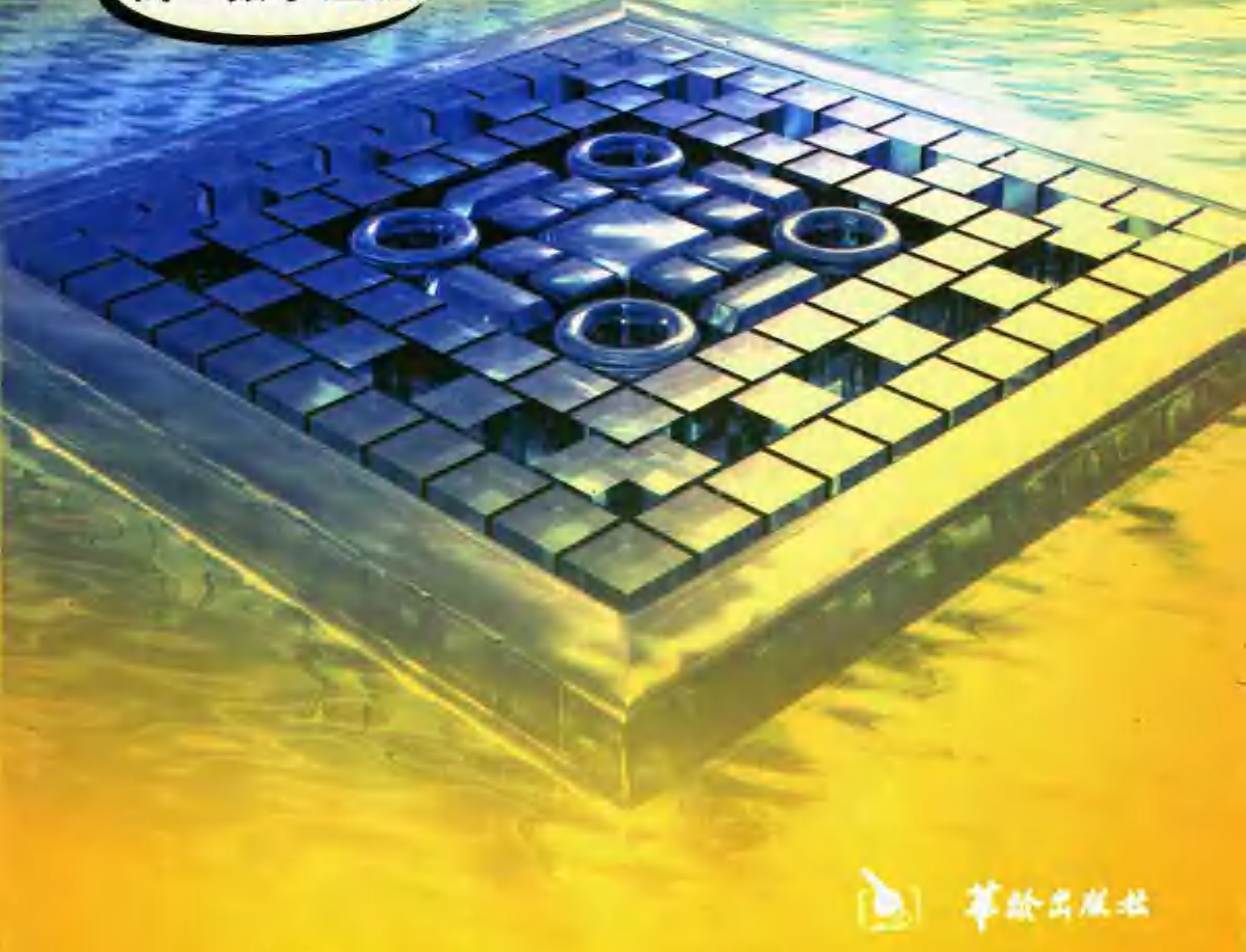
全程绿色学习

系列丛书

教师用书

（与学生用书配套使用）

高二数学(上册)



华龄出版社

全程绿色学习

权威性 实用性 操作性

系列丛书

高二数学（上册）

教师用书

（与学生用书配套使用）

长春市教育局教育教学研究室 组编

名题举例

题型设计与训练

華龄出版社

责任编辑　苏　辉
封面设计　倪　霞

图书在版编目（CIP）数据

全程绿色学习系列丛书．高二数学．上册/长春市教育局教育教学研究室组编．
北京：华龄出版社，2005.8
教师用书
ISBN 7-80178-264-X

Ⅰ．全…　Ⅱ．长…　Ⅲ．数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ．G633

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 094210 号

书　　名：全程绿色学习系列丛书·高二数学（上册）教师用书
作　　者：长春市教育局教育教学研究室组编
出版发行：华龄出版社
印　　刷：遵化市印刷有限公司
版　　次：2005 年 8 月第 1 版　2005 年 8 月第 1 次印刷
开　　本：850×1168　1/16　　**印　　张**：5
印　　数：1～3000 册
全套定价：54.80 元（共 10 册）

地　　址：北京西城区鼓楼西大街 41 号　　**邮　　编**：100009
电　　话：84044445（发行部）　　**传　　真**：84039173

前　言

由长春市教育局教育教学研究室策划的《全程绿色学习系列丛书》和大家见面了。它作为师生的良师益友，将伴随师生度过高中宝贵的学习时光。

本丛书以人教社最新修订的高中教科书为蓝本，以最新《考试大纲》、《新课程教学大纲》和《新课程课程标准》为依据，集国内最先进的教学观念，精选近五年全国高考试题、近三年各省市的优秀模拟试题，并根据高考最新动向，精心创作了40%左右的原创题，使每道试题都体现出了对高考趋势的科学预测。本丛书采用“一拖一”的编写模式，即一本教师用书，一本学生用书(学生用书包括同步训练和单元同步测试)，两本书互为补充。学生用书“同步训练”的编写体例为“名题举例”和“题型设计与训练”两部分，题型设计与训练部分编写适量的基础题及综合性、多元性的试题，意在培养学生的学科思想与悟性，使其对每个知识点的复习落到实处，从而达到“实战演练，能力提升”的目的，并单独装订成册，可作为学生课堂练习本，也可作为学生课后作业本，便于师生灵活使用；学生用书“单元同步测试”是对本单元教与学的总结和验收，既可供教师作考试之用，又可供学生作自我检测之用。教师用书既是教师教学的教案，又是学生学习的学案。教师用书对学生用书“名题举例”和“题型设计与训练”中的每道题进行了全析全解，并给出了“规范解答”，采用“网上机读解答”方式，使学生每做一道题，都是进行高考“实弹演习”。这是本套丛书的一大亮点，在全国教辅用书上也是首次使用这种解答方式。它将有助于学生大幅度提高学习成绩。

《全程绿色学习系列丛书·高二数学(上册)教师用书》由长春市教育局教育教学研究室特级教师祝承亮任主编，东北师范大学附属中学李晓松任副主编。第六章不等式由长春市实验中学张本金编写，第七章由长春市实验中学吴普林、杜艳蕾编写，第八章圆锥曲线方程由长春艺术实验中学刘佰昌编写。全书由长春市教育局教育教学研究室特级教师祝承亮统稿、审定。

