孔宪宾　王振波　主编
徐道远　主审

中国土木工程学会教育工作委员会江苏分会组织编写

应用型本科院校土木工程专业规划教材

工程力学

（下册）

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn
知识产权出版社
www.cnipr.com

孔宪宾　王振波　主编
徐道远　主审

中国土木工程学会教育工作委员会江苏分会组织编写

应用型本科院校土木工程专业规划教材

工程力学

（下册）

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn
知识产权出版社
www.cnipr.com

内容提要

本书系“应用型本科院校土木工程专业规划教材”之一，分为上、下两册。上册涉及静力学问题，包括传统的理论力学静力学内容和材料力学的大部分内容，并将内力及内力图集中为一章，作为静力学和材料力学联结点。下册则涉及动力学问题，包括传统理论力学中的运动学部分以及材料力学中的动力问题（包括疲劳）。本书具有体系新颖、内容紧凑、概念清晰、习题量适中等特点，适合工程力学的教学和学习。

本书可作为高等院校土木工程专业及相关专业的教学用书，也可供相关专业工程技术人员参考。

责任编辑：阳 淼 张宝林 E-mail：yangsanshui@vip.sina.com；z_baolin@263.net

文字编辑：彭天敏 胡朝杰

图书在版编目（CIP）数据

工程力学．下册/孔宪宾，王振波主编．—北京：中国水利水电出版社：知识产权出版社，2006

应用型本科院校土木工程专业规划教材

ISBN 7-5084-3749-7

Ⅰ．工… Ⅱ．①孔…②王… Ⅲ．①工程力学—高等学校—教材②工程力学：动力学—高等学校—教材

Ⅳ．TB12

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 039672 号

应用型本科院校土木工程专业规划教材

工程力学（下册）

孔宪宾 王振波 主编 徐道远 主审

中国水利水电出版社 / 知识产权出版社 出版 发行（北京市西城区三里河路 6 号；电话：010-68331835 68357319 / 北京市海淀区马甸南村 1 号；传真、电话：010-82000893）

全国各地新华书店和相关出版物销售网点经销

北京市兴怀印刷厂印刷

787mm×1092mm 16 开 13 印张 308 千字

2006 年 6 月第 1 版 2006 年 6 月第 1 次印刷

印数：0001-4100 册

定价：**27.00** 元

ISBN 7-5084-3749-7

中国土木工程学会教育工作委员会江苏分会组织编写

应用型本科院校土木工程专业规划教材

编写委员会

主任委员　李爱群

副主任委员　吴胜兴　刘伟庆

委　　员　（按姓氏拼音字母排序）

包　华　崔清洋　何培玲　何卫中　孔宪宾
李庆录　李仁平　李文虎　刘爱华　刘训良
佘跃心　施凤英　田安国　童　忻　王振波
徐汉清　宣卫红　荀　勇　殷惠光　张三柱
朱正利　宗　兰

审定委员会

顾　　问　蒋永生　周　氏　宰金珉　何若全

委　　员　（按姓氏拼音字母排序）

艾　军　曹平周　陈国兴　陈忠汉　丰景春
顾　强　郭正兴　黄安永　金钦华　李爱群
刘伟庆　陆惠民　邱宏兴　沈　杰　孙伟民
吴胜兴　徐道远　岳建平　赵和生　周国庆

总　序

中国土木工程学会教育工作委员会江苏分会成立于2002年5月，现由江苏省设有土木工程专业的近40所高校组成，是中国土木工程学会教育工作委员会的第一个省级分会。分会的宗旨是加强江苏省各高校土木工程专业的交流与合作，提高土木工程专业的人才培养质量，服务于江苏乃至全国的建设事业和社会发展。

