数学类

21世纪高职高专系列教材

高等数学

（第二版·上册）

■ 湖北省教育厅组编

■ 主　编　朱永银　孙旭东

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

数学类

21世纪高职高专系列教材

高等数学

（第二版·上册）

■ 湖北省教育厅组编

■ 主　编　朱永银　孙旭东

■ 副主编　万　武　何裕平　曾红伟

WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学．上册/湖北省教育厅组编；朱永银，孙旭东主编．—2版．—武汉：武汉大学出版社，2006.7
(21世纪高职高专系列教材)
ISBN 7-307-05067-6

Ⅰ．高…　Ⅱ．①湖…　②朱…　③孙…　Ⅲ．高等数学—高等学校—教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第043765号

责任编辑：李汉保　　责任校对：王　建　　版式设计：支　笛

出版发行：武汉大学出版社　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件：wdp4@whu.edu.cn　网址：www.wdp.com.cn)
印刷：武汉凯威印务有限公司
开本：880×1230　1/32　印张：8.375　字数：233千字
版次：2004年6月第1版　　2006年7月第2版
2006年7月第2版第1次印刷
ISBN 7-307-05067-6/O·339　　定价：15.00元

内容简介

21世纪高职高专《高等数学》教材内容包括：函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、一元函数的积分学、微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微积分和无穷级数等。全书分上、下两册，共有10章，各章后附有历史的回顾与评述，主要介绍数学发展史与相关数学大师。全书约40万字。

本教材主要体现了以下特点：

一是注意了与高中数学知识的衔接，加强了幂函数、指数函数、对数函数和三角函数的教学，并在书后附有初等数学公式简表，便于学生复习和自学。对于书中所涉及到的若干定理、推论、命题等，既不追求详细的证明，又不失数学理论的严谨。

二是注意将数学建模的思想融入到教学中，加强与实际结合，使学生能灵活运用数学知识解决实际问题，从而提高学生的创新能力，将来能更好地为建设社会主义祖国服务。

三是注意将新的教学手段和新的教育思想贯穿到教学实践中，利用数学软件计算积分，并在附录中列出Mathematica软件及其用法，使学生掌握现代计算机技术。教师改革教学方法，用现代多媒体技术进行教学，从而提高教学质量。

出版说明

教材建设,“双师型”教师队伍建设和实践教学基地建设是高等职业教育教学工作的三大基本建设工作,是实现高职高专教育人才培养目标的重要保证,是办好高等职业教育、办出高等职业教育特色的最为紧迫的任务之一。最近几年,高职高专教育以迅猛之势发展。相对而言,教材建设仍滞后于高职高专教育的发展需要,还存在不少问题,如对高职高专教育教材建设工作的重要性认识不足;对高职高专教育教材的编写形式、体系、体例等缺乏深入研究,具有高职高专教育特色的教材极其匮乏,高职高专学校选用的教材没有充分体现职业技术教育的特色;教材建设缺少行业专家的帮助与指导,缺乏科学的理论支持,适应不了知识经济和现代高新技术发展的要求;与专业教材配套的实践、实训教材建设严重滞后,等等。高职高专教育教材建设存在的这些问题,严重影响着高等职业教育的质量和人才的培养。随着高等职业教育的飞速发展和教育教学改革的不断深化,要办出高职高专教育特色,提高人才培养质量,高职高专学校必须加强自身体系的教材建设。

为做好我省高职高专学校教材建设工作,在充分调查论证的基础上,今年,湖北省教育厅启动了湖北省高职高专教育专业系列教材建设工作。总的原则是,遵循高等教育规律,突出高等职业教育的特点,充分吸取近年来高职高专学校在培养高等技术应用型专门人才和教学改革方面取得的成功经验,结合湖北省高职高专院校专业建设和教学工作的实际,以专业系列教材为重点,组织省内相关院校的专业课教师,分期分批编写相关专业的系列教材。教材编写强调面向行业,增强针对性和实用性,体现适应、实用、简明的要求,重视学生实践能力的培养,同时,教材建设不仅要注重内容和体系的改革,

创新体系结构和编写形式,还要注意方法和手段的改革,紧扣时代脉搏,以跟上科技发展和经济建设工作对各层次人才的实际需要。

参加《21世纪高职高专系列教材》编写的教师是经过各高校推荐并经湖北省教育厅严格遴选的,他们长期从事高职高专教育,熟悉专业教学工作,有较为丰富的教学实践经验。武汉大学出版社对省编高职高专专业系列教材工作给予了极大的支持。我们期望,通过省编教材的建设,最终形成有我省特色的、门类比较齐全的高职高专教育专业课程系列教材,促进专业建设,推进高职高专教育人才培养模式改革,提高人才培养质量。

