21世纪警官高等教育系列教材

概率统计

主编　李排昌　熊允发

中国人民公安大学出版社

21世纪警官高等教育系列教材

概率统计

主编　李排昌　熊允发

中国人民公安大学出版社
·北　京·

图书在版编目（CIP）数据

概率统计/李排昌，熊允发主编．—北京：中国人民公安大学出版社，2004.1

（21世纪警官高等教育系列教材）

ISBN 7-81087-592-2

Ⅰ.概… Ⅱ.①李…②熊… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.O21

中国版本图书馆CIP数据核字（2003）第126766号

概率统计

GAILU TONGJI

主编 李排昌 熊允发

出版发行：中国人民公安大学出版社
地　　址：北京市西城区木樨地南里
邮政编码：100038
经　　销：新华书店
印 刷 厂：北京市优美印刷有限责任公司

版　　次：2004年2月第1版
印　　次：2005年7月第2次
印　　张：7.75
开　　本：850毫米×1168毫米 1/32
字　　数：194千字
印　　数：3001～6000册

ISBN 7-81087-592-2/D·452
定　　价：16.00元

本社图书出现印装质量问题，由发行部负责调换
联系电话：（010）83903254

E-mail：cpep@public.bta.net.cn

前　言

在如火如荼的高等教育改革中，教学改革是核心，而教学内容和课程体系改革又是难点。作为教学内容改革的组成部分，教材内容的整合与更新的重要性不言而喻。

公安大学现行本科专业公安业务教材基本上是20世纪90年代初编写的。这些教材在确立公安学科的地位，培养合格人才以及指导公安工作实践等方面曾发挥过重要作用。然而，形势的发展使得这些教材必须修订或重新编写。其一，在1999年6月召开的第三次全国教育工作会议上，党中央和国务院作出了《关于深化教育改革全面推进素质教育的决定》。1999年11月，第二次全国公安教育工作会议就深化公安教育改革、全面实施素质教育作出了新的部署。我们的教材建设必须在此基础上重新定位。其二，我校许多课程的教材涉及法律问题，而近十年来，我国颁布和修订的法律比较多，教材的编写和修订必须与新的法律相一致。其三，我国正处于计划经济向社会主义市场经济转型时期，社会生活变化迅猛，公安机关面临的斗争形势非常严峻，而我们的理论却跟不上形势发展，有些理论严重滞后公安工作实际，无法指导公安工作实践，必须予以修正。鉴于此，公安大学党委适时作出决定，编写这套“21世纪警官高等教育系列教材”。

此次教材的编写与修订，将贯彻以下指导思想：从注重知识传授向重视能力培养转化；既充分反映当前公安工作和队伍建设的实际，贴近警务实践，又要具有前瞻性、预见性；从实践中来，又高于实践，形成比较科学、完整的体系，做到理论性、科

学性与较强的针对性、实用性的统一。

本套教材将注重“高水平”与“适用性”的有机结合，突出编写质量和社会效益。首先，编写工作将以我校在全国公安系统具有影响的学科带头人领衔，邀请各级公安部门业务领导、专家和骨干参加，形成实力强大的编写阵容。其次，在教材编写过程中，将注意吸收改革开放以来我国公安理论研究的最新学术成果，关注国际学术发展最新动向，使教材内容站在21世纪初的学术前沿。再次，针对本科教学和新时期本科学生的特点，将学术性、新颖性、可读性有机结合起来，注意运用比较生动的案例、简明流畅的语言阐释理论。最后，按照“编审分离”原则，聘请学术造诣高、实践经验丰富的学者、专家审稿，严把教材编写质量关。

我们期望并相信，经过编写者、审稿者、出版者的共同努力，这套21世纪公安业务新教材将以其质量高和特色鲜明而成为新世纪奉献给读者们的精品。

中国人民公安大学
教材编审委员会
2001年12月

编者的话

本教材是为我校工科专业及管理类专业的概率论与数理统计课程所编写的。全书共七章，前四章介绍随机事件与概率、随机变量及其分布、随机变量的函数、数字特征与大数定律等内容，第五章和第六章介绍参数估计、假设检验、回归分析与方差分析，第七章介绍随机过程。

在本教材的编写过程中，编者严格按照概率论与数理统计教学大纲要求，既注重理论的严谨性与先进性，又注重结构体系的逻辑性与完整性，同时根据公安学科的特点，在问题的提法和例题的配备上尽量满足公安工作的要求。