人才培养是高校的首要任务，现代社会既需要研究型人才，也需要大量在生产领域解决实际问题的应用型人才。目前，除少部分知名大学定位在研究型大学外，大多数工科大学均将办学层次定位在应用技术型高校这个平台上。作为知识传承、能力培养和课程建设载体的教材在应用型高校的教学活动中起着至关重要的作用，但目前出版的教材大多偏重于按照研究型人才培养的模式进行编写，“应用型”教材的建设和发展却远远滞后于应用型人才培养的步伐。为了更好地适应当前我国高等教育跨越式发展的需要，满足我国高校从精英教育向大众化教育重大转移阶段中社会对高校应用型人才培养的各类要求，探索和建立我国高校应用型本科人才培养体系，中国土木工程学会教育工作委员会江苏分会与中国水利水电出版社、知识产权出版社联合，组织江苏省有关院校的教师，编写出版了适应应用型人才培养需要的应用型本科院校土木工程专业规划教材。其培养目标是既掌握土木工程学科的基本知识和基本技能，同时也包括在技术应用中不可缺少的非技术知识，又具有较强的技术思维能力，擅长技术的应用，能够解决生产实际中的具体技术问题。

本套教材旨在充分反映应用型本科的特色，吸收国内外优秀教材的成功

经验，并遵循以下编写原则：

- 突出基本概念、思路和方法的阐述以及工程应用实例；
- 充分利用工程语言，形象、直观地表达教学内容，力争在体例上有所创新并图文并茂；
- 密切跟踪行业发展动态，充分体现新技术、新方法，启发学生的创新思维。

本套教材虽然经过编审者和编辑出版人员的尽心努力，但由于是对应用型本科院校土木工程专业规划教材的首次尝试，故仍会存在不少缺点和不足之处。我们真诚欢迎选用本套教材的师生多提宝贵意见和建议，以便我们不断修改和完善，共同为我国土木工程教育事业的发展作出贡献。

中国土木工程学会教育工作委员会江苏分会

2006年4月

前　　言

《工程力学》上、下两册是由中国土木工程学会教育工作委员会江苏分会组织编写的应用型本科系列教材中的一部分，是针对应用型本科土木建筑类各专业的“工程力学”课程而编写的教材。本教材具有以下特点：

(1)体系新颖，上册涉及静力学问题，包括传统的理论力学静力学内容和材料力学的大部分内容，但将内力及内力图集中为一章，作为静力学和材料力学联结点，即从刚体平衡引伸到变形体平衡，较为恰当。下册则涉及动力学问题，包括传统理论力学中的运动学部分以及材料力学中的动力问题(包括疲劳)。体系的处理比较合理。

(2)内容紧凑，在上述体系范围内，有关工程力学基本内容均已涉及，但摒弃了一些过深而又不实用的内容，专业对口性较强。

(3)概念清晰，突出了“应用”的特点。教材中绝大部分内容在阐述方面注意交待来龙去脉，由浅入深，推导论证详而不繁，突出了应用的条件和前提。例题注重对解题思路的引导、公式的正确应用和对结果合理性的分析。

(4)习题量适中，习题既有足够的基本题，又包括了一些思考性及综合性的题目。

本教材是一本有特色的，符合应用型本科教学要求的教材。可供建筑类各专业使用。学分为 9～10 学分类型的专业可全书使用，其他类型的专业可选辑使用，也可只用上册或下册。

本教材的编写分工如下：

上册由王振波教授和孔宪宾教授主编；宿迁学院王振波、佘守坚和乔燕编写了第一章、第五章、第十一章、附录Ⅰ和附录Ⅱ；淮阴工学院孔宪宾、沈化荣和夏江涛编写了第二章、第三章、第六章和第七章；盐城工学院崔清洋编写了第

九章和第十章；徐州工程学院李天珍编写了第八章；南通大学王海霞编写了第四章。

下册由孔宪宾教授和王振波教授主编；淮阴工学院孔宪宾、沈化荣和夏江涛编写了第二章、第十章、第十一章、第十二章和第十三章；宿迁学院王振波、佘守坚、乔燕编写了第四章、第六章、第八章和第九章；盐城工学院崔清洋编写了第七章；徐州工程学院李天珍编写了第三章和第五章；南通大学王海霞编写了第一章。

