

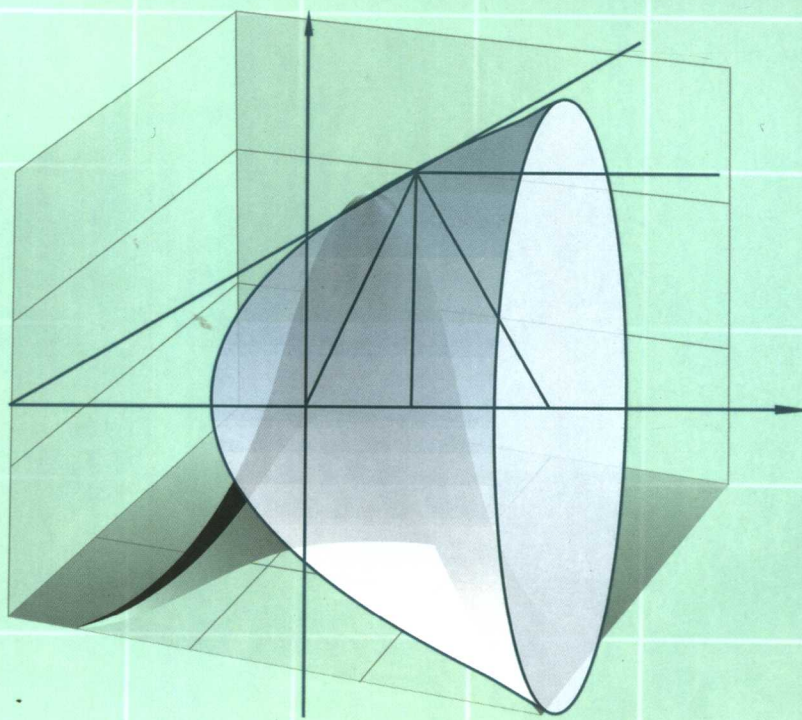
大学数学

应用题精讲

DAXUE SHUXUE

YINGYONGTI JINGJIANG

主 编 龚成通
副主编 曹宵临 李红英



华东理工大学出版社

EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

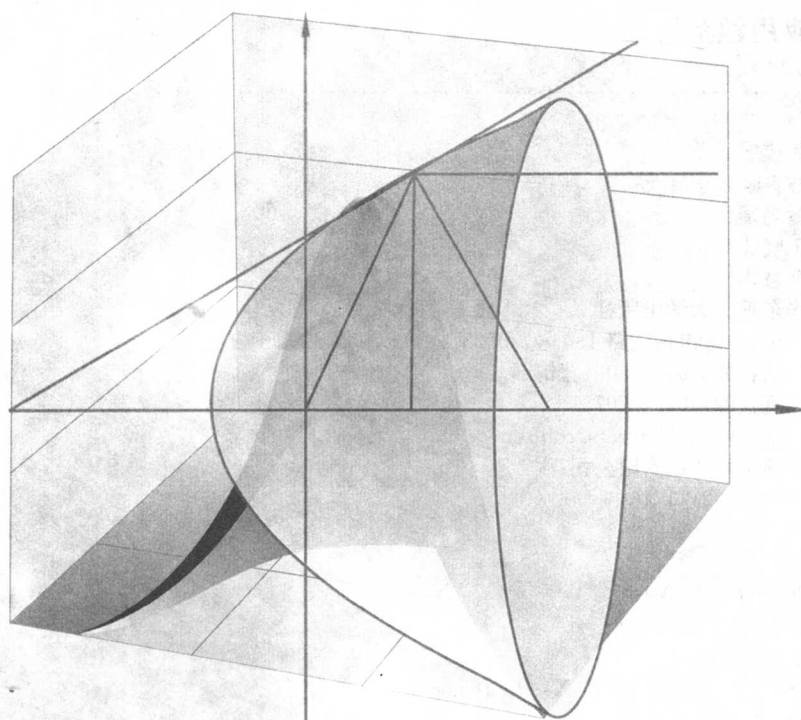
大学数学

应用题精讲

DAXUE SHUXUE

YINGYONGTI JINGJIANG

主 编 龚成通
副主编 曹宵临 李红英



华东理工大学出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

大学数学应用题精讲/龚成通主编. —上海:华东理工大学出版社, 2006. 5
ISBN 7-5628-1872-X

I. 大... II. 龚... III. 大学数学-高等学校-解题 IV. O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 031358 号

大学数学应用题精讲

.....

主 编 / 龚成通

副 主 编 / 曹宵临 李红英

责任编辑 / 徐惠娟

封面设计 / 王晓迪

责任校对 / 金慧娟

出版发行 / 华东理工大学出版社

地 址:上海市梅陇路 130 号, 200237

电 话:(021)64250306(营销部)

传 真:(021)64252707

网 址:www.hdlgpress.com.cn

印 刷 / 常熟华顺印刷有限公司

开 本 / 787×1092 1/16

印 张 / 18.25

字 数 / 445 千字

版 次 / 2006 年 5 月第 1 版

印 次 / 2006 年 5 月第 1 次

印 数 / 1—5050 册

书 号 / ISBN 7-5628-1872-X/O·166

定 价 / 28.00 元

内 容 提 要

本书为大学数学的教学参考书。它是根据教育部最新修订的教学大纲和考研大纲编写的,专门讲述大学数学应用题的分析方法与解题方法。所选题型紧扣大纲要求,解法具有一定的典型意义。

