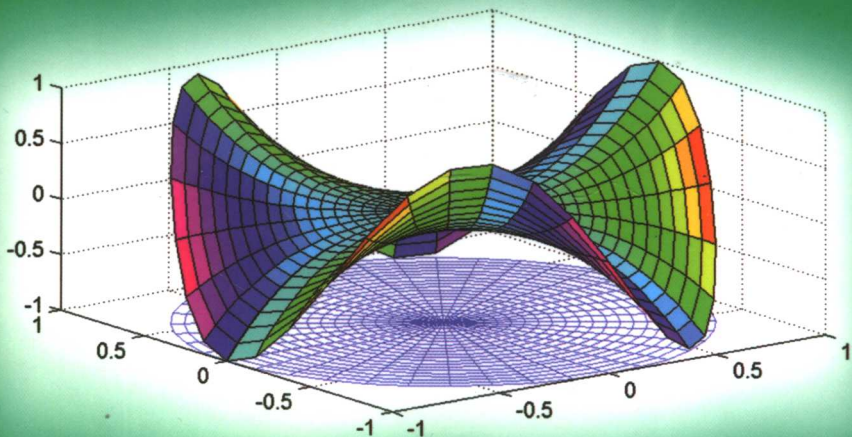


“十一五”国家级规划教材配套用书

工科微积分

同步辅导

大连理工大学应用数学系/组编



大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

“十一五”国家级规划教材配套用书

工科微积分同步辅导

大连理工大学应用数学系 组编

主编 曹铁川

编者 (以编写章节前后排序)

张海文	曹铁川	梁传广
庞丽萍	李 林	蒋志刚

大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

工科微积分同步辅导 / 大连理工大学应用数学系组编.
大连: 大连理工大学出版社, 2006. 9
ISBN 7-5611-3351-0

I. 工… II. 大… III. 微积分—高等学校—教学
参考资料 IV. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 105291 号

大连理工大学出版社出版

大连市软件园路 80 号 邮政编码 116023

发行: 0411-84708842 邮购: 0411-84703636 传真: 0411-84701466

E-mail: dutp@dutp.cn URL: <http://www.dutp.cn>

大连理工印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸: 140mm×203mm
2006 年 9 月第 1 版

印张: 14.5 字数: 497 千字
2006 年 9 月第 1 次印刷

责任编辑: 范业婷

责任校对: 孙伟丽

封面设计: 宋 蕾

定 价: 19.80 元

前言

数学是高等理工科院校的主要基础理论课,微积分在其中占有主体地位。它不仅为未来的工程技术工作者提供必要的、不可或缺的数学概念、数学理论和数学方法,而且对于学习者在锻炼思维、培养能力、提高素质等方面,具有不可替代的潜在功能。

大连理工大学应用数学系组编,大连理工大学出版社出版的《工科微积分》是普通高等教育“十一五”国家级规划教材。它在汲取传统教材和其他改革教材的长处,对工科大学现状进行分析定位,总结教学改革成果基础上编写而成。这本教材遵循认识规律,以微积分思想创立和发展过程为主线,适当调整知识体系,提示教学发现,突出应用意识培养,加强能力训练,具有结构合理、难度适中、风格鲜明等特点。我们编写的《工科微积分同步辅导》,旨在帮助在校学生更好地学好这门课程,同时它也可以作为教师的教学参考用书,以及考研学子全面复习高等数学的自学辅导书。

本书编写的体例是以《工科微积分》的章节为序,按节编写,与教学保持同步,每节包括以下4个版块:

内容提要 简要归纳本节主要内容,整理并罗列出该节的主要概念、定理、公式和重要结果,并对这些内容提出教学要求,使学习者脉络明晰地把握要点。

释疑解惑 一些学生刚升入高校,还不能完全适应大学的学习方式,往往对概念的学习重视不够,加之课堂知识密度较中学大得多,所以对一些概念的理解似是而非,不够准确。针对初学者常问及的带有共性的问题,进行释疑解惑,分析点拨。希望读者由此受到数学抽象性、逻辑性和严谨性的熏陶。