本教材由河海大学徐道远教授主审。

本教材在编写过程中，得到了南京工业大学刘伟庆教授的大力支持，安徽理工大学王晋平副教授对本书的编写也提出了许多宝贵意见，在此表示衷心感谢。

限于编者水平，本书难免存在不足和欠妥之处，诚请各位师生和读者批评指正。

编者

2006年1月

目　录

第一章

点的运动

【本章要点】

- *点的简单运动。*
- *点相对某一参考系的几何位置随时间变化的规律。*
- *点的运动方程、运动轨迹、速度和加速度。*

点的基本运动是研究一般物体运动的基础，又具有独立的应用意义。本章研究点的运动，先提出点的运动方程、速度和加速度的矢量表示，再推导出这些运动学特征在直角坐标系和自然轴系中的表示，建立起点的坐标、速度、加速度这三者之间的解析关系。

第一节 矢 径 法

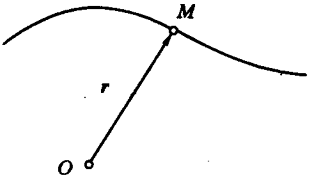

图 1-1

设动点 M 在空间作曲线运动，如图 1-1 所示。在空间任选一固定点 O 为坐标原点，则动点 M 的位置可用矢量 $\boldsymbol{r}=\overline{OM}$ 来表示，$\boldsymbol{r}$ 称为点 M 相对原点 O 的**位置矢量**，简称矢径。不同的矢径 $\boldsymbol{r}$ 对应动点 M 在不同瞬时的位置。这种确定点的位置的方法称为**矢径法**。当动点 M 运动时，矢径 $\boldsymbol{r}$ 随时间 t 而变化，并且是自变量 t 的单值连续函数，即

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t) \tag{1-1}$$

上式称为以矢量表示的点的运动方程。动点 M 在运动过程中，其矢径 $\boldsymbol{r}$ 的末端描绘出的连续曲线就是动点 M 的运动轨迹。

点的矢径 $\boldsymbol{r}$ 对时间的变化率称为点的**速度**，即

$$\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1-2}$$

式中：$\Delta \boldsymbol{r}$ 为矢径 $\boldsymbol{r}$ 的增量。

点的速度是矢量，其大小等于 $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t|$，表明点运动的快慢；其方向是 $\Delta t\to 0$ 时 $\Delta \boldsymbol{r}$ 的极限方向，即沿动点运动轨迹的切线，并与此点的运动方向一致。在国际单位制中，速度

$\boldsymbol{v}$的单位为 m/s。

点的速度矢对时间的变化率称为点的加速度，即

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1-3}$$

它也等于其矢径对时间的二阶导数。点的加速度也是矢量，它表征了速度大小和方向的变化。其大小等于$|\mathrm{d}v/\mathrm{d}t|$，其方向与$\Delta t\to 0$时$\Delta \boldsymbol{v}$的极限方向一致。

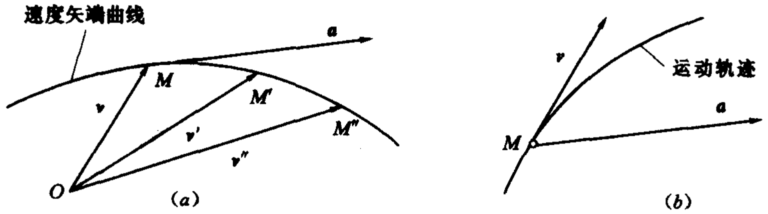

图 1－2

在空间任取一点O，把动点M在连续不同瞬时的速度矢量$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{v}'$、$\boldsymbol{v}''$、…等都平行移动到点O，连接各矢量的端点M、M'、M''、…，就构成一条连续的曲线，称为**速度矢端曲线**，如图 1－2（a）所示。动点M的加速度矢量$\boldsymbol{a}$的方向与速度矢端曲线在相应点的切线平行。