本书选编的应用问题大多是在作者长期从事大学数学教育和考研复习辅导工作所积累资料的基础上归纳整理而成,另外还搜集了国内外多种高等数学、线性代数、概率统计教材上丰富精彩的有关问题以及历年考研数学试卷中的部分应用题,本书中也有不少问题是作者精心设计的。为了便于学生训练,本书除了精选 201 个例题外,还配备了 90 道练习题,并附有详细解答。

对于大学低年级学生来说,本书是学习高等数学、线性代数、概率统计等课程的重要参考书。

对于有志于参加数学建模竞赛的学生来说,本书是一本理想的初级教程。

对于准备攻读硕士研究生的考生来说,数学应用题是一道较为难以逾越的坎。而通过对近年的考研数学试卷分析及考研大纲修订的动向分析,可得出这样的结论:数学应用题是考生们必须逾越的一道坎。本书是复习大学数学的必读辅导书。认真阅读本书,将帮助你成功跨越难关。

对于从事大学数学有关课程教学工作的老师、从事科学研究和工程技术的工作者以及广大数学爱好者来说,本书则是一本非常有用的数学参考书。

出版者的话

“考研要成功,去找龚成通。”在华东理工大学的学生中,说到高等数学的学习和复习,大家都会不约而同地想到龚成通老师。龚老师在学生们的心目中,既是博学精深的数学专家,也是循循善诱的师长。同学们对他的赞誉可从对他的别称中看出:“题库”、“字典”,而有的同学就直接尊称他为“通成功”。

下面三位参加 2006 年研究生入学考试的同学的感言,是从众多向龚老师报喜的信中挑选出来的,这些感言是对龚成通老师丰富教学经验的最好诠释:

潘细明(动 021 班) 大一高等数学答疑时,我只找龚老师,因为他总是能一语中的。读辅导书,他的《高等数学例题与习题》让我受益匪浅。这次考研,我数学考了 150 分。满分的好成绩,很大程度上归功于龚老师的辅导。

刘华(信工 021 班) 同学们都说龚老师高等数学教得好,因为当时没有选课制,我只能争取机会去“蹭”他的课。我听了龚老师的课总觉得有特别的收获。考研复习中,他非常注意突出难点、强调重点、抓住基本得分点、提醒可能丢分点,复习效果格外好。我复习的起步虽然较晚,但在龚老师的辅导下,这次数学考了 149 分。

谢娜(过程 002 班) 工作快两年了,我有了继续深造的愿望。在有幸得到龚老师指导的短短三个月复习时间内,龚老师针对我的情况,为我设定了 135 分的目标。他不急不躁,所选例题都很有针对性,使我信心倍增。在他的悉心辅导下,我轻松地突破了这一目标,并以 408 分的总分实现了成功跨越。

龚老师和他的同事们为使大学生学好高等数学,已在华东理工大学出版社出版了《高等数学起跑第一步》、《高等数学例题与习题》等书。这些教学辅导书再三重印,受到读者极大欢迎。这本《大学数学应用题精讲》更是集中了龚老师几十年教学的精华,将高深的数学与生活中的问题联系在一起,为学习数学建模,尤其是考研复习提供了详尽的解题思路及方法。

我们向你郑重推荐龚成通老师主编的《大学数学应用题精讲》一书,愿它在你的高等数学学习中及考研复习中助你一臂之力。

前 言

“学数学”是为了“用数学”，这是时代对我们的要求. 实际上它也符合唯物主义认识论的观点, 所谓“实践—理论—实践”, 从数学学科的角度来说, 就是“数学的理论来源于人类的社会实践, 反过来又被用来指导人类的社会实践”. 这一观点渐已成为数学教学界的共识.

“应用数学专业”的学生不屑于“数学的应用”, 这本来就是一个认识上的误区. 对于工科类、经济类专业的学生, 数学的应用应该更为重要.

大学数学在“数学的应用”方面的教学目标是培养学生的数学应用意识和数学应用能力. 其中对数学应用意识的培养尤为重要, 它要求人们能够用数学的眼光去看待和分析世界上的一切事物, 通俗地说就是养成“数学的兴趣”和“数学的习惯”, 这个培养过程是一个长期的潜移默化的过程. 对数学应用能力的培养, 是要求人们能够用数学的方法去处理和解决世界上的实际问题, 这个过程是一个严格培训和不断操练的过程, P. D. 拉克斯(当代数学家, 沃尔夫奖获得者)说“微积分是最适合这项工作的一门课程”.

对于一个人“用数学”的能力, 当然要在各人不同的岗位上处理不同的问题时, 才能得到真正的考验. 但是我们在学数学的不同阶段, 对此都要进行必要的测试. 无论是中考、高考、研考, 各种各类的考试也越来越体现出对“用数学”能力的考查.

近年来, 数学教学界乃至全社会都给以相当重视的数学建模竞赛, 就是对于“用数学”能力的最好测试与比赛方法.

但是由于各类考试与数学建模竞赛有很大的区别, 它受到了在考试时间(例如考研数学限考三小时)、考试形式(非开卷)和考查对象(非团队)等诸方面的限制, 所以也只有用最小的数学建模问题——应用题, 来作为检查测量学生的分析问题和解决问题能力(即“用数学”能力)的最合适手段.