长春市教育局教育教学研究室

2005年7月

编委会

主　任　陆建中

副主任　白智才　逯成文　刁丽英

编　委　（按姓氏笔画为序）

刁丽英　王　梅　王笑梅

白智才　孙中文　刘玉琦

许　丽　陆建中　陈　薇

张甲文　吴学荣　赵大川

祝承亮　逯成文

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

“高二数学（上册）教师用书”读者反馈表

您只要如实填写以下几项并寄给我们，将有可能成为最幸运的读者，丰厚的礼品等着您拿，数量有限（每学期50名）一定要快呀！

您最希望得到的**礼品** 100元以下（请您自行填写）

A ______ B ______ C ______

您的个人资料（请您务必填写详细，否则礼品无法送到您的手中）

姓名：	学校：	联系电话：
邮编：	通讯地址：	
职业： 教师□	学生□	教研员□
填在右栏列举3本您喜爱的教辅		
您发现的本书错误：		
您对本书的意见或建议：		

信寄：吉林省长春市亚泰大街3658号　长春市教育教学服务中心

邮编：130022　**联系电话**：0431—8633939

目　录

第六章　不等式

同步训练 1　(6.1)不等式的性质

名题举例

〔例 1〕

〔思路点拨〕$\because b<0$，$\therefore -b>0$，$\therefore a-b>a$.

又$\because a-b<0$，$a<0$，$\therefore \frac{1}{a-b}<\frac{1}{a}$，故$\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$不成立.

$\because a<b<0$，$\therefore |a|>|b|$，$\therefore \frac{1}{|a|}<\frac{1}{|b|}$.

故$\frac{1}{|a|}>\frac{1}{|b|}$不成立. 由此可选 B.

另外，A 中$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$成立. C 与 D 中$\left(a+\frac{1}{b}\right)^2>\left(b+\frac{1}{a}\right)^2$成立，其证明如下：

$\because a<b<0$，$\frac{1}{b}<\frac{1}{a}<0$，$\therefore a+\frac{1}{b}<b+\frac{1}{a}<0$.

$\therefore \left|a+\frac{1}{b}\right|>\left|b+\frac{1}{a}\right|$，故$\left(a+\frac{1}{b}\right)^2>\left(b+\frac{1}{a}\right)^2$.

〔规范解答〕$\boxed{A}$ ■ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$

〔例 2〕

〔思路点拨〕本题考查两实数大小，若两两比较，则较为繁琐，运算量大，不妨将问题简单化.

$\because -\frac{1}{2}<a<0$，不妨取 $a=-\frac{1}{4}$，这时 $A=\frac{17}{16}$，$B=\frac{15}{16}$，$C=\frac{4}{3}$，$D=\frac{4}{5}$. 由此猜测：$C>A>B>D$. $C-A=\frac{1}{1+a}-(1+a)^2=\frac{-a(a^2+3a+3)}{1+a}=\frac{-a\left[\left(a+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]}{1+a}$.

$\because 1+a>0$，$-a>0$，$\left(a+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$，$\therefore C>A$. $A-B=(1+a^2)-(1-a^2)=2a^2>0$. $\therefore A>B$. $B-D=1-a^2-\frac{1}{1-a}=\frac{a(a^2-a-1)}{1-a}=\frac{a\left[\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\right]}{1-a}$，$\because -\frac{1}{2}<a<0$，$\therefore 1-a>0$.

$\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}<\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}<0$，$\therefore B>D$.

综上：$C>A>B>D$.

〔规范解答〕

$C>A>B>D$.

〔例 3〕

〔思路点拨〕本题可从一般性入手，进行科学性的证明，从而得出结果.

〔规范解答〕

由 $7+15=22$，$5.5+16.5=22$，$3-\sqrt{3}+19+\sqrt{3}=22$，可得出一个使$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant 2\sqrt{11}$成立的条件为 $a>0$，$b>0$，$a+b=22$.

证明：$\because a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$，$\therefore 2(a+b)\geqslant a+2\sqrt{ab}+b$，即 $2(a+b)\geqslant(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$. 所以$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant\sqrt{2(a+b)}$. 当 $a+b=22$ 时，有$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant\sqrt{2\times 22}=2\sqrt{11}$，当且仅有 $a=b=11$ 时，等号成立.

题型设计与训练

一、选择题

1.〔参考答案〕D.

2.〔参考答案〕D.

3.〔参考答案〕B.

4.〔参考答案〕C.

〔规律小结〕不等式的乘方性质的拓展：$a^{2n}>b^{2n}\Leftrightarrow|a|>|b|$ $(n\in\mathbf{N}^*)$，$a^{2n+1}>b^{2n+1}\Leftrightarrow a>b$ $(n\in\mathbf{N}^*)$. 不等式的倒数性质：$a>b$，$ab>0\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；$a>b$，$ab<0\Rightarrow\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$. “同号取倒数，不等号方向改变，异号取倒数，不等号方向不变.”

5.〔解析〕注意题中的隐含条件，由 $a>b>c$，且 $a+b+c=0$，可推知 $c<0$，且 $a>0$，b 的符号不确定.

〔参考答案〕D.

6.〔解析〕$a>b$，$ab<0\Rightarrow a>0>b\Rightarrow\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.

〔参考答案〕C.

7.〔解析〕$M-N=x^2+y^2-4x+2y-(-5)=(x-2)^2+(y+1)^2$

$\because x\neq 2$ 或 $y\neq -1$，$\therefore x-2\neq 0$ 或 $y+1\neq 0$.

$\therefore (x-2)^2$ 或 $(y+1)^2$ 均非负且至少一个大于零，$M>N$.

〔参考答案〕A.

8.〔解析〕差式结构的无理式比较大小，可通过分子有理化使其由差变和，再比较大小. $a=\frac{1}{\sqrt{c+1}+\sqrt{c}}$，$b=\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{c-1}}$.

〔参考答案〕A.

9.〔解析〕由 $a+d=b+c$ 得

$a^2+2ad+d^2=b^2+2bc+c^2\Rightarrow(a^2+d^2)-(b^2+c^2)=2bc-2ad$ ①

由 $|a-b|<|b-c|$ 得

$a^2-2ad+d^2<b^2-2bc+c^2 \Rightarrow (a^2+d^2)-(b^2+c^2)<-2bc+2ad.$ ②

将①代入②得 $2bc-2ad<-2bc+2ad$，所以 $ad>bc$.

〔参考答案〕C.

10.〔解析〕若 $\alpha>1,\beta>1$，则一定有 $\alpha+\beta>2$，且 $\alpha\beta>1$，反之不一定成立. 如 $\alpha=\frac{1}{2},\beta=3$，则不成立.

〔参考答案〕B.

二、填空题

11.〔解析〕对命题②作等价变形：$\frac{c}{a}>\frac{d}{b}\Leftrightarrow\frac{bc-ad}{ab}>0$. ②

于是，由 $ab>0$，$bc>ad$，可得②成立，即①③⇒②

若 $ab>0$，$\frac{bc-ad}{ab}>0$，则 $bc>ad$，故①②⇒③.

若 $bc>ad$，$\frac{bc-ad}{ab}>0$，则 $ab>0$，∴②③⇒①.