第二节 直角坐标法

取一固定的直角坐标系$Oxyz$，则动点M在任一瞬时的空间位置不仅可以用它相对于坐标原点O的矢径$\boldsymbol{r}$表示，还可以用它的三个直角坐标（x，y，z）表示，如图 1－3 所示。这种确定点的位置的方法称为**直角坐标法**。

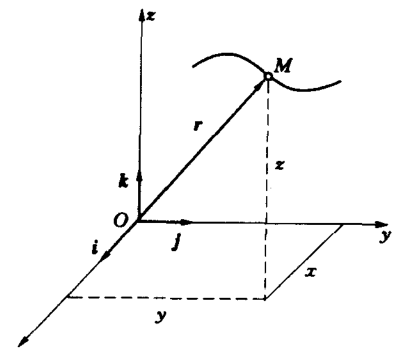

图 1－3

由于矢径的原点与直角坐标系的原点重合，所以有如下关系：

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} \tag{1-4}$$

式中：$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$分别为沿三个定坐标轴的单位矢量。

由于$\boldsymbol{r}$是时间的单值连续函数，因此，x、y、z也是时间的单值连续函数。利用式（1－4），可以将运动方程（1－1）写成

$$x=f_1(t),\quad y=f_2(t),\quad z=f_3(t) \tag{1-5}$$

这些方程称为以直角坐标表示的点的运动方程。如果知道点的运动方程式（1－5），就可以求出任一瞬时点的坐标（x，y，z）的值，也就完全确定了该瞬时动点的位置。如果从方程式（1－5）中消去时间参数t，可得到点的轨迹方程，即

$$f(x,y,z)=0 \tag{1-6}$$

将式（1－4）代入式（1－2），有

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} \tag{1-7}$$

设动点 M 的速度 $\boldsymbol{v}$ 在直角坐标轴上的投影分别为 v_x、v_y、v_z，即

$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k} \tag{1-8}$$

可得

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\quad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\quad v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \tag{1-9}$$

即动点的速度在直角坐标轴上的投影等于动点各相应坐标对时间的一阶导数。

由速度 $\boldsymbol{v}$ 在直角坐标轴上的投影可求得其大小和方向余弦，即

$$\left.\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \\ \cos\alpha = \frac{v_x}{v},\quad &\cos\beta = \frac{v_y}{v},\quad \cos\gamma = \frac{v_z}{v} \end{aligned}\right\} \tag{1-10}$$

式中：α、β、γ 分别为速度 $\boldsymbol{v}$ 与 x、y、z 轴正向的夹角。

速度的大小和方向由它的三个投影 v_x、v_y、v_z 完全确定。

同理，由加速度的定义，类似于对速度的分析，设

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k} \tag{1-11}$$

则有

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},\quad a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2},\quad a_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} \tag{1-12}$$

因此，加速度在直角坐标轴上的投影等于动点各相应坐标对时间的二阶导数。

由加速度 $\boldsymbol{a}$ 在直角坐标轴上的投影可求得其大小和方向余弦，即

$$\left.\begin{aligned} a &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \\ \cos\alpha' = \frac{a_x}{a},\quad &\cos\beta' = \frac{a_y}{a},\quad \cos\gamma' = \frac{a_z}{a} \end{aligned}\right\} \tag{1-13}$$

式中：α'、β'、γ' 分别为速度 $\boldsymbol{v}$ 与 x、y、z 轴的夹角。

加速度的大小和方向由它的三个投影 a_x、a_y、a_z 完全确定。

【例 1-1】 椭圆规的曲柄 OC 可绕定轴 O 以匀速度 ω 转动，其端点 C 与规尺 AB 的中点以铰链相连接，而规尺 A、B 两端分别在相互垂直的滑槽中运动，如图 1-4 所示。已知：$OC=AC=BC=l$，$MC=a$，$\varphi=\omega t$。试求规尺上点 M 的运动方程、运动轨迹、速度和加速度。