我们在对历年考研试卷进行分析比较后, 可以充分地看出参加考研数学命题的老师们也在不断地加强着对应用题解题能力的考查力度. 自 1997 年以来, 理工类已考过诸如井底抓污泥、新技术推广、湖水污染的治理、压力计算、攀岩的方向、容器内匀速注水时液面面积的变化率、雪堆融化、汽锤作功、飞机滑行等问题, 这里还尚未包括各类几何方面、经济方面的应用及线性代数和概率统计方面的有关应用问题.

作者在长期的教学实践中发现, 应用问题历来都是学生们心目中的一个难点. 学数学时是这样, 后继课程中用到数学时还是这样, 考研时遇到应用题时的感觉更是这样.

对于进入大学开始学习数学的新生以及即将大学毕业准备考研的学生来说, 实在太需要一本有关应用题方面的参考书了. 纵观目前的书市, 专门讲数学应用题的书实在是凤毛麟角(李心灿老师的《高等数学应用 205 例》算是较经典的一本). 而适合作为学习(或考研复习)用的参考书就更没有看到过.

一般, 我们总是狭义地只把几何应用、物理应用、经济应用及日常生活中的应用作为应用问题来进行分析讨论.

对于几何方面的应用问题, 由于其范围极为广泛(它包括了平面和空间的一切问题在

内),而本书篇幅有限,我们只能选择一些具有较高综合性或具有一定实际背景的问题.

物理方面的应用问题是本书的重点内容,其内容也是十分广泛的,有力学、运动学、电磁学、热力学、光学等等.对此我们也进行了适当的选择,其取舍的标准是:(1)能够适合于工科类各专业(物理背景不能过于复杂、过于专业,例如电磁学、热力学、光学中的有关问题我们决定都舍去了);(2)问题的提出和解决都具有一定的典型意义,解题方法不能过于特殊.

为使读经济、管理类有关专业的学生也能方便地使用本书,我们对于经济类的应用题也给予了适当的重视.

至于日常生活中的应用题,一般没有任何专业知识的背景,只要根据一些简单的常识,就能建立起有关的数学模型.

从广义的范围看,包括研究函数的单调性、求函数的极值、求函数的平均值、研究方程根的存在性与唯一性以及证明不等式等问题,都可以称之为应用问题.由于这类问题更为广泛复杂,本书只选择其中具有一定综合性的问题,而对不具有任何实际方面的背景,本书一般也就不选编了.

对于使用本书的大学低年级同学来说,必须注意到,因为本书题材与方法的取舍是以综合应用为主基调的,因而在编写过程中,我们特别注意到将大学数学各门课程(主要是考研范围之内的三门课程:高等数学、线性代数、概率统计)的知识内容进行互相之间的前后融合与交叉渗透(当然,对于线性代数或概率论内容与高等数学融合在一起的问题,我们一般就不把它归类于高等数学之中).所以大学低年级同学在刚开始使用本书时,应该把这些问题先绕过不看.

对于将本书作为考研数学复习之用的同学来说,本书只能是各种考研复习资料的重要补充.虽然,在复习应用问题方面的作用,本书可能是独一无二的.但是,正由于本书是专门讲应用题的,所以其覆盖面总还是有一定的局限性,且解题方法也不可能非常全面(例如,高等数学中的斯托克斯公式、傅立叶级数等有关内容,作者尚没能构想出或搜集到有关的应用问题).从而仅依靠本书来进行系统的考研复习,肯定还是不够的,这点也是必须向准备考研的读者朋友说明的.

有些同学由于种种原因,考研复习起步较迟,由于复习时间不太充裕,在使用本书时可能会感到本书篇幅太大了一些.作者对你的建议是:你可以根据自己薄弱环节的具体情况,选择本书中的一部分问题细细研读.考虑到这种情况可能还不是少数,所以我们特别对所有问题进行了分章归类排列,并根据问题的内容给每个问题取了一个适当的小标题.这样,在看了大、小标题后,选择起来就有了一个大致的方向.

本书所选用的资料,是作者经过40多年来不断地收集整理而得的.其中大部分是作者从长期为大学新生及考研学生作答疑辅导过程中收集的,并在此基础上进行了适当归纳整理加工;也有一部分是作者采撷于各种文献资料;还有一大部分是作者自行构想创编的.所有构想创编的问题,虽然都是经过了主编自认为的深思熟虑和千锤百炼,但是百密难免一疏,欢迎读者朋友提出不同见解.

本书从积累资料到编写成书的整个过程中,得到了华东理工大学数学系很多老师的支持,特别是谢国瑞教授长期对本人的支持和鼓励,还有与本人合作一起参与考研复习辅导的老师们的热情支持.曹宵临、李红英与本人一起参与了本书的具体编写工作.为我们提供过有用素材的有(以下以姓氏拼音为序):李建奎、苏纯洁、王刚、许树声、殷锡鸣等老师.此外何

志庆、刘剑平、秦衍、孙龙祥、夏宁茂、张新发等老师共同参与过编写本书的立项和研讨工作。参加本书样稿校阅和修改工作的还有江志松老师,黄文亮、宋洁等老师也为本书的工作作出过一定的帮助。

最后要感谢华东理工大学教务处刘百祥老师及理学院鲁习文老师对本书编写工作的大力支持,如果没有他们对本书编写工作始终如一的督促、关心、支持和鼓励,本书的编写工作说不定还会有耽搁。还要感谢华东理工大学出版社的领导、编辑对本书能顺利出版所给予的巨大的帮助。