∴可组成 3 个正确命题.

〔参考答案〕3.

12.〔解析〕因为 $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$，所以 $-\pi<2\alpha<\pi$，$-\frac{\pi}{2}<-\beta<\frac{\pi}{2}$，所以 $-\frac{3\pi}{2}<2\alpha-\beta<\frac{3\pi}{2}$.

又 $2\alpha-\beta=\alpha+(\alpha-\beta)<\alpha<\frac{\pi}{2}$，所以 $-\frac{3\pi}{2}<2\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$.

〔参考答案〕$\left(-\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

13.〔解析〕∵ $a>b$，∴ $a+d>b+d$，$a+c>b+c$.

于是 $\frac{b}{a}<1$，$\frac{b+c}{a+c}<1$，$\frac{a}{b}>1$，$\frac{a+d}{b+d}>1$.

又 $\frac{b+c}{a+c}-\frac{b}{a}=\frac{c(a-b)}{a(a+c)}>0$，∴ $\frac{b}{a}<\frac{b+c}{a+c}$.

又 $\frac{a}{b}-\frac{a+d}{b+d}=\frac{d(a-b)}{b(b+d)}>0$，∴ $\frac{a+d}{b+d}<\frac{a}{b}$.

综上得 $\frac{b}{a}<\frac{b+c}{a+c}<\frac{a+d}{b+d}<\frac{a}{b}$.

〔参考答案〕$\frac{b}{a}<\frac{b+c}{a+c}<\frac{a+d}{b+d}<\frac{a}{b}$.

14.〔解析〕当 $a>1$ 时，$a^3>a^2$，$a^3+1>a^2+1$，∴ $\log_a(a^3+1)>\log_a(a^2+1)$. ∴ $P>Q$. 当 $0<a<1$ 时，$a^3<a^2$，$a^3+1<a^2+1$，∴ $\log_a(a^3+1)>\log_a(a^2+1)$，即 $P>Q$. 综上，得 $P>Q$.

〔参考答案〕$P>Q$.

三、解答题

15.〔解析〕比较两个实数（代数式）大小的思维过程是：作差→变形→判断符号→结论.

当直接作差比较有困难时，可考虑比较它们的平方的大小.

〔参考答案〕解：∵ $m+n=1$，且 $(\sqrt{ma+nb})^2-(m\sqrt{a}+n\sqrt{b})^2=ma+nb-(m^2a+n^2b+2mn\sqrt{ab})=ma(1-m)+nb(1-n)-2mn\sqrt{ab}=mn(a-2\sqrt{ab}+b)=mn(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq0$. ∴ $\sqrt{ma+nb}\geq m\sqrt{a}+n\sqrt{b}$.

16.〔解析〕本题综合考查了等差、等比中项的性质及比较作差法.

〔参考答案〕解：∵ $a_3^2=a_1\cdot a_5$，∴ $a_5=\frac{a_3^2}{a_1}$. ∵ $2b_3=b_1+b_5$，∴ $b_5=2b_3-b_1$. 且 $a_1=b_1$，$a_3=b_3$，∴ $a_5-b_5=\frac{a_3^2}{a_1}-(2a_3-a_1)=\frac{(a_3-a_1)^2}{a_1}$. ∵ $a_1>0$，且 $a_1\neq a_3$，∴ $a_5-b_5>0$，即 $a_5>b_5$.

17.〔解析〕若多次运用不等式相加、相减的性质去求出 α、β 的范围后，再求出所求角的范围，则往往会使所求角的范围扩大而导致错误.

〔参考答案〕解：∵ $2\alpha=(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)$，由 $\begin{cases}0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2},\\ -\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\frac{\pi}{3},\end{cases}$ ⇒相加 $-\frac{\pi}{2}<2\alpha<\frac{5\pi}{6}$. 又∵ $2\beta=(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)$，由 $\begin{cases}0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}\\ -\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\frac{\pi}{3}\end{cases}$ ⇒ $\begin{cases}0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}\\ -\frac{\pi}{3}<\beta-\alpha<\frac{\pi}{2}\end{cases}$ ⇒相加 $-\frac{\pi}{3}<2\beta<\pi$.

又设 $3\alpha-\frac{\beta}{3}=m(\alpha+\beta)+n(\alpha-\beta)=(m+n)\alpha+(m-n)\beta$.

∴ $\begin{cases}m+n=3\\ m-n=-\frac{1}{3}\end{cases}$ ⇒ $\begin{cases}m=\frac{4}{3}\\ n=\frac{5}{3}\end{cases}$，由 $\begin{cases}0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}\\ -\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\frac{\pi}{3}\end{cases}$

⇒ $\begin{cases}0<\frac{4}{3}(\alpha+\beta)<\frac{2\pi}{3}\\ -\frac{5}{6}\pi<\frac{5}{3}(\alpha-\beta)<\frac{5\pi}{9}\end{cases}$ ⇒相加 $-\frac{5\pi}{6}<3\alpha-\frac{\beta}{3}<\frac{11\pi}{9}$.

∴ $-\frac{\pi}{2}<2\alpha<\frac{5\pi}{6}$，$-\frac{\pi}{3}<2\beta<\pi$，$-\frac{5\pi}{6}<3\alpha-\frac{\beta}{3}<\frac{11\pi}{9}$.

同步训练 2　(6.2)算术平均数与几何平均数

名题举例

〔例 1〕

〔思路点拨〕(1)显然 $x\neq0$，$\left|x+\frac{1}{x}\right|=|x|+\frac{1}{|x|}\geq2\sqrt{|x|\cdot\frac{1}{|x|}}=2$，故 $x+\frac{1}{x}\geq2$ 或 $x+\frac{1}{x}\leq-2$.

进而得 $f(x)$ 的值域为 $(-\infty,0]\cup[4,+\infty)$.

〔解后反思〕如果没有注意使用基本不等式时各项须为正数的

要求，易由 $x+\frac{1}{x}\geqslant 2$，得值域[4，+∞)，从而错选 A. 甚至还不注意等号成立的条件，易得 $x+\frac{1}{x}+2\geqslant 3\sqrt[3]{2}$，从而错选 B.

(2)因为 $M=a+\frac{1}{a-2}=a-2+\frac{1}{a-2}+2$.

注意到 $a-2>0$，且 $(a-2)\cdot\frac{1}{a-2}=1$(定值)，知

$M\geqslant 2\cdot\sqrt{(a-2)\cdot\frac{1}{a-2}}+2=4$.

取"="的条件是 $a-2=\frac{1}{a-2}$，即 $a=3$，但这是不可能的.

故 $M>4$.

又因为 $N=x(4\sqrt{3}-3x)=\frac{1}{3}3x\cdot(4\sqrt{3}-3x)$.

注意到 $3x>0$，$4\sqrt{3}-3x>0$，$3x+4\sqrt{3}-3x=4\sqrt{3}$(定值)，知 $N\leqslant\frac{1}{3}\left(\frac{4\sqrt{3}}{2}\right)^2=4$.

故 $N\leqslant 4$.