例题解析 学数学就要做数学。学习数学的过程就是对数学进行操作、演习和思维实验的过程,做习题是其中的重要环节。我们按

行操作、演习和思维实验的过程,做习题是其中的重要环节。我们按照本书教学内容,选择若干概念性、启发性、综合性较强的题目。对其剖析解题思路,归纳解题经验,为读者开阔眼界、提升水平提供平台。在这些例题中,有些选自历年工科硕士生入学试题。

习题精解 选择教材中的部分习题(约占40%)给予解答。对选择的题目既要注意题型齐全,又要保证有一定难度,解题过程保留了解题依据和关键步骤。

本书由大连理工大学应用数学系组织编写。曹铁川任主编并负责统稿。具体执笔者为张海文(第1章,第2章部分内容)、曹铁川(第3~4章,第7章,第2章和第8章的部分内容)、梁传广(第5章)、庞丽萍(第6章)、李林(第2章和第8章的部分内容)、蒋志刚(第9章)。

本书编写过程中参阅了工科数学课程指导委员会编写的《高等数学释疑解难》,在此表示感谢。

限于编者水平,书中的疏漏与缺点在所难免,恳请同行和读者不吝指正。

编者

2006年9月

目 录

第一章 函数、极限与连续

第一节 函数/1

内容提要/1 释疑解惑/2 例题解析/3 习题精解/5

第二节 极限/10

内容提要/10 释疑解惑/10 例题解析/12 习题精解/13

第三节 极限的性质与运算/16

内容提要/16 释疑解惑/17 例题解析/18 习题精解/20

第四节 单调有界原理和无理数 e /23

内容提要/23 释疑解惑/23 例题解析/24 习题精解/25

第五节 无穷小的阶/26

内容提要/26 释疑解惑/26 例题解析/27 习题精解/28

第六节 函数的连续和间断/30

内容提要/30 释疑解惑/31 例题解析/32 习题精解/33

第七节 闭区间上连续函数的性质/36

内容提要/36 释疑解惑/37 例题解析/38 习题精解/40

复习题一/41

第二章 一元函数微分学及其应用

第一节 导数概念/47

内容提要/47 释疑解惑/48 例题解析/50 习题精解/52

第二节 求导法则/56

内容提要/56 释疑解惑/57 例题解析/59 习题精解/61

第三节 高阶导数与相关变化率/66

内容提要/66 释疑解惑/67 例题解析/67 习题精解/69

第四节 函数的微分与函数的局部线性逼近/73

内容提要/73 释疑解惑/74 例题解析/75 习题精解/76

第五节 利用导数求极限——洛必达法则/79

内容提要/79 释疑解惑/80 例题解析/82 习题精解/84

第六节 微分中值定理/87

内容提要/87 释疑解惑/87 例题解析/89 习题精解/92

第七节 泰勒公式——用多项式逼近函数/94

内容提要/94 释疑解惑/95 例题解析/97 习题精解/99

第八节 利用导数研究函数的性态/102

内容提要/102 释疑解惑/104 例题解析/105 习题精解/107

第九节 平面曲线的曲率/112

内容提要/112 释疑解惑/113 例题解析/114 习题精解/116

复习题二/117**第三章 一元函数积分学及其应用****第一节 定积分的概念、性质、可积准则/126**

内容提要/126 释疑解惑/127 例题解析/128 习题精解/130

第二节 微积分基本定理/134

内容提要/134 释疑解惑/135 例题解析/137 习题精解/140

第三节 不定积分/143

内容提要/143 释疑解惑/144 例题解析/145 习题精解/148

第四节 定积分的计算/154

内容提要/154 释疑解惑/155 例题解析/156 习题精解/157

第五节 定积分应用举例/161

内容提要/161 释疑解惑/162 例题解析/163 习题精解/166

第六节 反常积分/170

内容提要/170 释疑解惑/171 例题解析/172 习题精解/173

复习题三/175**第四章 微分方程****第一节 微分方程的基本概念/188**

内容提要/188 释疑解惑/188 例题解析/189 习题精解/190

第二节 某些简单微分方程的初等积分法/192

内容提要/192 释疑解惑/192 例题解析/193 习题精解/197