龚成通

2006 年 3 月

目 录

第一章 函数 极限 连续	(1)	2.15 最佳射门点问题	(28)
1.1 河面上水流的速度问题	(1)	2.16 斜抛物体的投射角问题	(28)
1.2 钢珠测内径问题	(2)	2.17 榴榴弹打到了日本鬼子的头上	(29)
1.3 曲柄连杆驱动机构问题	(2)	2.18 最短折痕问题	(30)
1.4 偏心驱动机构问题	(3)	2.19 充分利用纸张面积的版面安排	(31)
1.5 三星轧床宽度的调节	(4)	2.20 最小润周问题	(31)
1.6 上岸点问题	(4)	2.21 筷子问题	(32)
1.7 四面体上截面面积问题	(6)	2.22 大街小巷问题	(33)
1.8 当圆心角趋近于零时研究无穷小弓形面积与高的关系	(7)	2.23 梯子长度问题	(33)
1.9 铁丝温度问题	(7)	2.24 费尔马折射定律	(34)
1.10 四脚方椅的稳定问题	(8)	2.25 转运站问题	(35)
1.11 光滑的封闭曲线至少有一个外切正方形	(9)	2.26 学校的选址问题	(36)
练习一	(10)	2.27 耕牛饮水路线问题	(37)
1.12 牛头刨床的驱动机构问题	(10)	2.28 怎样才能使炮弹内装的弹药最多	(38)
1.13 克服静摩擦力的最小拉力	(11)	2.29 高速公路上前后两辆汽车间的间距问题	(39)
1.14 单调增加函数图形与其反函数图形的交点	(11)	2.30 最经济的航行速度问题	(40)
1.15 黄山旅游问题	(11)	练习二	(41)
练习一 解答	(11)	2.31 共焦椭圆与双曲线必正交	(41)
第二章 一元函数微分学	(13)	2.32 标枪枪头的运动轨迹问题	(41)
2.1 曲线运动的向心力问题	(14)	2.33 轮子匀速滚动时轮子边缘一个定点的运动速度	(41)
2.2 倒数螺旋线与阿基米德螺旋线的正交性	(14)	2.34 圆的切线的一个性质	(41)
2.3 两辆汽车的加速度问题	(16)	2.35 液面何时升高得最快	(41)
2.4 汽车加速度问题	(17)	2.36 外圆磨床砂轮的径向切入速度	(42)
2.5 油层在海面上的扩散问题	(18)	2.37 抗弯截面模量的最大值问题	(42)
2.6 开窗机构	(18)	2.38 浮筒体积的最大问题	(42)
2.7 讨论两条曲线交点的个数	(19)	2.39 Y形屋撑问题	(42)
2.8 求曲线的斜渐近线	(20)	2.40 另一个筷子问题	(43)
2.9 关于最小二乘原理	(22)	2.41 分针与时针针尖之间相离速度何时最大	(43)
2.10 两辆汽车之间的最近距离问题	(22)	2.42 变压器铁芯的最小外接圆	(43)
2.11 怎样使野生动物乐园的面积最大	(23)	2.43 抛物线上最短法线弦	(43)
2.12 磁盘上字节数的最大值	(24)	2.44 树干木材的增长率问题	(43)
2.13 圆锥形容器的容积问题	(25)	练习二 解答	(44)
2.14 灯柱的最佳高度	(27)	第三章 一元函数积分学	(51)
		3.1 根据导函数图形求函数的最大值和	