湖北省教育厅

2003年8月

前　言

为了推动高职高专教材建设，提高高职高专教育质量，湖北省教育厅根据国家教育部高教司[2000]19号文件的精神，特组织全省高职高专一大批具有较高理论水平和丰富教学经验的骨干教师，对若干专业和基础课程的教材进行系统建设。《高等数学》就是其中首批重点建设的系列教材之一。

本套教材是湖北省教育厅委托湖北省数学学会高职高专数学研究会、武汉工业与应用数学学会和武汉大学出版社，组织全省部分高职高专院校的数学骨干教师经过近两年的努力编写而成的。在编写过程中力求做到以应用为目的，以“必需、够用”为度，以讲清概念、强化应用为重点。本套教材的主要特点是：(1)在保持传统体系的基础上，力求有所创新；(2)注意与中学数学知识的衔接，在复习初等数学知识的基础上加以提高，并将初等数学常用公式附在书后，以便读者学习时查阅；(3)体现数学建模思想，注重数学软件应用的训练；(4)为了增加可读性，提高学生学习数学的兴趣和积极性，每章后附有阅读材料。本套教材包括《高等数学》(上册)、《高等数学》(下册)、《高等数学学习指导》。《高等数学》上、下册共有10章和9个附录，每节后有习题，书后附有参考答案。打“*”号的内容供选学。本教材可以供高职高专各类专业选用。

本套教材(第二版)由朱永银、孙旭东、肖业胜、冯兴山担任主编，由朱永银教授负责总策划，拟定编写大纲，对全书进行修编。

《高等数学》(上册)由朱永银、孙旭东担任主编；由万武、何裕平、曾红伟担任副主编。参加编审工作的还有山军、杨晓平、沈萍、周怡、刘先树、陈孝平、付三桥、范光、宋占奎、李爱萍、叶子祥、卢强、任树联、王宪生、邹祥涛、张兴鹤、陈海平等老师。

武汉职业技术学院、武汉工业职业技术学院、华中师范大学职业技术学院、襄樊职业技术学院、恩施职业技术学院、武汉工程职业技术学院、湖北轻工职业技术学院、十堰职业技术学院、随州职业技术学院、宜昌职业技术学院、湖北财经高等专科学校、河南信阳职业技术学院、三峡大学职业技术学院等对本套教材顺利出版给予了大力支持。本套教材还参考吸收了有关教材及著作的成果,在此一并致谢!

由于编者水平所限,本书难免存在疏漏之处,敬请广大读者不吝赐教,提出批评建议,以便再版时修订,使本套教材日臻完善。

编　者

2006 年 6 月

目　录

第 1 章　函数、极限与连续

初等数学主要研究事物相对静止状态的数量关系，而微积分则主要研究事物运动、变化过程中的数量关系. 极限方法是研究微积分的最基本方法，微积分学的概念、性质和法则都是通过极限方法来建立的. 因此，极限是微积分学最基本的概念. 本章在函数知识复习的基础上，学习极限的概念、连续函数的概念与性质等. 连续函数是微积分的主要研究对象，因为实际中所遇到的函数常常是连续函数. 对于不连续函数，我们常常直接或间接地借助于连续函数进行研究.

§1.1　函　　数

1.1.1　变量与区间

1. 常量和变量

在研究实际问题、观察各种现象或过程的时候，会遇到许多的量，例如长度、面积、体积、重量、温度、时间、距离、质量等. 在整个考察过程中始终保持不变的量，称为常量；在考察的过程中能取不同数值的量，称为变量. 例如，在考察自由落体的运动过程时，物体下降的距离和所用的时间都是变量，而物体的质量在下落过程中可以看做是常量. 再如在对一密封容器内气体加热的过程中，气体的体积及分子数目是常量，而气体的温度及压力是变量.

习惯上，人们通常用英文字母表中的前几个字母（如 a,b,c 等）来记常量，用后面几个字母（如 x,y,z 等）来记变量.

一个量究竟是常量还是变量并不是绝对的，需要看具体情况. 比如重力加速度 g，在与地心的距离不同的点处，它的值是不同的，因

而是变量;但在地球表面附近,在研究不太精密的问题时,g 的值变化不大,于是又可以把 g 看做常量($g=9.8\mathrm{m/s^2}$).

本书中,不论是变量还是常量,它们所取的值都是实数.换句话说,我们只在实数范围内讨论问题.变量的变化范围(或取值范围)称为变量的变化域.变量的变化域是一个实数的集合,该集合是一个或几个区间.