第三节 微分方程应用举例/202

内容提要/202 释疑解惑/202 例题解析/203 习题精解/205

第四节 高阶线性方程/208

内容提要/208 释疑解惑/210 例题解析/211 习题精解/213

复习题四/217

第五章 向量代数与空间解析几何

第一节 向量及其运算/229

内容提要/229 释疑解惑/230 例题解析/231 习题精解/232

第二节 点的坐标与向量的坐标/234

内容提要/234 释疑解惑/235 例题解析/236 习题精解/237

第三节 空间的平面与直线/240

内容提要/240 释疑解惑/241 例题解析/243 习题精解/244

第四节 曲面与曲线/248

内容提要/248 释疑解惑/248 例题解析/249 习题精解/251

复习题五/253

第六章 多元函数微分学及其应用

第一节 多元函数的基本概念/257

内容提要/257 释疑解惑/257 例题解析/258 习题精解/260

第二节 偏导数与高阶偏导数/262

内容提要/262 释疑解惑/262 例题解析/263 习题精解/265

第三节 全微分及其应用/266

内容提要/266 释疑解惑/266 例题解析/267 习题精解/269

第四节 多元复合函数的微分法/271

内容提要/271 释疑解惑/272 例题解析/272 习题精解/274

第五节 偏导数的几何应用/277

内容提要/277 释疑解惑/278 例题解析/279 习题精解/280

第六节 多元函数的极值/282

内容提要/282 释疑解惑/283 例题解析/286 习题精解/288

第七节 方向导数与梯度/290

内容提要/290 释疑解惑/291 例题解析/292 习题精解/294

复习题六/297

第七章 多元数量值函数积分学

第一节 多元数量值函数积分的概念与性质/305

内容提要/305 释疑解惑/306 例题解析/306 习题精解/308

第二节 二重积分的计算/310

内容提要/310 释疑解惑/311 例题解析/314 习题精解/317

第三节 三重积分的计算/323

内容提要/323 释疑解惑/324 例题解析/325 习题精解/327

第四节 数量值函数的曲线与曲面积分的计算/331

内容提要/331 释疑解惑/332 例题解析/334 习题精解/336

第五节 数量值函数积分应用举例/339

内容提要/339 释疑解惑/339 例题解析/341 习题精解/344

复习题七/345

第八章 向量值函数的曲线积分与曲面积分

第一节 向量值函数在有向曲线上的积分/360

内容提要/360 释疑解惑/361 例题解析/363 习题精解/365

第二节 向量值函数在有向曲面上的积分/368

内容提要/368 释疑解惑/369 例题解析/371 习题精解/373

第三节 各种积分之间的联系/376

内容提要/376 释疑解惑/377 例题解析/380 习题精解/382

第四节 平面曲线积分与路径无关的条件/385

内容提要/385 释疑解惑/386 例题解析/386 习题精解/389

第五节 场论简介/392

内容提要/392 例题解析/393 习题精解/393

复习题八/395

第九章 无穷级数

第一节 常数项级数的概念与基本性质/402

内容提要/402 释疑解惑/403 例题解析/405 习题精解/406

第二节 正项级数及其敛散性的判别法/407

内容提要/407 释疑解惑/409 例题解析/413 习题精解/415

第三节 任意项级数及其敛散性的判别法/418

内容提要/418 释疑解惑/419 例题解析/422 习题精解/423

第四节 幂级数/425

内容提要/425 释疑解惑/427 例题解析/433 习题精解/434

第五节 傅里叶级数/439

内容提要/439 释疑解惑/440 例题解析/441 习题精解/442

复习题九/444

第一章 函数、极限与连续

函数是微积分的研究对象,极限是微积分的基本运算,极限方法是研究函数的主要工具,连续性是函数的重要性质,本课程研究的函数主要是连续函数。本章的重点是极限,主要介绍函数的极限,而把数列的极限作为函数极限的特例来处理。

