教育改变人生
JIAOYU GAIBIAN RENSHENG
江西教育出版社

高等专科学校工程类用教材

高等数学

第三册

主　编：龚建华

副主编：楼天容　温秋根

江西教育出版社

www.jxeph.com/gaoshu.hfml

高 等 数 学

主　编　龚建华

副主编　楼天容　温秋根

江西教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学．第3册/龚建华编.—南昌:江西教育出版社,2006.2

ISBN 7-5392-4593-X

Ⅰ.高...　Ⅱ.龚...　Ⅲ.高等数学—高等学校—教材　Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第011642号

高等数学

第三册

GAO DENG SHU XUE

龚建华　编

江西教育出版社出版发行

江西科佳图书印装有限责任公司印刷　新华书店经销

2006年2月第1版　2006年2月第1次印刷

开本:850毫米×1168毫米　1/32　印张:13.375

字数:330千字　印数:1-5000册

ISBN 7-5392-4593-X/G·4284　定价:20.00元

地址:南昌市抚河北路61号

邮政编码:330008　电话:6710427

URL:http://www.jxeph.com

E_mail:jxeph@public.nc.jx.cn

(赣教版图书如有印装质量问题,可向我社产品制作部调换)

前 言

进入21世纪，高职高专院校的高等数学教学面临着如何使教材适应科学技术的迅猛发展、社会对人才素质要求的不断提高以及高等教育大众化的新问题。

本教材仍是按照原国家教委制定的《高等学校工程专科高等数学课程教学基本要求》编写的，努力贯彻“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则；讲清概念，减少论证，使学生掌握基本的概念、理论和计算技能，并初步具备用高等数学方法去解决实际问题的能力。

在本书编写过程中，我们继承了传统高等数学教材中的优点，同时，我们也作了一些新的尝试，主要有如下几点：

1. 本书的编写引进了模块式教育理论，在第一册中主要编入了一元微积分的内容，第二册部分编入了多元微积分的内容，第三册编入了线性代数、概率与数理统计以及拉氏变换的内容，可根据专业要求进行选学。

2. 加入了一些比较新颖的应用题，目的是使传统教材带有一点时代气息。

3. 考虑到理工类学生应当懂一点经济管理方面的知识，因此，书中插入了一些简单的边际分析等经济应用题。

4. 本书可以作为高职高专工程类专业的教学用书，也可作为教学参考用书。

在全书的编写过程中，陆伟锋博士提出了许多宝贵意见，饶三平、凌和良、杨晓伟和吕凤虎老师为本书的校稿作了大量工作，在此一并表示感谢。

由于我们水平有限，书中谬误之处难免存在，请使用本书的老师、学生和读者们不吝指教。

编者

2005年12月

目　　录

第一部分　线性代数

第一章　行列式

行列式是线性代数的一个重要工具，在后继课程和工程技术中有着广泛的应用．本章将在介绍二阶、三阶行列式的基础上给出 n 阶行列式的概念，进而介绍其性质，并讨论其在解线性方程组方面的应用．

第一节　行列式的定义

一、二、三阶行列式

在许多实际问题中经常会遇到解多元线性方程组的问题．

给定一个二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = c_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = c_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

怎样求这方程组的解呢?消元法是常用的方法．例如，先以 a_{22} 乘第一个方程，以 a_{12} 乘第二个方程，然后所得两式相减，便消去了 y，即得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x = c_1a_{22} - c_2a_{12}. \tag{1.2}$$

类似地，可得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y = c_2a_{11} - c_1a_{21}. \tag{1.3}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，由(1.2) 和(1.3) 可得

$$x = \frac{c_1a_{22} - c_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \qquad y = \frac{c_2a_{11} - c_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

这就是方程组(1.1) 的解

我们用符号

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

来表示 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$. 有如下定义：

定义 1.1 把 $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ 四个数排成2行2列，并表示成式子

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1.4}$$

称为一个二阶行式.

二阶行列式有2行、2列，横排称为行，竖排称为列，$a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 称为行列式的元素，第一个下标 i 表示第 i 行，第二个下标 j 表示第 j 列，a_{ij} 就是表示行列式第 i 行、第 j 列相交处的那个元素. $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 叫做行列式的展开式，其计算结果为一个数，称为行列式的值.

这样二元线性方程组(1.1)的解可表示为

$$x=\frac{D_1}{D},\qquad y=\frac{D_2}{D}. \tag{1.5}$$

其中 $D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}\neq 0, D_1=\begin{vmatrix}c_1&a_{12}\\c_2&a_{22}\end{vmatrix}, D_2=\begin{vmatrix}a_{11}&c_1\\a_{21}&c_2\end{vmatrix}$.