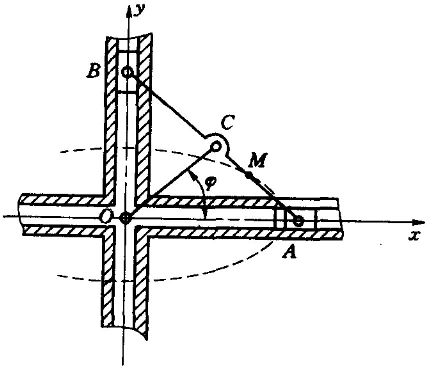

图 1-4

解：欲求点 M 的运动轨迹，可以先用直角坐标法给出它的运动方程，然后从运动方程中消去时间 t，得到轨迹方程。为此，取坐标系 Oxy 如图 1-4 所示，点 M 的运动方程为

$$x = (OC + CM)\cos\varphi = (l + a)\cos\omega t$$
$$y = AM\sin\varphi = (l - a)\sin\omega t$$

消去时间 t，得轨迹方程为

$$\frac{x^2}{(l+a)^2}+\frac{y^2}{(l-a)^2}=1$$

由此可见，点 M 的轨迹是一个椭圆，长轴与 x 轴重合，短轴与 y 轴重合。

为求点的速度，将点的坐标对时间求一阶导数，得

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\omega(l+a)\sin\omega t,\quad v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\omega(l-a)\cos\omega t$$

故点 M 的速度大小为

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{\omega^2(l+a)^2\sin^2\omega t+\omega^2(l-a)^2\cos^2\omega t}=\omega\sqrt{l^2+a^2-2al\cos2\omega t}$$

其方向余弦为

$$\cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{i})=\frac{v_x}{v}=\frac{-(l+a)\sin\omega t}{\sqrt{l^2+a^2-2al\cos2\omega t}}$$

$$\cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{j})=\frac{v_y}{v}=\frac{(l-a)\cos\omega t}{\sqrt{l^2+a^2-2al\cos2\omega t}}$$

为求点的加速度，将点的坐标对时间求二阶导数，得

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\omega^2(l+a)\cos\omega t,\quad a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=-\omega^2(l-a)\sin\omega t$$

故点 M 的加速度大小为

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=\sqrt{\omega^4(l+a)^2\cos^2\omega t+\omega^4(l-a)^2\sin^2\omega t}=\omega^2\sqrt{l^2+a^2+2al\cos2\omega t}$$

其方向余弦为

$$\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{i})=\frac{a_x}{a}=\frac{-(l+a)\cos\omega t}{\sqrt{l^2+a^2+2al\cos2\omega t}}$$

$$\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{j})=\frac{a_y}{a}=\frac{-(l-a)\sin\omega t}{\sqrt{l^2+a^2+2al\cos2\omega t}}$$

第三节 自然坐标法

如果点的运动轨迹已知，取轨迹上任一点为参考点，则动点 M 的位置可由该点到参考点带正负号的轨迹弧长来确定。这种确定点的位置的方法称为自然坐标法。

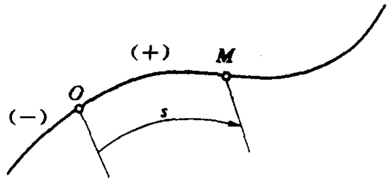

图 1-5

设动点 M 的轨迹如图 1-5 所示曲线，在轨迹上任选一点 O 为坐标原点，并规定轨迹的一端为正向，另一端为负向，则点在任意瞬时 t 的位置可由带正负号的弧长 s 来确定，它称为动点 M 在轨迹上的弧坐标。弧坐标 s 是代数量。当动点 M 运动时，弧长 s 随时间 t 而变化，并且是自变量 t 的单值连续函数，即