第一节 函数

内容提要

1. 理解和掌握函数的概念与性质

设有非空数集 X 和实数集 $\mathbf{R}$, f 是一个确定的法则(或关系),对于每个 $x \in X$, 都有惟一的 $y \in \mathbf{R}$ 与之相对应,并且将与 x 对应的 y 记作 $y = f(x)$, 则称 f 是定义在 X 上的一元函数,简称为函数,称 x 为自变量, y 为因变量。

定义域: x 的取值范围 X 称为 f 的定义域,记作 $D(f)$ 或 D 。

值域: 当 x 遍取 X 中的一切值,函数值 $y = f(x)$ 的变化范围称为函数 f 的值域,记作 $R(f)$ 。

经常讨论的函数的四种特性:有界性,单调性,奇偶性,周期性。

2. 理解复合函数与反函数的概念

复合函数: 设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_1 , 函数 $u = g(x)$ 在 D 上有定义,且 $R(g) \subset D_1$, 则由 $y = f[g(x)] (x \in D)$ 确定的函数称为由函数 $u = g(x)$ 和函数 $y = f(u)$ 构成的复合函数,它的定义域为 D , 变量 u 称为中间变量。函数 g 与 f 构成的复合函数通常记为 $f \circ g$, 即

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$$

两个函数能够构成复合函数的条件是函数 g 在 D 上的值域 $R(g)$ 必须含在



f 的定义域 D_1 内。

反函数: 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $D(f)$, 值域为 $R(f)$, 如果对每一个 $y \in R(f)$, 都有惟一的 $x \in D(f)$, 使 $y = f(x)$, 则说 x 也是 y 的函数, 我们将这个函数记作 $x = f^{-1}(y)$, 并把它称为函数 $y = f(x)$ 的反函数。而 $y = f(x)$ 则称为反函数 $x = f^{-1}(y)$ 的直接函数。显然 $y = f(x)$ 与 $x = f^{-1}(y)$ 互为反函数。

习惯上将反函数 $x = f^{-1}(y)$ 记作 $y = f^{-1}(x)$ 。即 $y = f(x)$ 的反函数为 $y = f^{-1}(x)$ 。

反函数存在定理 若函数 $y = f(x)$ 在 $D(f)$ 上严格单调, 则它必存在反函数 $y = f^{-1}(x)$, 且反函数也是严格单调的。

直接函数和它的反函数的图像关于直线 $y = x$ 对称。

3. 理解初等函数与非初等函数的概念

基本初等函数包括: 幂函数, 指数函数, 对数函数, 三角函数, 反三角函数。

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可可用一个式子表示的函数, 称为初等函数。

函数的表现形式有: 显函数, 隐函数。

释疑解惑

【问 1-1】 严格单调的函数必存在反函数, 那么不单调的函数是不是一定没有反函数?

答 不是的。

一个函数是否存在反函数, 取决于它的对应法则 f 在定义域 $D(f)$ 与值域 $R(f)$ 之间是否构成一一对应的关系。如果是一一对应, 那么必有反函数; 否则就没有反函数。函数在区间 I 上严格单调只是一种特殊的一一对应关系, 因此, 严格单调仅是存在反函数的充分条件, 而不是必要条件。

例如, 函数
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & -\infty < x < 0 \\ 2x, & 0 \leq x < +\infty \end{cases}$$

在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上不单调 (如图 1-1(a) 所示), 但它却存在反函数 (如图 1-1(b) 所示)。

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & -\infty < x < 0 \\ \frac{1}{2}x, & 0 \leq x < +\infty \end{cases}$$

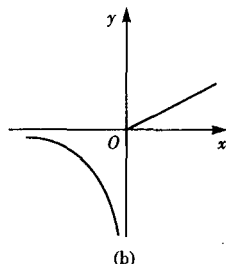
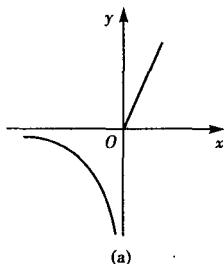


图 1-1

【问 1-2】 函数 $f(x) = |x \sin x| e^{\cos x} (-\infty < x < +\infty)$ 是否有界函数, 是否是单调函数, 是否是周期函数, 是否是偶函数?