最小值	(51)	3.35 这场大雪是从何时开始下的	(81)
3.2 根据函数图形求有关定积分	(52)	3.36 怎样解释“一桶”油漆无法涂满油漆桶的表面	(81)
3.3 八月中秋吃月饼 一个月饼四等分	(52)	练习三	(82)
3.4 求 $n-1$ 条曲线将给定的曲边三角形面积 n 等分	(53)	3.37 抛物线下曲边三角形面积的一个性质	(82)
3.5 “抛物线弓形”面积的最小值	(54)	3.38 两条曲线长度之比较	(82)
3.6 铁路、公路与盘山小路长度之比较	(55)	3.39 曲线弧长与切线倾角之间的关系	(83)
3.7 证明两条闭曲线之周长相等	(55)	3.40 底部的洞不在边缘的情况下容器还能盛多少水	(83)
3.8 求一条曲线的全长	(56)	3.41 铁球刚好全部浸没在容器所盛的液体中的条件	(83)
3.9 求一条以极径为自变量的极坐标曲线之长度	(57)	3.42 求一条曲线,使它与给定直线所围图形绕 x 轴旋转所得立体的体积最小	(83)
3.10 求体积的辛普森公式	(57)	3.43 三次曲线的一个特性	(83)
3.11 餐巾环问题	(59)	3.44 求一个曲边三角形面积变化率的最大值	(83)
3.12 底部有洞的容器还能盛多少水	(60)	3.45 正放梯形板与倒放梯形板一侧所受水压力之比	(84)
3.13 比较这些旋转体的体积	(61)	3.46 克服弹性恢复力所作的功	(84)
3.14 圆柱形的容器何时会露出底部	(62)	3.47 引力所作的功	(84)
3.15 求旋转体体积的最小值	(62)	3.48 不均匀筷子的平衡问题	(84)
3.16 可变旋转体体积的二阶导数	(63)	3.49 圆内过圆周上一个定点的弦长之均方根	(84)
3.17 有两个拐点的四次曲线的一个特性	(64)	3.50 原点在等轴双曲线切线上投影轨迹曲线所围图形之面积	(84)
3.18 潜艇观察窗窗面上所受到的水压力	(65)	3.51 子弹弹道的最大长度	(84)
3.19 把链条全部拉上桌面需要作的功	(67)	练习三 解答	(85)
3.20 击水泥桩入泥土中的作功问题	(68)	第四章 向量 空间解析几何	(92)
3.21 汽缸内气体的膨胀功	(69)	4.1 垂直渡河问题	(92)
3.22 清除井底污泥需作的功	(70)	4.2 风向问题	(92)
3.23 抽水作功问题	(70)	4.3 三角形的面积公式	(93)
3.24 水中提取物体所做的功问题	(71)	4.4 内积的最值问题	(93)
3.25 质线对质点的引力问题	(72)	4.5 线段被坐标面等分的问题	(94)
3.26 质线的质心	(74)	4.6 两个质点之间的最小距离	(95)
3.27 单调增加函数的平均值也是单调增加函数	(74)	4.7 运动质点系的质心轨迹问题	(95)
3.28 函数在无穷区间上的平均值	(75)	4.8 质点系质心的一个性质	(96)
3.29 圆内平行弦长度的平均值	(76)	4.9 空间直线关于平面镜的镜像	(97)
3.30 非负连续函数的平均值不大于它的均方根	(77)	4.10 求高射炮的火力范围	(98)
3.31 容器内液面升高的速度	(78)	4.11 蚂蚁在圆锥面上走过的轨迹	(99)
3.32 水从容器侧壁上的矩形孔中流出的流量	(78)	4.12 立体在坐标面上的投影区域	(100)
3.33 伐木工如何砍树的问题	(79)	练习四	(101)
3.34 珠子沿曲线下滑所需要的时间	(80)		

4.13	三个匀速运动之质点构成的运动 三角形面积的变化趋势	(101)	6.4	球状容器何时会露出底部	(130)
4.14	过给定直线作一个与坐标原点距离 最远的平面	(101)	6.5	“不倒翁”的身高	(132)
4.15	与 z 轴不共面的直线绕 z 轴旋转 所得的曲面方程	(101)	6.6	“贱骨头”陀螺停止转动后其中心轴 与地面的夹角	(133)
4.16	圆柱面螺旋线的切线与中心轴的 夹角	(101)	6.7	半环体质心在环面上的条件	(134)
4.17	求一个旋转曲面的面积与该曲面所 围成的立体体积	(101)	6.8	球体对球体内一个质点的引力	(135)
4.18	第一宇宙速度问题	(101)	6.9	椭球体关于过其中心的直线的转动 惯量及其最值	(136)
练习四	解答	(102)	6.10	潮涨潮落间小岛露出海面的面积 之比	(138)
第五章	多元函数微分学	(105)	6.11	雪堆融化问题	(139)
5.1	并联可变电阻总电阻的调节问题	(106)	6.12	人口分布密度的统计模型	(141)
5.2	转动惯量的最小值问题	(107)	6.13	消防车喷水枪喷水速度与枪口面积 成反比	(141)
5.3	圆内接多边形面积的最大值	(107)	6.14	均匀球面对球面上—质点的引力	(142)
5.4	再谈野生动物乐园的面积问题	(109)	6.15	地球对彗星引力所作的功	(144)
5.5	关于两条线段乘积的最小值问题	(111)	6.16	陀螺的转动动能	(145)
5.6	最小润周问题中角度的确定	(112)	6.17	地球上空空气的总量问题	(146)
5.7	节约用水很重要——洗衣淘米 问题	(113)	6.18	航天器密封舱在海面上的溅落 问题	(146)
5.8	开凿运河的问题	(114)	6.19	曲顶柱面的面积	(147)
5.9	三个海岛之间的三角形环形航线 问题	(115)	6.20	阿基米德浮力定理	(148)
5.10	鲨鱼的进击路线	(117)	练习六		(149)
5.11	攀岩路线问题	(118)	6.21	三个正交圆柱面所界立体的体积	(149)
5.12	屋顶上雨滴流动的轨迹	(118)	6.22	半椭球体稳定平衡的条件	(149)
5.13	证明给定曲面是柱面	(119)	6.23	惠更斯平行轴定理	(149)
5.14	切平面经过定点的一个曲面	(120)	6.24	大球内挖去两个小球后所剩下立体 的转动惯量	(149)
5.15	证明两族曲面正交	(121)	6.25	空心球体对中空部分一个质点的 引力	(149)
练习五		(121)	6.26	匀质正方体关于过中心轴之转动 惯量与轴的方向无关	(149)
5.16	转运站问题之再讨论	(121)	6.27	球形压力容器的周向应力问题	(149)
5.17	边长确定的四边形面积何时最大	(122)	6.28	平面薄板在坐标面上投影区域的 形心	(150)
5.18	最大过水面积问题	(122)	6.29	利用第一型曲线积分求旋转曲面 面积	(150)
5.19	三个海岛之间的三角形网的面积 问题	(122)	6.30	戈鲁金定理	(150)
5.20	热锅上的蚂蚁往何处逃	(122)	练习六	解答	(150)
5.21	曲面 $f(x^2 + y^2, z) = 0$ 的法线	(122)	第七章	微分方程	(157)
练习五	解答	(122)	7.1	求与给定曲线族对应的微分方程	(157)
第六章	多元函数积分学	(127)	7.2	曳物线问题	(158)
6.1	管道内流体的平均流速	(127)	7.3	小船的航线	(159)
6.2	平面薄板一侧所受的水压力定理	(128)			
6.3	一壶咖啡能倒满几杯	(129)			