〔解后反思〕在推导中用到了凑配技巧，以使得"积、和"分别为定值，这是常用的解题策略. 另外，$M\geqslant 4$ 中等号不能成立也值得注意，否则推出 $M\geqslant N$，结论不准确.

(1)〔规范解答〕[A] [B] [C] ■

(2)〔规范解答〕[A] [B] ■ [D]

〔例 2〕

〔思路点拨〕根据题设条件，合理变形，创造能用基本不等式的条件，求最值.

〔规范解答〕

(1) ∵ $x<\frac{5}{4}$，∴ $4x-5<0$，故 $5-4x>0$.

$y=4x-1+\frac{1}{4x-5}=-\left(5-4x+\frac{1}{5-4x}\right)+4$.

∵ $5-4x+\frac{1}{5-4x}\geqslant 2\sqrt{(5-4x)\frac{1}{5-4x}}=2$,

∴ $y\leqslant -2+4=2$. 当且仅当 $5-4x=\frac{1}{5-4x}$，即 $x=1$ 或 $x=\frac{3}{2}$(舍)时，等号成立，故当 $x=1$ 时，$y_{max}=2$.

(2) ∵ $x>0$，$y>0$，$\frac{1}{x}+\frac{9}{y}=1$，∴ $x+y=\left(\frac{1}{x}+\frac{9}{y}\right)(x+y)=\frac{y}{x}+\frac{9x}{y}+10\geqslant 2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{9x}{y}}+10=6+10=16$.

当且仅当 $\frac{y}{x}=\frac{9x}{y}$，又 $\frac{1}{x}+\frac{9}{y}=1$，可得 $\begin{cases}x=4,\\y=12,\end{cases}$ 时等号成立.

∴ $x=4$，$y=12$ 时，$(x+y)_{min}=16$.

(3) $a\sqrt{1+b^2}=a\sqrt{2\left(\frac{1}{2}+\frac{b^2}{2}\right)}=\sqrt{2}\cdot a\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{b^2}{2}}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\left(a^2+\frac{1}{2}+\frac{b^2}{2}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

当且仅当 $a=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{b^2}{2}}$，即 $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$b=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$a\sqrt{1+b^2}$ 有最大值 $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

〔解后反思〕用均值不等式求最值时，为了满足和或积为定值的条件，常采用配凑的方法进行变换，另外变量为正和等号成立时的条件要特别注意.

〔例 3〕

〔思路点拨〕此题考查函数关系、不等式性质、最大值、最小值等基础知识，考查综合应用所学数学知识、思想和方法解决实际问题的能力，考查数学建模能力、求最值的方法.

〔规范解答〕

(1)依题意汽车从甲匀速行驶到乙所用的时间为 $\frac{s}{v}$，全程运输成本为 $y=a\cdot\frac{s}{v}+bv^2\cdot\frac{s}{v}=s\left(\frac{a}{v}+bv\right)$，所求函数及其定义域为 $y=s\left(\frac{a}{v}+bv\right)$，$v\in(0,c]$.

(2)由题意，s、a、b、v 均为正数，故 $s\left(\frac{a}{v}+bv\right)\geqslant 2s\sqrt{ab}$.

等式当且仅当 $\frac{a}{v}=bv$，即 $v=\sqrt{\frac{a}{b}}$ 时成立.

若 $\sqrt{\frac{a}{b}}\leqslant c$，则当 $v=\sqrt{\frac{a}{b}}$ 时，全程运输成本 y 最小；

若 $\sqrt{\frac{a}{b}}>c$，当 $v\in(0,c]$ 时，有

$s\left(\frac{a}{v}+bv\right)-s\left(\frac{a}{c}+bc\right)$

$=s\left[a\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{c}\right)+b(v-c)\right]=\frac{s}{vc}(c-v)(a-bcv)$.

因为 $c-v\geqslant 0$，且 $a>bc^2$，

故 $a-bcv\geqslant a-bc^2>0$.

所以 $s\left(\frac{a}{v}+bv\right)\geqslant s\left(\frac{a}{c}+bc\right)$，当且仅当 $v=c$ 时等号成立，即当 $v=c$ 时，全程运输成本 y 最小.

综上，为使全程运输成本 y 最小，当 $\sqrt{\frac{a}{b}}\leqslant c$ 时，行驶速度为 $v=\sqrt{\frac{a}{b}}$.

当 $\sqrt{\frac{a}{b}}>c$ 时，行驶速度为 $v=c$.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

题型设计与训练

一、选择题

1.〔解析〕利用均值不等式除了可以比较大小和证明不等式外，主要用于求函数的最值. 使用的条件为"一正、二定、三相等"，三个条件缺一不可，此外多次使用均值不等式时，要注意取等条件的一致性.

〔参考答案〕B.

2.〔参考答案〕B.

3.〔解析〕$3^a+3^b\geqslant 2\sqrt{3^a\cdot 3^b}=2\sqrt{3^{a+b}}=2\sqrt{27}=6\sqrt{3}$.

仅当 $3^a=3^b$，即 $a=b=\dfrac{3}{2}$时取等号.

〔参考答案〕B.

4.〔解析〕因为 $x,y\in\mathbf{R}^+$，所以 $x+y\geqslant 2\sqrt{xy}$.

又因为 $xy=1+(x+y)$，所以 $x+y\geqslant 2\sqrt{1+(x+y)}$，

令 $t=x+y$，则 $t\geqslant 2\sqrt{1+t}$.

所以 $t^2\geqslant 4(1+t)$.

解得 $t\geqslant 2(1+\sqrt{2})$或 $t\leqslant 2(1-\sqrt{2})$.

因为 $t=x+y>0$，故 $x+y\geqslant 2(1+\sqrt{2})$.

〔参考答案〕C.

5.〔解析〕$\because f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$，$\therefore f(x)$是单调递减函数.

$\because a,b\in\mathbf{R}^+$，$\therefore \dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$.

$\therefore \dfrac{1}{a+b}\leqslant\dfrac{1}{2\sqrt{ab}}$. $\therefore \dfrac{2ab}{a+b}\leqslant\sqrt{ab}$.

又$\because \dfrac{a+b}{2}-\dfrac{2ab}{a+b}=\dfrac{(a-b)^2}{2(a+b)}\geqslant 0$，

$\therefore \dfrac{2ab}{a+b}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\dfrac{a+b}{2}$.

$\therefore f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\leqslant f(\sqrt{ab})\leqslant f\left(\dfrac{2ab}{a+b}\right)$.

$\therefore A\leqslant G\leqslant H$.

〔参考答案〕A.

〔规律小结〕基本不等式的拓展，若 $a、b\in\mathbf{R}^+$，

则$\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\dfrac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

6.〔解析〕$M=\left(\dfrac{1}{a}-1\right)\left(\dfrac{1}{b}-1\right)\left(\dfrac{1}{c}-1\right)$

$=\left(\dfrac{a+b+c}{a}-1\right)\left(\dfrac{a+b+c}{b}-1\right)\left(\dfrac{a+b+c}{c}-1\right)=\dfrac{b+c}{a}\cdot\dfrac{a+c}{b}\cdot\dfrac{a+b}{c}\geqslant\dfrac{2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ac}\cdot 2\sqrt{ab}}{abc}=8$.