参加本教材编写、讨论修改、审阅校对工作的有熊允发（第一章至第三章）、左萍和蔡瑾（第四章和第七章的§7.1～§7.2）、李排昌（第五章至第七章的§7.3～§7.6）以及石瑞民、王云鹤、徐毅、高朋香。本教材由李排昌、熊允发任主编，石瑞民、左萍、蔡瑾、王云鹤、徐毅、高朋香任副主编。强文久副教授对全稿进行了审阅，在此，表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，本教材难免有不足之处，欢迎读者批评指正。

编　者

2003年9月

目　　录

第一章　概率论的基本概念

人们在实践活动中所遇到的现象，一般来说，可分为两类：一类是**必然现象**，或称**确定性现象**；另一类是**随机现象**，或称**不确定性现象**。

必然现象是指在相同条件下重复试验，所得结果总是确定的现象。只要试验条件不变，试验结果在试验之前是可以预言的。例如，在标准大气压下，将水加热到100℃，水必然沸腾；用手向空中抛出的石子必然下落；异性电荷必然相互吸引，等等，这些现象都是必然现象。

随机现象是指在相同条件下重复试验，每次试验所得结果不一定相同的现象，即试验结果是不确定的现象。对这种现象来说，在每次试验之前哪一个结果发生，是无法预言的。例如，新生婴儿，可能是男孩，也可能是女孩；向一目标进行射击，可能击中目标，也可能击不中目标；从一批产品中，随机抽检一件产品，结果可能是合格品，也可能是次品，等等，这些现象都是随机现象。

对随机现象而言，是否有规律性可寻呢？人们经过长期的反复实践发现，这类现象虽然就每次试验结果来说具有不确定性，但经过大量重复试验，所得结果却呈现出某种规律性。例如，掷一枚质量均匀的硬币，当投掷次数很多时，就会发现正面和反面出现的次数几乎各占一半；对一目标进行射击，当射击次数不多时，对弹孔分布看不出有什么规律性，但当射击次数非常多时，就可发现弹孔的分布呈现出一定的规律性，即弹孔关于目标的分

布略呈对称性，且越靠近目标的弹孔越密，越远离目标的弹孔越稀。从上述各例可以看到，随机现象也包含着规律性，它可在相同条件下的大量重复试验或观察中呈现出来，这种规律性称为随机现象的**统计规律性**。

概率论与数理统计就是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科。

概率统计的理论与方法的应用是很广泛的，几乎遍及所有科学技术领域、工农业生产和国民经济的各个部门中。例如，使用概率统计方法可以进行气象预报、水文预报及地震预测和产品的抽样验收；在研制新产品时，为寻求最佳生产方案可以进行试验设计和数据处理；在可靠性工程中，使用概率统计方法可以给出元件或系统的使用可靠性及平均寿命的估计；在自动控制中可以给出数学模型以便通过计算机控制工业生产；在通讯工程中可以提高信号的抗干扰性和分辨率，等等。

§1.1 随机试验

对随机现象的研究，人们总是要进行观察、测量或做各种科学试验，为了叙述方便，将其统称为**试验**。

例如：

E_1：抛一枚硬币，观察正面 H（有币值的一面）、反面 T 出现的情况。

E_2：将一枚硬币抛掷三次，观察正面 H、反面 T 出现的情况。

E_3：将一枚硬币抛掷三次，观察正面出现的次数。

E_4：在一批灯泡中任取一只，测试它的寿命。

上面举出的四个例子都是试验，仔细分析这些试验可得出以下几个共同特点：

（1）试验可以在相同条件下重复进行；

（2）试验的所有可能的结果不止一个，而且是事先已知的；

（3）每次试验总是恰好出现这些可能结果中的一个，但究竟出现哪一个结果，试验前不能确定。

如试验 E_1 有两种可能的结果，出现 H 或者出现 T，但在抛掷之前不能确定是出现 H 还是出现 T，这个试验可以在相同的条件下重复地进行。

人们将满足上述三个条件的试验称为**随机试验**，简称试验，以字母 E 表示。

我们是通过研究随机试验来研究随机现象的。

§1.2　样本空间及随机事件

一、样本空间

对于随机试验，尽管在每次试验之前不能预知试验的结果，但试验的所有可能结果组成的集合是已知的。我们将随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的**样本空间**，记为 S。样本空间的元素，即 E 的每个结果，称为**样本点**，记为 e。