7.4 鸭子的游动路线	(160)	7.39 降落伞着地时的速度问题	(189)
7.5 猎狗互相追逐问题	(161)	7.40 子弹击穿木板问题	(189)
7.6 旋转容器内液面形状问题	(162)	7.41 弹性横梁的振动问题	(190)
7.7 电动机降温问题	(162)	7.42 绳索在钉子上滑动问题	(190)
7.8 容器内溶液的含盐量问题	(163)	7.43 核废料桶的处理问题	(190)
7.9 半球形漏斗的漏水问题	(164)	7.44 另一个容器侧壁形状问题	(190)
7.10 污水治理问题	(165)	7.45 弓形面积有确定表达式的曲线 方程	(190)
7.11 冷却定理与破案问题	(166)	练习七 解答	(190)
7.12 新技术的推广问题	(167)	第八章 数列 级数	(197)
7.13 二级化学反应的速度问题	(168)	8.1 无限连分数与黄金分割问题	(197)
7.14 卫星信号接收天线(小耳朵)的 形状问题	(169)	8.2 兔子的繁殖(斐波那契数列)与 黄金数之间的关系	(199)
7.15 桥墩形状问题	(170)	8.3 猪肉产销的蛛网模型	(200)
7.16 “恩恩爱爱纤绳荡悠悠”——悬链线 问题	(171)	8.4 一个与 n 值有关的方程根 x_n 所 构成数列的极限	(202)
7.17 第二宇宙速度问题	(173)	8.5 一个与切线有关的级数问题	(204)
7.18 炮仗能飞多高	(174)	8.6 一个与面积有关的级数问题	(205)
7.19 关闭动力的汽艇还能滑行多远 ..	(175)	8.7 利用级数方法来证明关于循环小数 的算术命题	(205)
7.20 弹簧振动问题	(176)	8.8 这个十进位无限小数是有理数吗 ..	(206)
7.21 链条沿桌面滑动问题	(177)	8.9 银行存款问题	(207)
7.22 浮筒的振动问题	(178)	8.10 追踪运动信号源	(208)
7.23 速住走私船——追线问题	(179)	练习八	(209)
7.24 冰雹下落的速度问题	(180)	8.11 另一个与 n 值有关的方程根 x_n 所 构成数列的极限	(209)
7.25 雨滴下落的速度问题	(181)	8.12 一个与递归定义数列有关的数列的 极限	(209)
7.26 单摆(数学摆)小幅摆动的等时性 ..	(182)	8.13 一个与广义面积有关的级数问题 ..	(209)
7.27 小钢珠在上凹曲线底部来回滚动 的周期	(183)	8.14 一个与 n 值有关的方程根 x_n 所 构成级数的敛散性	(209)
7.28 等速下降曲线问题	(184)	练习八 解答	(210)
7.29 容器侧壁形状问题	(185)	第九章 经济方面的应用	(212)
7.30 曲边梯形面积与曲边弧长成正比 的曲线方程	(186)	9.1 如何定价可使利润最大	(212)
7.31 两条切线在 y 轴上截下来的线段 与弧长相等的问题	(187)	9.2 如何确定日产量以获取最大效益 ..	(213)
练习七	(188)	9.3 涨价对销售收入的影响	(213)
7.32 求以给定曲线族为通积分曲线族 的微分方程	(188)	9.4 求使平均成本为最小的生产水平 ..	(215)
7.33 与给定曲线族正交的曲线族问题 ..	(188)	9.5 关于市场的饱和需求量与需求量 增加率的问题	(215)
7.34 小虫爬行的轨迹问题	(188)	9.6 关于经济订购批量和批次问题 ..	(216)
7.35 就下列各种不同容器的情况重解 7.9 题	(188)	9.7 确定适当的生产水平使税后利润 有最大值	(217)
7.36 新鲜空气的输入速度问题	(189)	9.8 使利润最大的最优广告支出	(218)
7.37 中间储槽的容积问题	(189)		
7.38 马王堆一号汉墓年代的考证	(189)		