$$s=f(t)\tag{1-14}$$

上式称为以弧坐标表示的点的运动方程。

一、自然轴系

在点的运动轨迹曲线上取极为接近的两点 M 和 M_1，其间的弧长为 Δs，这两点切线的单位矢量分别为 $\boldsymbol{\tau}$ 和 $\boldsymbol{\tau}_1$，指向与弧坐标正向一致，如图 1-6 所示。将 $\boldsymbol{\tau}_1$ 平移到点 M，则

$\boldsymbol{\tau}$和$\boldsymbol{\tau}_1$决定一平面。当点M_1无限趋近点M时，此平面趋近于某一极限位置，此极限平面称为曲线在点M的**密切面**。过点M并与该点切线垂直的平面称为**法平面**。法平面与密切面的交线称为**主法线**，令主法线的单位矢量为$\boldsymbol{n}$，指向曲线内凹的一侧。过点M且垂直于该点切线及主法线的直线称为**副法线**，令副法线的单位矢量为$\boldsymbol{b}$，指向与$\boldsymbol{\tau}$、$\boldsymbol{n}$符合右手螺旋规则，即

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{n}$$

以点M为原点，以切线、主法线和副法线为坐标轴建立的正交坐标系称为曲线在点M的**自然坐标系**，这三个轴称为**自然坐标轴**。随着点M在轨迹上运动，自然轴系也随点M在轨迹上的位置而改变；也就是说，自然坐标系是随动点M沿曲线移动的局部坐标系。

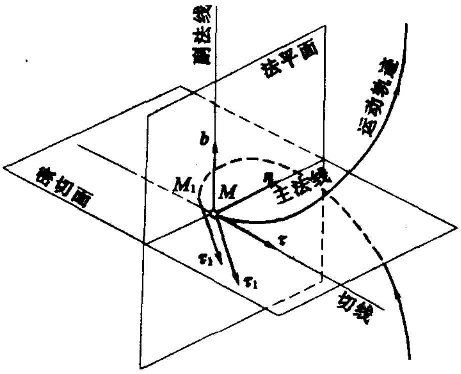

图 1－6

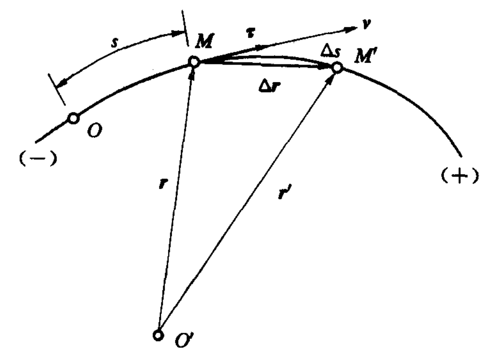

图 1－7

二、点的速度

设在时间间隔Δt内，点沿轨迹由M运动到M'，其矢径有增量$\Delta\boldsymbol{r}$，如图 1－7 所示。由速度定义，得

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

由于

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\right|=\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta s}\right|=1$$

且$\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}s$的方向是矢量增量$\Delta\boldsymbol{r}$在$\Delta t\to 0$时的极限方向，即沿轨迹曲线在点$M$处的切线方向，并指向轨迹的正向，也就是切线单位矢量$\boldsymbol{\tau}$的方向，即

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}=\boldsymbol{\tau}$$

因此

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}=v\boldsymbol{\tau}\tag{1-15}$$

其中

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\tag{1-16}$$

式中：v为速度$\boldsymbol{v}$在切线方向的投影。

当v为正值时，$\mathrm{d}s/\mathrm{d}t>0$，弧坐标$s$的值随时间增加而增大，点沿轨迹正向运动；当$v$

为负值时，$ds/dt<0$，点沿轨迹负向运动。即 ds/dt 的绝对值表示速度的大小，它的正负号表示点沿轨迹运动的方向。

三、点的切向加速度和法向加速度

将式（1-15）对时间取一阶导数，由于 $\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{\tau}$都是变量，得