在讨论一个随机试验时，首先要明确它的样本空间。对一个具体的试验来说，其样本空间可以由试验的具体内容确定。

下面写出§1.1中试验 E_k（$k=1, 2, 3, 4$）的样本空间 S_k：

S_1：$\{H, T\}$，

S_2：$\{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$，

S_3：$\{0, 1, 2, 3\}$，

S_4：$\{t \mid t \geqslant 0\}$。

要注意的是，样本空间的元素是由试验的目的所确定的。例

如，在 E_2 和 E_3 中同是将一枚硬币连抛三次，由于试验的目的不一样，其样本空间也不一样。

二、随机事件

在实际进行试验时，人们常常关心满足某种特性的样本点的集合所出现的规律。例如，将一枚硬币掷两次，观察正反面出现的情况，则试验 E 的样本空间为 S：$\{HH, HT, TH, TT\}$。我们关心“第一次出现正面”出现的规律，则 $A=\{HH, HT\}$ 是样本点的集合；若关心“两次均为正面”，则 $B=\{HH\}$ 是样本点的集合，它们都是 S 的子集。

我们称试验 E 的样本空间 S 的子集为 E 的**随机事件**，简称**事件**，通常用大写英文字母 A、B、C 等表示。在每次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，称这一事件发生。

特别，由一个样本点组成的单点集，称为**基本事件**。例如，§1.1 中试验 E_1 有两个基本事件 $\{H\}$ 和 $\{T\}$；试验 E_3 有 4 个基本事件 $\{0\}$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$。

例 1 在 §1.1 的 E_2 中，用事件 A_1 表示“第一次出现的是 H”，即

$$A_1=\{HHH, HHT, HTH, HTT\}。$$

用 A_2 表示“三次出现同一面”，即

$$A_2=\{HHH, TTT\}。$$

样本空间 S 和空集 $\emptyset$ 作为 S 的子集也看做事件。由于 S 包含所有的样本点（基本事件），故在每次试验中，必有某个基本事件 $e\in S$ 出现，从而事件 S 必然发生，因此，称 S 是**必然事件**。又因 $\emptyset$ 中不包含任何一个样本点（基本事件），故在任一次试验中，$\emptyset$ 永远不会发生，因此，称 $\emptyset$ 是**不可能事件**。

三、事件间的关系与事件的运算

事件是一个集合，因而事件间的关系与事件的运算自然按集合论中集合之间的关系和集合运算来处理。

在下面的叙述中，为直观起见用平面上的一个矩形域表示样本空间 S，矩形内的每一点表示样本点（基本事件），并用矩形内的两个圆分别表示事件 A 和事件 B。

(1) 若 $A\subset B$，则称事件 B 包含事件 A。这指的是事件 A 发生必导致事件 B 发生。

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，即 $A=B$，则事件 A 与事件 B **相等**。

(2) 事件 $A\cup B=\{e\mid e\in A$ 或 $e\in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**和事件**。当且仅当 A、B 中至少有一个发生时，事件 $A\cup B$ 发生。

类似地，称 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 的和事件；称 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为可列个事件 A_1，A_2，…的和事件。

(3) 事件 $A\cap B=\{e\mid e\in A$ 且 $e\in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**积事件**。当且仅当 A、B 同时发生时，事件 $A\cap B$ 发生。$A\cap B$ 也记做 AB。

类似地，称 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 的积事件；称 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为可列个事件 A_1，A_2，…的积事件。

(4) 事件 $A-B=\{e\mid e\in A$ 且 $e\notin B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**差事件**。当且仅当 A 发生、B 不发生时事件 $A-B$ 发生。

(5) 若 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与 B 是**互不相容的**，或**互斥的**。这指的是事件 A 与事件 B 不能同时发生。基本事件是两两互不相容的。

(6) 若 $A\cup B=S$ 且 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与 B 互为**逆事**

件，又称事件 A 与事件 B 互为**对立事件**。这指的是对每次试验而言，事件 A、B 中必有一个发生，且仅有一个发生。A 的对立事件记为 $\bar{A}$。$\bar{A}=S-A$。