9.9 已知边际成本和边际收入求最大利润	(219)	10.9 判断方程所表示的曲面形状	(240)
9.10 求投资的回收期及投资的资本价值	(219)	10.10 证明所给曲面是圆锥面	(241)
9.11 选择哪一个方案领取住房补贴 ..	(220)	10.11 二元函数取得极值的充分条件	(243)
9.12 转售机器的最佳时间	(221)	10.12 经过技术培训后熟练工和非熟练工的比例	(244)
9.13 同一产品在两个不同市场上的销售策略	(223)	练习十	(246)
9.14 两种不同产品在同一市场上的销售策略	(224)	10.13 平面上不共线的三点所确定的圆的方程	(246)
9.15 如何确定鱼苗的投放量	(225)	10.14 三曲面在公共点处法向量线性相关的一个充分条件	(246)
9.16 最优广告投入策略	(225)	10.15 两向量之间的夹角具有正交变换不变性	(246)
9.17 根据弹性求需求函数	(226)	10.16 判断给定方程所表示的曲面形状	(246)
练习九	(227)	10.17 曲面在坐标面上的投影	(246)
9.18 证明固定替代弹性生产函数的极限就是 C-D 生产函数	(227)	练习十 解答	(247)
9.19 用收益对需求的边际、收益对价格的边际以及需求对价格的弹性来表示价格和需求量	(227)	第十一章 概率论与数理统计	(251)
9.20 新酿的好酒窖藏多少年后出售可使销售收入的现值最大	(227)	11.1 蒲丰掷针试验	(251)
9.21 何时停产(停止新的投入)可使企业获最大利润	(227)	11.2 敌方军事目标被炸中的概率	(253)
9.22 在产量确定的条件下,求两种要素的投入量使投入总费用最省	(228)	11.3 求“带了伞但没下雨”和“天下雨而没带伞”的概率	(253)
9.23 在两种要素的投入总费用确定的条件下,求产量的最大值	(228)	11.4 方程有实数根的概率	(254)
9.24 关于 Cobb-Douglas 生产函数弹性与边际的某些性质	(228)	11.5 候车问题	(255)
9.25 一个差分方程的求解问题	(228)	11.6 药效的判断问题	(256)
练习九 解答	(228)	11.7 与圆周上任一点有关的随机变量的分布问题	(257)
第十章 线性代数	(232)	11.8 投篮次数的分布	(258)
10.1 两条空间直线之间的关系	(232)	11.9 随机投点问题	(259)
10.2 平面上三条直线共点的充要条件 ..	(233)	11.10 呼叫信号的平均次数	(259)
10.3 三张平面之间的相对位置	(235)	11.11 利润的期望值	(260)
10.4 空间四个点不共面的充要条件 ..	(235)	11.12 哪一种化验方案好	(261)
10.5 平面曲线的曲率具有正交变换不变性	(236)	11.13 票券收集问题	(262)
10.6 光滑曲线的弧长具有正交变换不变性	(237)	11.14 汽车载重量问题	(264)
10.7 简单光滑闭曲线所围图形的面积具有正交变换不变性	(238)	11.15 电话线路设置问题	(265)
10.8 给定曲面是椭球面的充分必要条		11.16 不合格品率的估计问题	(265)
件	(239)	11.17 无偏估计及有效性	(266)
		11.18 居民对某种商品的平均需求量的估计问题	(267)
		11.19 炮弹的炮口速度的标准差的置信区间	(267)
		11.20 不同方案下平均产量之差的置信区间	(268)

11.21 矩形工艺品是否为黄金矩形	(269)	11.29 最佳批销量	(272)
11.22 包装机是否正常工作	(269)	11.30 最佳库存量	(272)
11.23 杜鹃蛋的长度是否与被它们所 占据的鸟巢有关	(270)	11.31 产品数的期望与方差	(272)
11.24 不同银行储户的平均年存款余额 有无显著差异	(270)	11.32 汽车通过的路口数的分布	(272)
练习十一	(271)	11.33 保险公司理赔问题	(272)
11.25 圆周上两点间弦长在某个范围的 概率	(271)	11.34 平均工时的置信限	(273)
11.26 信号传输问题	(272)	11.35 饭店的优惠措施对订位率是否有 显著影响	(273)
11.27 新药有效的概率	(272)	11.36 不同方案对产品得率的影响	(273)
11.28 商场内不同性别顾客人数的分布 问题	(272)	练习十一 解答	(273)
		参考文献	(278)

函数 极限 连续

除了微分方程问题外,一般试题中单独以建立函数关系式为目标的应用题,也许是不会有的.但是建立函数关系式在大部分应用问题的解题过程中,都是至关重要的.

例如在求最大(或最小)值时,对于所需考察的目标值之优劣,必须建立有一个数量化的描述关系式,我们才能正确地对此进行客观的评价比较,而写出这个数量化的描述式,我们就称之为“建立目标函数”.

又如在求解与两个变量变化率之间关系的相关变化率问题时,就要先建立起两个变量之间的相关关系式.

再如在使用阿基米德切片法(也称平行截面法)求某些立体的体积时,必须求出不同位置的平行截面的面积函数表达式.

一般所要求建立的函数关系都是指函数的解析表达式(包括参数方程、隐函数方程的形式),所用之方法不外乎两种:一是利用几何知识,二是根据物理原理.

在求出函数解析表达式后,还要写出它的定义域.对于应用题来说,必须注意到这样一点:其定义域指的是符合实际意义的“实际定义域”,而不是撇开实际背景不管的定义域(即“自然定义域”).

1.1 河面上水流的速度问题

在宽为 $2R$ 的河面上,任一点处的流速与该点到两岸距离之积成正比.已知河道中心线处水的流速为 v_0 ,则河面上距河道中心线 r 处河水的流速 v ,可表示为关于自变量 r 的函数关系 $v(r) = \underline{\hspace{2cm}}$;河面上水流的平均流速,即 $v(r)$ 在区间 $[-R, R]$ 上的平均值 $\bar{v} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 在河面上距河道中心线距离为 r 的点处,到两岸的距离分别为 $R-r$ 和 $R+r$ (图 1-1),据题意可知,该点处的流速为

$$v(r) = k(R-r)(R+r) = k(R^2 - r^2).$$

因为在河道中心线处流速为 v_0 ,即 $v(0) = v_0$,由此可求得

$$k = \frac{v_0}{R^2},$$

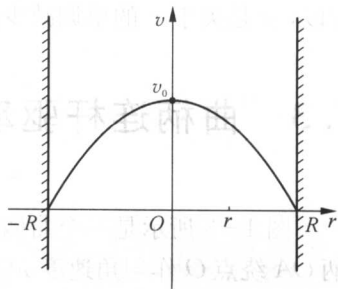


图 1-1

代入上式就得到所求的函数关系为

$$v(r) = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right), \quad -R \leq r \leq R.$$