2. 集合和区间

集合　一般可以把集合理解为具有某种属性的一些对象所组成的全体.例如,某班全体同学组成一个集合;所有三角形组成一个集合;地球上所有的国家组成一个集合;数 1、2、3、4、5 组成一个集合;满足不等式 $a<x<b$ 的解 x 组成一个集合;第一、三象限角平分线上所有的点组成一个集合,等等.集合里的各个对象叫做这个集合的元素.习惯上集合用大写字母如 A、B、C 等表示,而元素用小写字母如 a、b、c 等表示.还有一些常用集合采用特殊的符号来记.例如,全体自然数组成的集合,称为自然数集,记为 $\mathbf{N}$;全体整数组成的集合称为整数集,记为 $\mathbf{Z}$;全体有理数组成的集合,称为有理数集,记为 $\mathbf{Q}$;全体实数的集合称为实数集,记为 $\mathbf{R}$.

含有有限个元素的集合称为有限集,含有无限个元素的集合称为无限集.如果 a 是集合 A 的元素,则记作 $a\in A$,读作"a 属于 A".否则记作 $a\bar{\in} A$,读作"a 不属于 A".例如,若用 $\mathbf{N}$ 表示全体自然数的集合,则 $5\in\mathbf{N}$,而 $-1\bar{\in}\mathbf{N}$,等等.

集合的常用表示法有两种:列举法和描述法.所谓列举法就是把集合中所有元素都列举出来写在大括号内的表示集合的方法.例如集合 A 包含 1、2、3、4、5 五个数,就可以记为 $A=\{1,2,3,4,5\}$.

所谓描述法,就是指把集合中元素的公共属性描述出来写在大括号内表示集合的方法.记为

$$A=\{x\mid x\text{ 具有性质 }P\}$$

例如上例 $A=\{1,2,3,4,5\}$ 可以记为 $A=\{x\mid$小于 6 大于 0 的自然数$\}$.又如满足不等式 $a<x<b$ 的所有 x 的集合,可以表示为 $A=\{x\mid a<x<b\}$.集合 $M=\{C\mid C$ 是圆心在原点的圆$\}$表示所有圆心在原点的圆的集合.集合 $P=\{(x,y)\mid y=2x+1,x\in\mathbf{R}\}$ 表示所有在直

线 $y=2x+1$ 上的点的集合,其中 $\mathbf{R}$ 表示全体实数集合. 显然点 $(1,3) \in P$,而点 $(0,2) \in P$.

不含任何元素的集合叫做空集,记为 $\varnothing$,例如,方程 $x^2+y^2=-1$ 的实数解是一个空集.

区间　区间是特殊的集合. 集合 $\{x \mid a<x<b\}$ 称为开区间,记作 (a,b). (a,b) 在数轴上表示点 a 与点 b 之间的线段,但不包括端点 a 及端点 b(如图 1-1 所示);集合 $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ 称为闭区间,记作 $[a,b]$. $[a,b]$ 在数轴上表示点 a 与点 b 之间的线段,包括其中两个端点(如图 1-2 所示).

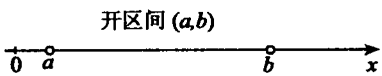

图 1-1

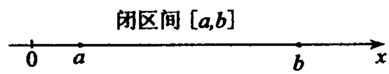

图 1-2

还有其他区间:

$\{x \mid a<x \leqslant b\}$ 记作 $(a,b]$,称为半开区间;$\{x \mid a \leqslant x<b\}$ 记作 $[a,b)$,称为半开区间;

$\{x \mid x>a\}$ 或 $\{x \mid x<a\}$,记作 $(a,+\infty)$ 或 $(-\infty,a)$,称为半无穷区间;

$\{x \mid x$ 为任何实数$\}$,记作 $(-\infty,+\infty)$,称为无穷区间等.

集合 $\{x \mid |x-a|<\varepsilon\}$ 称为点 a 的 ε 邻域,表示以 a 为中心,以 ε 为半径的开区间,因此,该区间也可以用开区间 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 来表示.

1.1.2 函数的概念

1. 函数

在同一个自然现象或技术过程中,往往同时有几个变量,且它们是互相联系,并按一定的对应规律而变化的,下面列举几个两变量相互联系着对应变化的实例.

例 1. 在圆的面积公式 $A=\pi r^2$ 中,圆的半径 r 与该圆的面积 A 互相联系着,对任意半径 $r \in (0,+\infty)$ 都对应着一个圆的面积,r 与 A 之间的对应规律 f 可以表示为:

$$r \xrightarrow{\text{对应规律}f:\ A=\pi r^2} A$$ 其中 π 为圆周率(常数).

例 2. 自由落体运动路程 s 与时间 t 的对应规律 f 可以表示为:

$$t \xrightarrow{\text{对应规律}f:\ s=\frac{1}{2}gt^2} s$$ 其中 g 为重力加速度(常数).

定义 1 设有两个非空实数集合 A、B,如果对于数集 A 中的每一个数 x,按照确定的规则 f 对应着数集 B 中惟一一个数 y,则称 f 是定义在集合 A 上的函数.