用图1－1至图1－6可直观地表示以上事件之间的关系与运算。

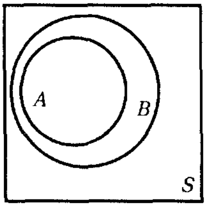

图 1－1

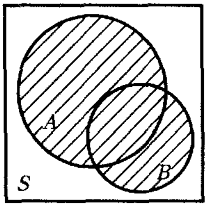

图 1－2

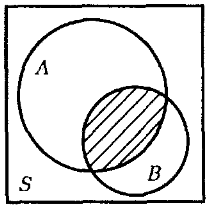

图 1－3

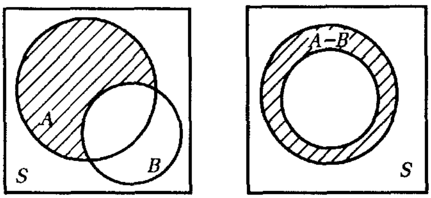

图 1－4

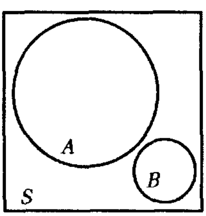

图 1－5

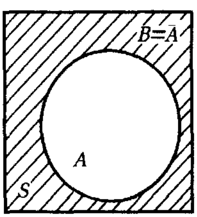

图 1－6

上面利用集合的概念描述了事件的概念、关系及运算，为了将它们与集合论中的相应部分进行对照，列表如下：

符号	概　率　论	集 合 论
S	必然事件（样本空间）	全集
$\varnothing$	不可能事件	空集
e	基本事件（样本点）	元素
A	事件	子集
$\bar{A}$	A 的对立事件	A 的余集
$A \subset B$	事件 A 发生必然导致事件 B 发生	A 是 B 的子集
$A = B$	事件 A 与事件 B 相等	A 与 B 相等
$A \cup B$	事件 A 与事件 B 至少有一个发生	A 与 B 的和集
AB	事件 A 与事件 B 同时发生	A 与 B 的交集
$A - B$	事件 A 发生而事件 B 不发生	A 与 B 的差集
$AB = \varnothing$	事件 A 与事件 B 互不相容	A 与 B 没有公共元素

由于事件、事件的关系及运算与集合、集合的关系及运算是相当的，故根据集合的运算性质可推得事件的运算性质如下：

交换律：$A \cup B = B \cup A$，$A \cap B = B \cap A$。

结合律：$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$，

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$。

分配律：$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$，

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$。

德·摩根律：$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$，$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$。

德·摩根律，又称为对偶原则，在事件的运算中经常被用到。它可以推广到更多个事件的情况，即 $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i$，$\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \bar{A}_i$。用语言表述为：事件和的对立事件等于对立事件的积，事件积的对立事件等于对立事件的和。

例 2 在例 1 中有

$A_1 \cup A_2 = \{HHH, HHT, HTH, HTT, TTT\}$,

$A_1 \cap A_2 = \{HHH\}$,

$A_2 - A_1 = \{TTT\}$,

$\overline{A_1 \cup A_2} = \{THT, TTH, THH\}$。

例 3 某射手向一目标进行三次射击。令

$A_i =$ "第 i 次射击命中目标", $i=1, 2, 3$;

$B_j =$ "在三次射击中，命中 j 次", $j=0, 1, 2, 3$。则

$B_0 = \bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3 = \overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}$;

$B_1 = A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 \cup \bar{A}_1 A_2\bar{A}_3 \cup \bar{A}_1\bar{A}_2 A_3$;

$B_2 = A_1 A_2\bar{A}_3 \cup A_1\bar{A}_2 A_3 \cup \bar{A}_1 A_2 A_3$;

$B_3 = A_1 A_2 A_3$。

§1.3 频率与概率

对于一个事件（除必然事件和不可能事件）来说，它在一次试验中可能发生，也可能不发生。我们常常希望知道某些事件在一次试验中发生的可能性究竟有多大。例如，为了确定水坝的高度，就要知道河流在造水坝地段每年最大洪水达到某一高度这一事件发生的可能性大小。我们希望找到一个合适的数来表示事件在一次试验中发生的可能性大小。为此，首先引入频率概念，它描述了事件发生的频繁程度，进而引出表征事件在一次试验中发生的可能性大小的数——概率。

一、频率

定义 1 在相同的条件下，进行了 n 次试验，在这 n 次试验