利用定积分可求出它在区间 $[-R, R]$ 上的平均值为

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{1}{2R} \int_{-R}^R v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) dr = \frac{v_0}{2R} \left(r - \frac{r^3}{3R^2} \right) \Big|_{-R}^R \\ &= \frac{2}{3} v_0. \end{aligned}$$

1.2 钢珠测内径问题

有一种测量中空工件内径的方法,就是用半径为 R 的钢珠放在圆柱形内孔上,只要测得了钢珠顶点与工件端面之间的距离为 x ,就可以求出工件内孔之半径 y . 试求出利用 x 的函数来表示 y 的解析表达式,并证明 y 是关于 x 的单调减少函数,这里工件端面是垂直于内孔圆柱面中心轴的平面.

解 在图 1-2 中,可以看出

$$OC = DC - DO = x - R,$$

根据勾股定理有

$$\begin{aligned} y = AC &= \sqrt{OA^2 - OC^2} = \sqrt{R^2 - (x - R)^2} \\ &= \sqrt{2Rx - x^2}. \end{aligned}$$

这里函数的自然定义域是 $0 \leq x \leq 2R$,但是与实际意义不完全相符,所以应该按照实际意义重新确定其实际定义域为

$$R < x < 2R.$$

y 显然是关于 x 的可导函数,且有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{R - x}{\sqrt{2Rx - x^2}} < 0, \quad R < x < 2R,$$

所以, y 是关于 x 的单调减少函数.

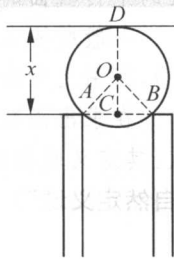


图 1-2

1.3 曲柄连杆驱动机构问题

图 1-3 所示是一个曲柄连杆驱动机构,其中曲柄 OA 长 r ,连杆 AB 长 $l (> 2r)$,当曲柄 OA 绕点 O 作匀角速度 ω (弧度/秒) 旋转时,使连杆 AB 推动滑块 B 沿直线 PQ 来回滑动,求滑块 B 的运动规律,并求其速度等于零时,加速度的值(这里设直线 PQ 通过点 O).

解 以 O 为坐标原点, OPQ 方向为正向建立坐标轴 x . 则在时刻 t , 有

$$A = (r \cos \omega t, r \sin \omega t),$$

设 N 为点 A 在 x 轴上的投影, 则

$$ON = r \cos \omega t, AN = r \sin \omega t.$$

于是得到滑块 B 的运动规律为

$$x = ON + NB = r \cos \omega t + \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega t}.$$

其速度为

$$v = \frac{dx}{dt} = -r\omega \sin \omega t - \frac{r^2 \omega \sin \omega t \cos \omega t}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega t}},$$

令 $v = 0$, 得在一个周期 $\left[0, \frac{2\pi}{\omega}\right)$ 内的解为 $t = 0$ 和 $t = \frac{\pi}{\omega}$.

再求导即可得加速度为

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -r\omega^2 \cos \omega t - \frac{r^2 \omega^2 (\cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t) (l^2 - r^2 \sin^2 \omega t) - r^4 \omega^2 \sin \omega t \cos \omega t}{(l^2 - r^2 \sin^2 \omega t)^{\frac{3}{2}}},$$

从而有 $a \Big|_{t=0} = -r\omega^2 \left(1 + \frac{r}{l}\right)$, $a \Big|_{t=\frac{\pi}{\omega}} = r\omega^2 \left(1 - \frac{r}{l}\right)$.

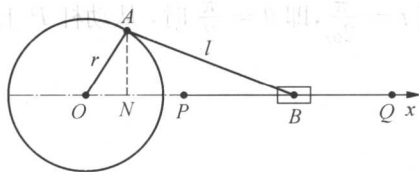


图 1-3

1.4 偏心驱动机构问题

图 1-4 表示的是一个偏心驱动机构, 已知偏心圆半径为 r , 偏心距为 e ($0 < e < r$), 当圆心 C 绕偏心 O 以匀角速度 ω 旋转时, 平底从动杆 P 会作上下往复运动, 求从动杆 P 上升速度的最大值.

分析 本题首先必须求出从动杆底部到偏心 O 的距离 h 与时间 t 之间的函数关系 $h = h(t)$.

解 设时刻 t 转动角为 θ , 则 $\theta = \omega t$. 所以可求出从动杆 P 的位移 h 与时间 t 之间的函数关系

$$h = CA - OC' \cos \theta = r - e \cos \omega t.$$

求导, 可得从动杆 P 上升速度为

$$\frac{dh}{dt} = e\omega \sin \omega t,$$

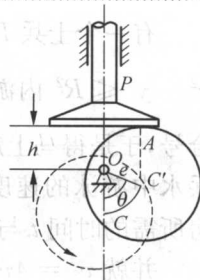


图 1-4