集合 A、B 和对应关系是一个函数的三个要素,A 称为函数的定义域,B 称为函数的值域,f 称为函数关系. 与 $x \in A$ 对应的实数 $y \in B$ 记作 $y=f(x)$,与 x_0 对应的 y 值记为:

$y_0=f(x_0)$ 或 $y_0=f(x)|_{x=x_0}$, 集合 $B_f=\{y|y=f(x),x\in A\}$ 称为函数的值域. 显然 $B_f \subseteq B$.

习惯上,x 称为自变量,y 称为因变量. 要注意 f 是函数关系,而 $f(x)$ 是函数值. 但是研究函数总是通过函数值来进行的. 为了方便,以后也将 $f(x)$ 称做 x 的函数,或 y 是 x 的函数.

对于不同的函数,应该用不同的记号,如 $f(x)$,$g(x)$,$F(x)$,$G(x)$ 等.

在函数的定义中,对应规律(即函数关系)及定义域是两个重要因素,而自变量和因变量采用什么符号来表示则是无关紧要的. 因此函数

$$y=f(x),x\in X$$

与函数

$$s=f(t),t\in X$$

表示同一个函数. 亦即定义域和对应规律都相同的两个函数相同.

2. 求定义域和函数值

例 3. 设函数 $f(x)=x^4+x^2+1$. 求 $f(0)$,$f(t^2)$,$[f(t)]^2$,$f\left(\frac{1}{t}\right)$,$\frac{1}{f(t)}$.

解 $f(0)=0^4+0^2+1=1$,

$f(t^2)=(t^2)^4+(t^2)^2+1=t^8+t^4+1$,

$[f(t)]^2=(t^4+t^2+1)^2$,

$$f\left(\frac{1}{t}\right)=\left(\frac{1}{t}\right)^4+\left(\frac{1}{t}\right)^2+1=\frac{1+t^2+t^4}{t^4},$$

$$\frac{1}{f(t)}=\frac{1}{t^4+t^2+1}.$$

例 4. 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}$ 的定义域.

解 由 $\begin{cases} x^2-x-2\geqslant 0 \\ \sqrt{x^2-x-2}\neq 0 \end{cases}$ 即 $x^2-x-2>0$

解得 $x>2$ 或 $x<-1$,

如果用区间表示定义域为 $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$,又可以用集合表示为

$$A=\{x\mid x>2 \text{ 或 } x<-1\}.$$

例 5. 求函数 $f(x)=\sqrt{4-x^2}+\lg(x-1)$ 的定义域.

解 为使函数 $f(x)$ 有意义,当且仅当 $\sqrt{4-x^2}$ 和 $\lg(x-1)$ 两项都有意义.

第一项 $\sqrt{4-x^2}$ 的定义域是 $A_1=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2\}$,第二项 $\lg(x-1)$ 的定义域是 $A_2=\{x\mid x>1\}$. 所以函数 $f(x)$ 的定义域是:

$$A=A_1\cap A_2=\{x\mid 1<x\leqslant 2\}, \text{ 或表示为区间 } (1,2].$$

3. 分段函数

在定义域内不同区间上用不同式子表示的一个函数,称为分段函数.

例 6. 函数

$$y=f(x)=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

函数定义域 $A=(-\infty,+\infty)$. 它的图形如图 1-3 所示.

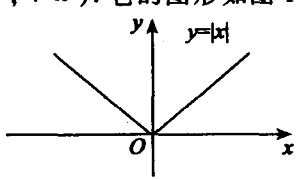

图 1-3

例 7. 符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0 \\ 0, & \text{当 } x = 0 \\ -1, & \text{当 } x < 0 \end{cases}$$

该函数的图形如图 1-4 所示.

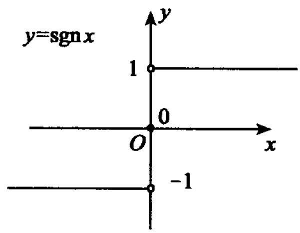

图 1-4

例 8. 设 $x \in \mathbf{R}$,不超过 x 的最大整数简称为 x 的整数部分,记作$[x]$.

例如$\left[\frac{5}{7}\right] = 0, [\sqrt{2}] = 1, [-1] = -1, [-3.5] = -4$.

则函数 $y = [x]$, $x \in \mathbf{R}$. 其图形如图 1-5 所示. 函数 $y = [x]$又叫取整函数.

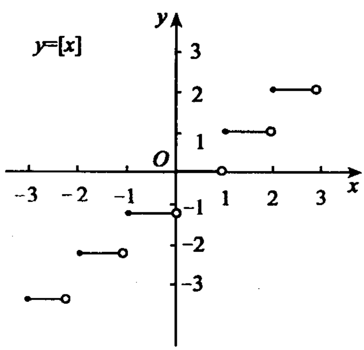

图 1-5