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}+v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t} \tag{1-17}$$

式（1-17）右端两项都是矢量，第一项反映了速度大小相对于时间的变化，记为 $\boldsymbol{a}_\tau$；第二项反映了速度方向相对于时间的变化，记为$\boldsymbol{a}_n$。下面分别对它们进行讨论。

（一）反映速度大小变化的加速度$\boldsymbol{a}_\tau$

$$\boldsymbol{a}_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}=\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{\tau} \tag{1-18}$$

显然，$\boldsymbol{a}_\tau$ 是一个沿轨迹切线的矢量，因此称为**切向加速度**。若 $dv/dt>0$，$\boldsymbol{a}_\tau$ 指向轨迹的正向；若 $dv/dt<0$，$\boldsymbol{a}_\tau$ 指向轨迹的负向。令 a_τ 为加速度$\boldsymbol{a}$沿轨迹切向的投影，则

$$a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} \tag{1-19}$$

因此，切向加速度反映点的速度值对时间的变化率，它的代数值等于速度的代数值对时间的一阶导数，或弧坐标对时间的二阶导数，它的方向沿轨迹切线。

（二）反映速度方向变化的加速度$\boldsymbol{a}_n$

$$\boldsymbol{a}_n=v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v^2\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s} \tag{1-20}$$

$\boldsymbol{a}_n$ 反映速度方向$\boldsymbol{\tau}$随时间的变化。设点 M 经弧长 Δs 运动到点 M'，点 M 处曲线切向单位矢量为$\boldsymbol{\tau}$，点 M'处单位矢量为$\boldsymbol{\tau}'$，而切线经过 Δs 时转过的角度为 $\Delta\varphi$，如图 1-8 所示。曲线切线的转角对弧长的一阶导数的绝对值称为**曲率**，曲率的倒数称为**曲率半径**。若曲率半径用 ρ 表示，则

$$\frac{1}{\rho}=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\right| \tag{1-21}$$

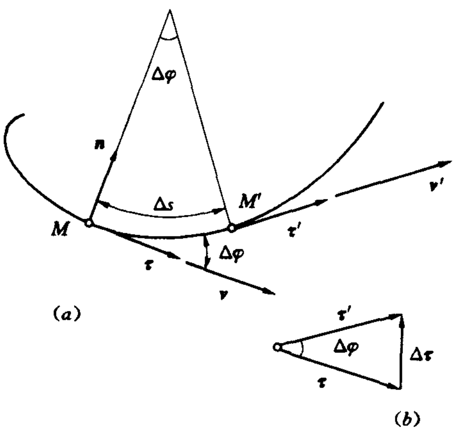

图 1-8

由图 1-8 可见

$$|\Delta\boldsymbol{\tau}|=2|\boldsymbol{\tau}|\sin\frac{\Delta\varphi}{2}$$

当 $\Delta s\to 0$ 时，$\Delta\varphi\to 0$，$\Delta\boldsymbol{\tau}\perp\boldsymbol{\tau}$，且 $|\boldsymbol{\tau}|=1$，因此有

$$|\Delta\boldsymbol{\tau}|\cong\Delta\varphi$$

由于 Δs 为正时，点沿 $\boldsymbol{\tau}$ 的正方向运动，$\Delta\boldsymbol{\tau}$ 指向轨迹内凹一侧；Δs 为负时，$\Delta\boldsymbol{\tau}$ 指向轨迹外凸一侧。因此有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{\tau}}{\Delta s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\boldsymbol{n}=\frac{1}{\rho}\boldsymbol{n} \tag{1-22}$$

将式（1-22）代入式（1-20），得