答 由于 $|f(x)| = |x| |\sin x| e^{\cos x}$, 其中 $|\sin x| \not\equiv 0, e^{\cos x} > 0$, 故由因子 $|x|$ 即可断定 $f(x)$ 不是有界函数, 也不可能是周期函数。再由 $f(0) = 0$, $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}, f(\pi) = 0$ 又可断定 $f(x)$ 不是单调函数。

对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$, 因为

$$f(-x) = |(-x) \sin(-x)| e^{\cos(-x)} = |x \sin x| e^{\cos x} = f(x)$$

所以 $f(x)$ 为偶函数。

例题解析

【例 1-1】 设 $f(x) + f(\frac{x-1}{x}) = 2x$, 其中 $x \neq 0, x \neq 1$, 求 $f(x)$ 。

分析 对这类题, 依据函数表示与自变量所用的字母的无关性, 可利用变量代换, 得出所求函数的表达式。

解 令 $t = \frac{x-1}{x}$, 则 $x = \frac{1}{1-t}$, 带入原方程得

$$f\left(\frac{1}{1-t}\right) + f(t) = \frac{2}{1-t}$$



即

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{2}{1-x}$$

再令 $\frac{1}{1-x} = \frac{u-1}{u}$, 即 $x = \frac{1}{1-u}$, 代入上式, 得

$$f\left(\frac{1}{1-u}\right) + f\left(\frac{u-1}{u}\right) = \frac{2(u-1)}{u}$$

即

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{2(x-1)}{x}$$

解联立方程组, 可得

$$f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} - 1$$

【例 1-2】 设 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$, $\varphi(x) = \begin{cases} x+2, & x < 0 \\ x^2-1, & x \geq 0 \end{cases}$, 求 $f[\varphi(x)]$.

分析 解决本题的关键是要正确理解 $f[\varphi(x)]$ 所表示的函数的结构。

解 由 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$, 可得 $f[\varphi(x)] = \begin{cases} e^{\varphi(x)}, & \varphi(x) < 1 \\ \varphi(x), & \varphi(x) \geq 1 \end{cases}$.

(1) $\varphi(x) < 1$ 的条件

当 $x < 0$ 时, 由 $\varphi(x) = x+2 < 1$, 得 $\begin{cases} x < 0 \\ x < -1 \end{cases}$, 即 $x < -1$;

当 $x \geq 0$ 时, 由 $\varphi(x) = x^2-1 < 1$, 得 $\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 < 2 \end{cases}$, 即 $0 \leq x < \sqrt{2}$.

(2) $\varphi(x) \geq 1$ 的条件

当 $x < 0$ 时, 由 $\varphi(x) = x+2 \geq 1$, 得 $\begin{cases} x < 0 \\ x \geq -1 \end{cases}$, 即 $-1 \leq x < 0$;

当 $x \geq 0$ 时, 由 $\varphi(x) = x^2-1 \geq 1$, 得 $\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 \geq 2 \end{cases}$, 即 $x \geq \sqrt{2}$.

综上所述

$$f[\varphi(x)] = \begin{cases} e^{x+2}, & x < -1 \\ x+2, & -1 \leq x < 0 \\ e^{x^2-1}, & 0 \leq x < \sqrt{2} \\ x^2-1, & x \geq \sqrt{2} \end{cases}$$



【例 1-3】 设函数 $f(x)$ 定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上, 且在该区间上恒有 $f(x+l) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)}$, 其中 l 为正数, 试证 $f(x)$ 是以 $2l$ 为周期的函数.

分析 关键是理解周期函数的意义, 只需证明 $f(x+2l) = f(x)$.