例 1 解方程组

$$\begin{cases}2x-3y=3,\\x+y=4.\end{cases}$$

解 $D=\begin{vmatrix}2&-3\\1&1\end{vmatrix}=2\times1-(-3)\times1=5,$

$$D_1=\begin{vmatrix}3&-3\\4&1\end{vmatrix}=3\times1-(-3)\times4=15,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2&3\\1&4\end{vmatrix}=2\times4-3\times1=5.$$

所以原方程组的解为

$$x = \frac{D_1}{D} = 3, \qquad y = \frac{D_2}{D} = 1.$$

给定一个三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_3 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{1.6}$$

我们引进记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

表示代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{11}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

有如下定义：

定义 1.2 把 3^2 个数排成 3 行 3 列并记为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

称为一个三阶行列式，它表示一个算式，等于

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{1.7}$$

研究三阶行列式 D 的结构，可以得到计算三阶行列式的“对角线法则”，从三阶行列式的左上角到右下角的对角线称为主对角线，从三阶行列式的右上角到左下角的对角线称为副对角线．将行列式的第 1 列与第 2 列重写于 D 的右侧，主对角线和平行于主对角线上三元素之积取正号，副对角线和平行于副对角线上三元素之积职负号，然后相加便是行列式的值．

即

$$\begin{array}{ccc|cc} & & (-) & (-) & (-) \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ & & (+) & (+) & (+) \end{array} \tag{1.8}$$

其中位于三条实线上三个元素的乘积取正号,位于三条虚线上的三个元素的乘积取负号,代数和即是三阶行列式的值.

引进三阶行列式定义,线性方程组(1.6) 当系数组成的行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$ 时,(1.6) 的解可表示为

$$x = \frac{D_1}{D}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D}, \qquad x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

它是(1.6) 的惟一组解,其中

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

例 2 计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

解 用对解线法则,易得

$$\begin{aligned} D &= 2 \times (-5) \times 1 + (-4) \times 3 \times 1 + 1 \times (-1) \times 1 \\ &\quad - 1 \times (-5) \times 1 - (-4) \times 1 \times 1 - 3 \times (-1) \times 2 \\ &= -8. \end{aligned}$$

例 3 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x - 4y + z = 1, \\ x - 5y + 3z = 2, \\ x - y + z = -1. \end{cases}$$

解 因为

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -8, D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 11,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 9, D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 6.$$

所以该方程组的解为

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_1}{D} = -\dfrac{11}{8}, \\ y = \dfrac{D_2}{D} = -\dfrac{9}{8}, \\ z = \dfrac{D_3}{D} = -\dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

二、n 阶行列式的定义

为了引进 n 阶行列式的定义，我们进一步来研究三阶行列式的结构：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

它有 3 行和 3 列，而且

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}. \tag{1.9}$$

我们可以用二阶行列式来规定三阶行列式，按照这种方法，我们也可以用三阶行列式规定四阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$- a_{21}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$- a_{41}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{24} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} \tag{1.10}$$

为了便于表述，通常我们把位于行列式第 i 行第 j 列的元素记为 a_{ij}.

一般地，可用递归的方式来规定 n 阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}\begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} \tag{1.11}$$

n 阶行列式有 n 行、n 列，并有 n^2 个元素，元素 a_{11}、a_{22}、…、a_{nn} 称

为行列式的主对角元素．

在n阶行列式中，把元素a_{ij}所在第i行和第j列的各元素划去，留下来的元素按原次序构成的$n-1$阶行列式称为a_{ij}的余子式，记作M_{ij}，a_{ij}的余子式乘上$(-1)^{i+j}$称为a_{ij}的代数余子式，记作A_{ij}，即$A_{ij}=(-1)^{ij}M_{ij}$

例如三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

中a_{23}的代数余子式是$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

使用这种记号，n阶行列式又可以表示为

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{21} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}M_{11}-a_{21}M_{21}+\cdots+(-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1} \\ &= a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}. \qquad (1.12) \end{aligned}$$

此式称为n阶行列式按第1列元素的展开式．

第二节　行列式的性质

设 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{1.13}$$

如果把它的行列互换,而不改变各行各列的顺序,得到一个新的行列式

$$D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{1.14}$$

称行列式 D^T 为行列式 D 的转置行列式.

例如,行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

的转置行列式为

$$D^T = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

对于三阶行列式不难直接验证以下各性质:

(1) 行列式与其转置行列式的值相等,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

例如

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

(2) 交换行列式的两行,行列式的值仅改变符号,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

例如

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

(3) 行列式一行中的公因子可以提到行列式记号外,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

例如

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

(4) 若行列式有两行对应元素成比例,则该行列式的值为零,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \end{vmatrix} = 0.$$

例如

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

特别,当行列式中有两行相同,或有一行为零时,该行列式的值为零

例如

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

(5) 行列式某一行的各元素是两数的和时,该行列式可表示成两个行列式的和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

例如

$$\begin{vmatrix} 1+3 & 2+2 & 3+1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

(6) 行列式某一行的各元素乘以某数加到另一行的对应元素上,所得行列式的值不变,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11}+a_{21} & ka_{12}+a_{22} & ka_{13}+a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

例如,将