当且仅当 $a=b=c$ 时，等号成立.

由 $a+b+c=1$，得 $a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

$\therefore M\in[8,+\infty)$.

〔参考答案〕D.

7.〔解析〕$g(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x}=x+\dfrac{1}{x}+1\geqslant 2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}+1=3$.

又 $x\in\left[\dfrac{1}{2},2\right]$，故当且仅当 $x=\dfrac{1}{x}$，即 $x=1\in\left[\dfrac{1}{2},2\right]$时等号成立.

所以 $g(x)$在 $x=1$ 处取得最小值 3.

依题意，$f(x)$也在 $x=1$ 处取得最小值 3.

从而 $f(x)=x^2+bx+c$ 的对称轴为 $x=1$.

故$-\dfrac{b}{2}=1$，$b=-2$，$\dfrac{4c-b^2}{4}=3$，$c=4$.

$f(x)=x^2-2x+4=(x-1)^2+3$. 又 $x\in\left[\dfrac{1}{2},2\right]$.

〔参考答案〕B.

二、填空题

8.〔解析〕$x+y=(x+y)\left(\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}\right)=a+b+\left(\dfrac{ay}{x}+\dfrac{xb}{y}\right)$

$\geqslant a+b+2\sqrt{\dfrac{ay}{x}\cdot\dfrac{xb}{y}}=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$.

当且仅当$\begin{cases}\dfrac{ay}{x}=\dfrac{xb}{y},\\ \dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=1,\end{cases}$时取得最小值.

〔参考答案〕$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$.

9.〔解析〕$t\geqslant\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}$，根据 $a+b\leqslant\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}$.

得$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant\sqrt{2}\sqrt{a+b}$，即

$\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}\leqslant\sqrt{2}$，$\therefore t\geqslant\sqrt{2}$.

〔参考答案〕$[\sqrt{2},+\infty)$.

10.〔解析〕$ab+bc+ca\leqslant\dfrac{a^2+b^2}{2}+\dfrac{b^2+c^2}{2}+\dfrac{a^2+c^2}{2}=a^2+b^2+c^2=1$.

$\because (a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\geqslant 0$，

$\therefore ab+bc+ca\geqslant-\dfrac{1}{2}$.

〔参考答案〕1，$-\dfrac{1}{2}$

11.〔解析〕$y=-\dfrac{3}{x+\dfrac{1}{x}+1}=\dfrac{3}{(-x)+\left(-\dfrac{1}{x}\right)-1}$

$\because x<0$，$\therefore -x>0$，$-\dfrac{1}{x}>0$.

$\therefore (-x)+\left(-\dfrac{1}{x}\right)\geqslant 2\sqrt{(-x)\cdot\left(-\dfrac{1}{x}\right)}=2$.

$\therefore y\geqslant-\dfrac{3}{2-1}=-3$.

又 $x^2+x+1>0$，$\therefore y<0$.

〔参考答案〕$[-3,0)$.

三、解答题

12.〔参考答案〕解：设商品原售价为 N.

甲方案降价后商品价为 $N_{甲}=N(1-a\%)(1-b\%)$

乙方案降价后商品价为 $N_{乙}=N(1-b\%)(1-a\%)$

$\therefore N_{甲}=N_{乙}$.

丙方案降价后商品价为 $N_{丙}=N\left(1-\frac{a+b}{2}\%\right)^2$

$\because N_{甲}=N_{乙}=N(1-a\%-b\%+ab/10000)\leqslant N(1-a\%-b\%)+\left(\frac{a\%+b\%}{2}\right)^2=N\left(1-\frac{a+b}{2}\%\right)^2=N_{丙}$.

故两次降价后，甲、乙二方案商品售价相同，均低于丙方案．即甲、乙二方案降价幅度大．

13.〔参考答案〕解：(1)每吨平均成本为$\frac{y}{x}$万元

$\frac{y}{x}=\frac{x}{10}+\frac{4000}{x}-30\geqslant2\sqrt{\frac{x}{10}\cdot\frac{4000}{x}}-30=10$.

当且仅当$\frac{x}{10}=\frac{4000}{x}$，即 $x=200\in(150,250)$

故年产量为 200 吨时，每吨的成本达到最低 10 万元.

(2)设年利润为 z(万元)，则 $z=16\cdot x-y=16x-\frac{x^2}{10}+30x-4000=-\frac{1}{10}(x-230)^2+1290$.

$x=230\in(150,250)$时，有 $z_{最大}=1290$. 故当年产量达到 230 吨时可获得最大利润 1290 万元.

同步训练 3　(6.3)不等式的证明

名题举例

〔例 1〕

〔思路点拨〕由于本题不等式的两边均为正且为多项式，考虑两种比较法都可以.

〔规范解答〕

1. 做差比较法

证法 1　$\left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}-\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{b}}+\frac{b-a}{\sqrt{a}}=\frac{(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{ab}}$

$=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{\sqrt{ab}}\geqslant0$.

当且仅当 $a=b$ 时取等号，

$\therefore\left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

2. 做商比较法

证法 2　$\frac{\left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-\sqrt{ab}+b)}{\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\frac{a+b-\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}\geqslant\frac{2\sqrt{ab}-\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}=1$，且$\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$，

$\therefore\left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

〔例 2〕

〔思路点拨〕采用分析法，从消去分数指数幂入手.

〔规范解答〕

证明：

要证：$(x^3+y^3)^{\frac{1}{3}}<(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$,

只需证：$(x^3+y^3)^2<(x^2+y^2)^3$,

即证：$2x^3y^3<3x^2y^2(x^2+y^2)$.

只要证：$2xy<3(x^2+y^2)$.

$2xy<x^2+y^2$

$\because x\neq y$，$\therefore$最后一个不等式显然成立.

所以原不等式成立.

〔例 3〕

〔思路点拨〕注意观察所给不等式的结构，此不等式是关于 a,b,c 的轮换式，因此只抓住一个根号进行研究，其余同理可得．本题难点在于$\sqrt{a^2+b^2}$、$\sqrt{b^2+c^2}$、$\sqrt{c^2+a^2}$不易处理，如能找出 a^2+b^2 与 $a+b$ 之间的关系，问题可得到解决．注意到 $a^2+b^2\geqslant2ab\to2(a^2+b^2)\geqslant(a+b)^2\to\sqrt{2(a^2+b^2)}\geqslant a+b$ 容易得到证明.

〔规范解答〕

证明：$\because a^2+b^2\geqslant2ab$，$\therefore 2(a^2+b^2)\geqslant(a+b)^2$.

$\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}|a+b|=\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$，

同理 $\sqrt{b^2+c^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(b+c)$，$\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(c+a)$.

三式相加即得 $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\sqrt{2}(a+b+c)$.

〔例 4〕

〔思路点拨〕应用命题的等价转化思想，即“如果 A 是 B 成立的充要条件，那么 B 也是 A 成立的充要条件”．只需证不等式②对 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立的充要条件是不等式①成立，可考虑用最值

法.