证明 因为 $f(x+2l)$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} + \sqrt{f(x+l) - f^2(x+l)} \\ &= \frac{1}{2} + \left\{ \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)} - \right. \\ &\quad \left. \left[\left(\frac{1}{4} + \sqrt{f(x) - f^2(x)} + f(x) - f^2(x) \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \\ &= \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{4} - f(x) + f^2(x) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} + \left| f(x) - \frac{1}{2} \right| \quad (*) \end{aligned}$$

且 $f(x) = f(x-l+l) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x-l) - f^2(x-l)} \geq \frac{1}{2}$

故 $\left| f(x) - \frac{1}{2} \right| = f(x) - \frac{1}{2}$

代入式(*)得 $f(x+2l) = f(x)$

即 $f(x)$ 是以 $2l$ 为周期的周期函数.

习题精解

3. 正圆柱体内接于高为 h , 底半径为 r 的正圆锥体内, 设圆柱体的高为 x , 试将圆柱体的底半径 y 与体积 V 分别表示为 x 的函数.

解 由于 $\frac{y}{r} = \frac{h-x}{h}$, 因此可以得到

$$y = \left(1 - \frac{x}{h}\right)r \quad x \in (0, h)$$

$$V = \pi y^2 x = \pi r^2 x \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 \quad x \in (0, h)$$



9. 判断下列函数在指定区间内的有界性:

(1) $f(x) = \tan x$ 在 $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ 及 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内;

(2) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内;

(3) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内.

解 (1) $\tan x$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内单调增加. 在 $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ 内, $-1 = \tan \frac{-\pi}{4} < \tan x < \tan \frac{\pi}{4} = 1$, 即 $|\tan x| < 1$, 所以 $\tan x$ 在 $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ 内有界;

又因为 $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 时, $\tan x \rightarrow +\infty$, 所以在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内函数 $\tan x$ 无界.

(2) 在 $(-\infty, +\infty)$ 内, 因为 $1+x^2 \geq 1$, 所以 $|f(x)| \leq 1$, 即 $f(x)$ 有界.

(3) $x=0$ 时, $f(0)=0$; $x \neq 0$ 时, $1+x^2 \geq 2|x|$, 故 $\left| \frac{x}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{2}$. 所以, 在 $(-\infty, +\infty)$ 内, $|f(x)| \leq \frac{1}{2}$, 即 $f(x)$ 有界.

11. 设 $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$,

(1) 证明 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 与 $(1, +\infty)$ 内严格单调增加;

(2) 根据(1), 能否说 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ 内严格单调增加?

解 (1) 在 $(-\infty, 1)$ 内, 设 $x_1 < x_2$, 则因为 $x_1 < 1, x_2 < 1$, 所以 $1-x_1 > 1-x_2 > 0$.

要证 $\frac{1+x_1}{1-x_1} < \frac{1+x_2}{1-x_2}$, 只需证 $(1+x_1)(1-x_2) < (1+x_2)(1-x_1)$, 即证 $1+x_1-x_2-x_1x_2 < 1-x_1+x_2-x_1x_2$, 亦即证 $2x_1 < 2x_2$. 又由假设知 $2x_1 < 2x_2$ 显然成立, 即得 $f(x_1) < f(x_2)$, 从而 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 内严格单调增加; 同理 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 内严格单调增加.

(2) 不能.

例如 $\frac{1}{2} < \frac{3}{2}$, 但



$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 3 > f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1+\frac{3}{2}}{1-\frac{3}{2}} = -5$$

显然不能说 $f(x)$ 在 $[-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ 内严格单调增加。

12. 判断下列函数的奇偶性:

$$(1) f(x) = \sqrt{1-x+x^2} - \sqrt{1+x+x^2}; \quad (2) f(x) = 2+|x|$$

$$(3) f(x) = \lg(x + \sqrt{1+x^2}); \quad (4) f(x) = \frac{\sin^4 x \cos x}{1+x^2}$$