〔规范解答〕

> 证明　设 $f(x)=ax+\frac{x}{x-1}(x>1)$，那么不等式②对 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立的充要条件是函数 $f(x)$，当 $x>1$ 时的最小值大于 b.
>
> $\because f(x)=ax+1+\frac{1}{x-1}=(a+1)+a(x-1)+\frac{1}{x-1}$
>
> $\geqslant(a+1)+2\sqrt{a}=(\sqrt{a}+1)^2$.
>
> 当且仅当 $a(x-1)=\frac{1}{x-1}$，$x=1+\sqrt{\frac{1}{a}}$ 时，上式等号成立. 故 $f(x)$ 的最小值是 $(\sqrt{a}+1)^2$.
>
> 因此，不等式②对 $x>1$ 恒成立的充要条件是 $(\sqrt{a}+1)^2>b\Leftrightarrow\sqrt{a}+1>\sqrt{b}$.

题型设计与训练

一、选择题

1.〔解析〕(1) $\because c>1$，$\therefore \lg c>0$，$a>b$，故 $a\lg c>b\lg c$.

(3) $\because 2^c>0$，$a>b$，$\therefore a\cdot 2^c>b\cdot 2^c$.

〔参考答案〕B.

2.〔解析〕比较作差①$a^3+1-1=a^3$

②$a^4-2a^2+2-1=(a^2-1)^2\geqslant0$

③$a+\frac{1}{a}\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

④$a^2+\frac{1}{a^2}\geqslant2>1$. 故只有①正确.

〔参考答案〕A.

3.〔解析〕平方作差 $\because P^2-Q^2=2(\sqrt{a^2+7a}-\sqrt{a^2+7a+12})<0$，$\therefore P^2<Q^2$. 而 $P>0$，$Q>0$，$\therefore P<Q$.

〔参考答案〕A.

4.〔解析〕$\because a>b>1$，$\therefore \lg a>0$，$\lg b>0$. $\therefore$ 由均值不等式 $Q>P$. 又 $Q=\lg\sqrt{ab}$，$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$，$\therefore R>Q$.

〔参考答案〕B.

5.〔解析〕$M=\log_n(n-1)\cdot\log_n(n+1)\leqslant\left[\frac{\log_n(n-1)+\log_n(n+1)}{2}\right]^2=\left(\frac{\log_n(n^2-1)}{2}\right)^2<\left(\frac{\log_n n^2}{2}\right)^2=1$.

〔参考答案〕C.

6.〔解析〕设最后一辆车到达时用的时间为 t 小时，则 $t=\left[400+36\times\left(\frac{v}{20}\right)^2\right]\div v=\frac{400}{v}+\frac{36v}{400}\geqslant2\sqrt{\frac{400}{v}\cdot\frac{36v}{400}}=12$（当且仅当 $\frac{400}{v}=\frac{36v}{400}$，即 $v=\frac{200}{3}$ 时等号成立）.

〔参考答案〕A.

二、填空题

7.〔解析〕$a\sqrt{a}+b\sqrt{b}>a\sqrt{b}+b\sqrt{a}$

$\Leftarrow(a\sqrt{a}+b\sqrt{b})^2>(a\sqrt{b}+b\sqrt{a})^2$

$\Leftarrow a^3+b^3+2ab\sqrt{ab}>a^2b+b^2a+2ab\sqrt{ab}$

$\Leftarrow a^3+b^3-a^2b-b^2a>0$

$\Leftarrow(a-b)(a^2-b^2)>0$

$\Leftarrow(a-b)^2(a+b)>0$.

〔参考答案〕$a\geqslant0$，$b\geqslant0$，且 $a\neq b$.

8.〔解析〕三角换元，设 $x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$，$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

$\therefore x+y=\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$.

$\because \theta+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi\right)$，$\therefore \sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$.

$\therefore x+y$ 最大值为 $\sqrt{2}$.

〔参考答案〕$\sqrt{2}$.

9.〔解析〕放缩法 $N=\frac{x}{2+x}+\frac{y}{2+y}>\frac{x}{2+x+y}+\frac{y}{2+x+y}=\frac{x+y}{2+x+y}=M$.

〔参考答案〕$M<N$.

10.〔解析〕综合运用不等式 $a^2+b^2\geqslant\frac{(a+b)^2}{2}$，$(\sqrt{a+1})^2+(\sqrt{b+1})^2\geqslant\frac{(\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1})^2}{2}$.

〔参考答案〕$\sqrt{6}$.

三、解答题

11.〔解析〕不等式的两边是关于 p，q 的二元二次多项式，可考虑作差比较法.

〔参考答案〕解：$\because f(x)=2x^2+1$.

$\therefore af(p)+bf(q)-f(ap+bq)=a(2p^2+1)+b(2q^2+1)-[2(ap+bq)^2+1]=2ap^2+2bq^2-2a^2p^2-4abpq-2q^2b^2+a+b-1$.

又 $a+b=1$，$\therefore a+b-1=0$.

$\therefore af(p)+bf(q)-f(ap+bq)=2ap^2-2a^2p^2+2bq^2-2b^2q^2-4abpq=2a(1-a)p^2+2b(1-b)q^2-4abpq=2abp^2+2abq^2-4abpq=2ab(p-q)^2$.

$\because a$，b 同号，$\therefore 2ab(p-q)^2\geqslant0$，当且仅当 $p=q$ 时等号成立.

$\therefore af(p)+bf(q)\geqslant f(ap+bq)$，当且仅当 $p=q$ 时等号成立.

12.〔参考答案〕证明：$\because a>0$，$b>0$，$c>0$.

$\therefore$ [redacted]$\geqslant2\sqrt{a}$.

当且仅当 $a=1$ 时取等号

$1+b\geqslant2\sqrt{b}$.

当且仅当 $b=1$ 时取等号

$1+c\geqslant2\sqrt{c}$.

当且仅当 $c=1$ 时取等号

$\because abc=2$，

$\therefore a$，b，c 不能同时取 1.

$\therefore(1+a)(1+b)(1+c)>8\sqrt{abc}=8\sqrt{2}$.

$\therefore(1+a)(1+b)(1+c)>8\sqrt{2}$.

13.〔参考答案〕证明：$\because a>0$，$\therefore \sqrt{4a+1}=\sqrt{(4a+1)\cdot 1}\leqslant \frac{4a+1+1}{2}=2a+1$.

同理，$\sqrt{4b+1}\leqslant 2b+1$，$\sqrt{4c+1}\leqslant 2c+1$.

三式相加，得 $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}\leqslant 2a+2b+2c+3=5$.

其中等号成立必须$\begin{cases}4a+1=1,\\4b+1=1,\\4c+1=1,\end{cases}$

此时有 $a=b=c=0$，因而 $a+b+c=0$ 与 $a+b+c=1$ 矛盾，$\therefore$等号不成立.

$\therefore \sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}<5$.

14.〔参考答案〕证明：(1) $\because a>0,b>0$，$\therefore 2c>a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$，$\therefore c>\sqrt{ab}>0$，故 $c^2>ab$.

(2)要证原不等式成立，只要证 $-\sqrt{c^2-ab}<a-c<\sqrt{c^2-ab}$ $\Leftrightarrow |a-c|<\sqrt{c^2-ab}\Leftrightarrow (a-c)^2<c^2-ab$，而 $(a-c)^2-(c^2-ab)=a(a+b-2c)<0$，

$\therefore$原不等式成立.

15.〔解析〕用反证法进行证明.

〔参考答案〕证明一　假设三式同时大于 $\frac{1}{4}$，

即有 $b-ab>\frac{1}{4}$，$c-bc>\frac{1}{4}$，$a-ac>\frac{1}{4}$.

三式同向相乘，得 $(1-a)a(1-b)b(1-c)c>\frac{1}{64}$.

又 $(1-a)a\leqslant\left(\frac{1-a+a}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，

同理，$(1-b)b\leqslant\frac{1}{4}$，$(1-c)c\leqslant\frac{1}{4}$，

$\therefore (1-a)a(1-b)b(1-c)c\leqslant\frac{1}{64}$，因此假设矛盾，结论正确.

证明二　假设三式同时大于 $\frac{1}{4}$.

$\because 0<a<1$，$\therefore 1-a>0$.

$\frac{(1-a)+b}{2}\geqslant\sqrt{(1-a)\cdot b}>\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$.

同理 $\frac{(1-b)+c}{2}$、$\frac{(1-c)+a}{2}$都大于 $\frac{1}{2}$.

三式相加，得 $\frac{3}{2}>\frac{3}{2}$，矛盾，

$\therefore$原命题成立.

〔规律小结〕结论若是“都是……”、“都不是……”、“至少……”、“至多……”或“……≠……”形式的不等式命题往往宜用反证法.

同步测试1　不等式的证明

一、选择题(每小题5分，共50分)

1.〔解析〕①②③比较作差，④⑤比较作商. 可知①③⑤正确.

〔参考答案〕C.

2.〔解析〕$\because a\geqslant b>0$. $\therefore \sqrt[3]{a}\geqslant\sqrt[3]{b}>0$.

$\therefore \sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\geqslant 0$. $x^3-y^3=(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})^3-(\sqrt[3]{a-b})^3=a-3\sqrt[3]{a^2b}+3\sqrt[3]{ab^2}-b-(a-b)=3\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{a})\leqslant 0$. $\therefore x^3-y^3\leqslant 0$.

$\therefore x^3\leqslant y^3$. $\therefore x\leqslant y$.

〔参考答案〕D.

3.〔解析〕由已知 $m=\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}$，$n=\sqrt{a}+\sqrt{b}$，得 $a=b>0$ 时，$m=n$，可否定选项B、C，比较选项A、D，不必论证与 p 的关系.

取特值 $a=4,b=1$，

则有 $m=4+\frac{1}{2}=4\frac{1}{2}$，

$n=2+1=3$，$\therefore m>n$.

〔参考答案〕A.

4.〔解析〕$\because a=\sqrt{2}\sin60°$，$b=\sqrt{2}\sin61°$.

而 $y=\sin x$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$单调递增，$\therefore 1>b>a>0$.

排除B、C选项，只需比较 $\frac{a^2+b^2}{2}$ 与 b.

而 $a^2<a<b$，$b^2<b$，$\therefore \frac{a^2+b^2}{2}-b=\frac{a^2+b^2-2b}{2}=\frac{(a^2-b)+(b^2-b)}{2}<0$. $\therefore \frac{a^2+b^2}{2}<b$.

〔参考答案〕A.

5.〔解析〕$\left.\begin{array}{l}\frac{a}{a+b+c+d}<\frac{a}{a+b+d}<\frac{a}{a+b}\\ \frac{b}{a+b+c+d}<\frac{b}{c+b+a}<\frac{b}{a+b}\\ \frac{c}{a+b+c+d}<\frac{c}{b+d+c}<\frac{c}{c+d}\\ \frac{d}{a+b+c+d}<\frac{d}{a+d+c}<\frac{d}{c+d}\end{array}\right\}$相加得证

〔参考答案〕B.

6.〔解析〕$[x+(1-x)]\cdot\left(\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{1-x}\right)=a^2+b^2+\frac{a^2(1-x)}{x}+\frac{xb^2}{1-x}\geqslant a^2+b^2+2ab=(a+b)^2$.

〔参考答案〕B.

7.〔解析〕换元法，设 $x=\cos\alpha$，$y=\sin\alpha$，

则 $(1-xy)(1+xy)=(1-\sin\alpha\cos\alpha)(1+\sin\alpha\cos\alpha)=\left(1-\frac{1}{2}\sin2\alpha\right)\left(1+\frac{1}{2}\sin2\alpha\right)=1-\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha$,

∴ $(1-xy)(1+xy)$ 有最大值 1，有最小值 $\frac{3}{4}$.

〔参考答案〕B.

8.〔解析〕作商比较，$\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{y}+\frac{1}{x}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$,

∴ $x+y<xy$.

〔参考答案〕A.

9.〔解析〕$(a-c)\cdot\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\right)=[(a-b)+(b-c)]\cdot\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\right)=2+\left(\frac{b-c}{a-b}+\frac{a-b}{b-c}\right)\geq4$.

〔参考答案〕C.

10.〔解析〕$A(1+20\%)^2=23.04$，$A=16$. $B(1-20\%)^2=23.04$，$B=36$.

∴ $23.04\times2-(16+36)=-5.92$.

〔参考答案〕B.

二、填空题(每小题 5 分，共 20 分)

11.〔解析〕设 $a=\cos^2\theta$，$b=\sin^2\theta(0\leq\theta<2\pi)$.

则 $a^2+b^2=\cos^4\theta+\sin^4\theta=\cos^4\theta+\sin^4\theta+2\sin^2\theta\cos^2\theta-2\sin^2\theta\cos^2\theta=(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2-\frac{1}{2}\sin^2 2\theta=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\theta\leq1$.

〔参考答案〕1.

12.〔解析〕共 $(2^{11}-1-2^{10})+1=2^{10}$ 项.

$A<\frac{1}{2^{10}}\cdot2^{10}=1$.

〔参考答案〕$A<1$.

13.〔解析〕利用 $a^2+b^2\geq\frac{(a+b)^2}{2}$.

$(\sqrt{a+2})^2+(\sqrt{2b+3})^2\geq\frac{(\sqrt{a+2}+\sqrt{2b+3})^2}{2}$.

∴ $\sqrt{a+2}+\sqrt{2b+3}\leq\sqrt{30}$.

当且仅当 $\begin{cases}a+2=2b+3,\\a+2b=10,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a=\frac{11}{2},\\b=\frac{9}{4},\end{cases}$ 取得最大值.

〔参考答案〕$\sqrt{30}$.

14.〔解析〕不妨设 $x>y>0$，则最大边为 x.

∵ $(\sqrt{x^2-xy+y^2})^2-x^2=y^2-xy=y(y-x)<0$.

∴ $\sqrt{x^2-xy+y^2}<x$.

设最长边 x 与最短边 y 夹角为 α.

则 $\cos\alpha=\frac{x^2+y^2-(\sqrt{x^2-xy+y^2})^2}{2xy}=\frac{1}{2}$.

$\alpha\in(0,\pi)$，∴ $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

〔参考答案〕$\frac{\pi}{3}$.

三、解答题(每小题 15 分，共 30 分)

15.〔参考答案〕证明：(1) ∵ $a+b\geq0$，∴ $a\geq-b$，$b\geq-a$.