解 (1) 因为 $f(-x) = \sqrt{1-(-x)+(-x)^2} - \sqrt{1-x+(-x)^2} = -f(x)$
所以 $f(x)$ 为奇函数。

(2) 因为 $f(-x) = 2+|-x| = 2+|x| = f(x)$
所以 $f(x)$ 为偶函数。

$$\begin{aligned} (3) \text{ 因为 } f(-x) &= \lg[-x + \sqrt{1+(-x)^2}] \\ &= \lg\left[\frac{(\sqrt{1+x^2}+x)(\sqrt{1+x^2}-x)}{\sqrt{1+x^2}+x}\right] \\ &= \lg\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}\right) \\ &= -\lg(\sqrt{1+x^2}+x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 为奇函数。

$$(4) \text{ 因为 } f(-x) = \frac{\sin^4(-x)\cos(-x)}{1+(-x)^2} = \frac{\sin^4 x \cos x}{1+x^2} = f(x)$$

所以 $f(x)$ 为偶函数。

13. 设 $f(x)$ 是定义在 $[-l, l]$ 上的任意一个函数,

(1) 讨论 $\varphi(x) = f(x) + f(-x)$ 及 $\psi(x) = f(x) - f(-x)$ 的奇偶性;

(2) 证明 $f(x)$ 总可以表示为一个偶函数与一个奇函数之和;

(3) 证明(2)中的表示方法是惟一的。

解 (1) 因为 $\varphi(-x) = f(-x) + f(x) = \varphi(x)$, 所以 $\varphi(x)$ 是偶函数。



$\psi(-x) = f(-x) - f(x) = -\psi(x)$, 所以 $\psi(x)$ 是奇函数。

(2) 显然 $f(x) = \frac{1}{2}[\varphi(x) + \psi(x)]$ 。

(3) 设 $f(x) = g(x) + h(x)$, 其中 $g(x)$ 为偶函数, $h(x)$ 为奇函数, 则 $g(x) + h(x) = \varphi(x) + \psi(x)$, 即 $g(x) - \varphi(x) = \psi(x) - h(x)$ 。从而 $g(x) - \varphi(x)$ 及 $\psi(x) - h(x)$ 既为奇函数, 又为偶函数, 所以为 0。即 $g(x) = \varphi(x)$, $h(x) = \psi(x)$, 所以表示法惟一。

15. 证明 $f(x) = x - [x]$ 是周期函数, 并指出它的周期。

证明 因为 $f(x+1) = x+1 - [x+1] = x+1 - [x] - 1 = x - [x] = f(x)$, 所以 $f(x)$ 为周期函数, 且其周期为 1。

17. 求下列复合函数:

(1) 设 $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin x$, 求 $f[g(x)]$ 及 $g[f(x)]$;

(2) 设 $f(x) = \arctan x$, $g(x) = \sqrt{x}$, $\varphi(x) = \lg x$, 求 $f[g[\varphi(x)]]$;

(3) 设 $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$, $g(x) = x^2 - 1$, 求 $f[g(x)]$ 及 $g[f(x)]$;

(4) 设 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 求 $\underbrace{f(f(\cdots f(x)))}_{n \uparrow f}$ 。

解 (1) $f[g(x)] = [g(x)]^2 = \sin^2 x$; $g[f(x)] = \sin f(x) = \sin x^2$

(2) $f[g[\varphi(x)]] = \arctan g[\varphi(x)] = \arctan \sqrt{\varphi(x)} = \arctan \sqrt{\lg x}$

(3) $f[g(x)] = \begin{cases} 2g(x), & g(x) \leq 0 \\ 0, & g(x) > 0 \end{cases} = \begin{cases} 2(x^2-1), & x^2-1 \leq 0 \\ 0, & x^2-1 > 0 \end{cases}$
 $= \begin{cases} 2(x^2-1), & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$

$g[f(x)] = f^2(x) - 1 = \begin{cases} 4x^2-1, & x \leq 0 \\ -1, & x > 0 \end{cases}$

(4) $f(f(x)) = \frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$