又∵ $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的增函数，∴ $f(a)\geq f(-b)$，$f(b)\geq f(-a)$. ∴ $f(a)+f(b)\geq f(-a)+f(-b)$.

(2)逆命题为：若 $f(a)+f(b)\geq f(-a)+f(-b)$，

$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为增函数，则 $a+b\geq0$.

逆命题成立，用反证法证明.

16.〔参考答案〕证明一：要证原式成立，只需证

$a(b+m)(c+m)+b(a+m)(c+m)>c(a+m)(b+m)$ 成立，

即 $a(bc+bm+cm+m^2)+b(ac+am+cm+m^2)>c(ab+am+bm+m^2)$ 成立，即 $abc+2abm+am^2+bm^2-cm^2>0$ 成立，

即 $abc+2abm+m^2(a+b-c)>0$ 成立，

因为 $abc>0$，$2abm>0$，$a+b>c$，

所以 $abc+2abm+m^2(a+b-c)>0$ 显然成立. 所以原不等式成立.

证明二：∵ $a+b>c$，∴ $a+b-c>0$.

∴ $\frac{c}{c+m}<\frac{c+(a+b-c)}{c+m+(a+b-c)}=\frac{a+b}{m+a+b}=\frac{a}{m+a+b}+\frac{b}{m+a+b}<\frac{a}{a+m}+\frac{b}{b+m}$.

本题可做复杂化的变形，如

已各：a、b、c、d、e、f、$g\in\mathbf{R}^+$.

求证：$\frac{a+b+c+d}{a+b+c+d+e+f}+\frac{c+d+e+g}{c+d+e+f+b+g}>\frac{g+e+a+b}{g+e+a+b+d+f}$(请同学自证)

分析：构造函数 $f(x)=\frac{x}{x+m}(x>0,m>0)$. ①不等式右边 $=f(c)$，左边 $=f(a)+f(b)$；②易知单调性，$f(x)=\frac{x+m-m}{x+m}=1-\frac{m}{x+m}$，随 x 增大而增大，单调增函数. ③因 $a+b>c$，故有 $f(a+b)>f(c)$，只要证 $f(a)+f(b)>f(a+b)$ 即可. 因此缩小的目标是把 $f(a)+f(b)$ 缩小为 $f(a+b)$ 即可.

证明三：设函数 $f(x)=\frac{x}{x+m}=1-\frac{m}{x+m}(x>0,m>0)$ 易知 $f(x)$ 随 x 增大而增大，

∴ $f(x)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 是增函数.

∵ $f(a)+f(b)=\frac{a}{a+m}+\frac{b}{b+m}>\frac{a}{(a+b)+m}+\frac{b}{(a+b)+m}=\frac{a+b}{(a+b)+m}=f(a+b)$，$a+b>c$，

∴ $f(a+b)>f(c)=\frac{c}{c+m}$.

∴ $\frac{a}{a+m}+\frac{b}{b+m}>\frac{c}{c+m}$.

〔解后反思〕①△ABC 中，$a+b>c$；②当 a、b、$c\in\mathbf{R}^+$ 时，$\frac{a}{a+m}>\frac{a}{a+b+m}$ 恒成立，因此也可不构造函数.

同步训练 4　(6.4)不等式的解法

名题举例

〔例 1〕

〔思路点拨〕如果多项式 $f(x)$ 可分解为 n 个一次式的积，则一元高次不等式 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）可用数轴标根法求解，但要处理好有重根的情况.

〔规范解答〕

(1)原不等式可化为 $x(2x+5)(x-3)>0$

把方程 $x(2x+5)(x-3)=0$ 的三个根 $x_1=0$，$x_2=-\frac{5}{2}$，$x_3=3$ 顺次标上数轴，然后，从右向上开始画曲线顺次经过三个根，其解集如下图的阴影部分.

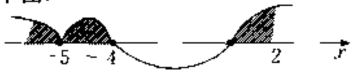
∴原不等式解集为 $\{x|-\frac{5}{2}<x<0$ 或 $x>3\}$.

(2)原不等式等价于 $(x+4)(x+5)^2(x-2)^3>0\Leftrightarrow$

$\begin{cases}x+5\neq0\\(x+4)(x-2)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq-5\\x<-4 \text{ 或 } x>2\end{cases}$

∴原不等式解集为 $\{x|x<-5$ 或 $-5<x<-4$ 或 $x>2\}$.

〔解后反思〕用“数轴标根法”解不等式时应注意：①各一次项中 x 的系数必为正；②对于偶次或奇次重根可参照.(2)的解法转化为不含重根的不等式，也可直接用“数轴标根法”，但注意“奇穿偶回”，其法如下图.



〔例 2〕

〔思路点拨〕当分式不等式化为 $\frac{f(x)}{g(x)}<0$（或 $\leqslant0$）时，要注意它的等价变形.

① $\frac{f(x)}{g(x)}<0\Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)<0$

② $\frac{f(x)}{g(x)}\leqslant0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\cdot g(x)\leqslant0\\g(x)\neq0\end{cases}$

或 $\frac{f(x)}{g(x)}\leqslant0\Leftrightarrow f(x)=0$ 或 $f(x)\cdot g(x)<0$.

〔规范解答〕

(1)原不等式等价于

$\frac{3}{x-2}\leqslant\frac{x}{x+2}\Leftrightarrow\frac{3}{x-2}-\frac{x}{x+2}\leqslant0$

$\Leftrightarrow\frac{3(x+2)-x(x-2)}{(x-2)(x+2)}\leqslant0$

$\Leftrightarrow\frac{-x^2+5x+6}{(x-2)(x+2)}\leqslant0$

$\Leftrightarrow\frac{(x-6)(x+1)}{(x-2)(x+2)}\geqslant0$

$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-6)(x+1)(x-2)(x+2)\geqslant0\\(x+2)(x-2)\neq0\end{cases}$

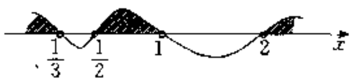
用“数轴标根法”如下图，

∴原不等式解集为

$(-\infty,-2)\cup[-1,2)\cup[6,+\infty)$.

(2)原不等式等价于 $\frac{(2x-1)(x-1)}{(3x-1)(x-2)}>0\Leftrightarrow(2x-1)(x-1)(3x-1)\cdot(x-2)>0$.

用“数轴标根法”如下图，



∴原不等式解集为

$\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{2},1\right)\cup(2,+\infty)$.

〔例 3〕

〔思路点拨〕本题可按一元二次不等式的一般解法求解，但要注意对字母 a 讨论.

〔规范解答〕

(1)∵ $\Delta=a^2-16$，

∴当 $\Delta<0$，即 $-4<a<4$ 时，解集为 $\mathbf{R}$.

当 $\Delta>0$，即 $a>4$ 或 $a<-4$ 时，解集为

$\left(-\infty,\frac{1}{4}(-a-\sqrt{a^2-16})\right)\cup\left(\frac{1}{4}(-a+\sqrt{a^2-16}),+\infty\right)$

当 $\Delta=0$，即 $a=\pm4$ 时，解集为 $\{x|x\neq\pm1\}$.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com