中国科学院考研指定参考书

中国科学技术大学数学教学丛书

组合数学

潘永亮　徐俊明　编

科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

本书系统地介绍组合数学中涉及组合计数和组合设计的基本原理、基本问题和基本方法. 基本计数问题包括排列和组合、正整数的分拆、第一类 Stirling 数和第二类 Stirling 数. 基本计数方法包括生成函数、递推关系、容斥原理、反演公式和 Polya 计数定理. 组合设计包括正交拉丁方、平衡不完全区组设计和对称设计等.

本书可作为高等学校数学系、计算机科学系本科生和信息类研究生的教材, 还可供高等学校教师、组合数学工作者和爱好者参考.

图书在版编目(CIP)数据

组合数学/潘永亮, 徐俊明编. —北京: 科学出版社, 2006
(中国科学技术大学数学教学丛书)
ISBN 7-03-016942-5

I. 组… II. ①潘… ②徐… III. 组合数学-高等学校-教材 IV. O157

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 013267 号

责任编辑: 姚莉丽 赵 靖 / 责任校对: 李奕萱
责任印制: 张克忠 / 封面设计: 陈 敬

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

丽 源 印 刷 厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2006 年 5 月第 一 版 开本: B5(720×1000)
2006 年 5 月第一次印刷 印张: 12
印数: 1—3 500 字数: 230 000

定价: 18.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈新欣〉)

《中国科学技术大学数学教学丛书》编委会

前　言

组合数学 (combinatorics) 主要研究一组离散对象满足给定条件的安排的存在性、构造和计数等问题. 组合数学是一个古老的数学分支, 人们对它的研究兴趣可以追溯到四千多年前我国古代的《河图》和《洛书》中 3 阶幻方问题的解答. 近 20 年来, 计算机科学、编码理论、规划论、数字通讯、试验设计等学科的迅猛发展, 提出了一系列需要组合数学解决的理论和实际问题, 加上组合数学自身的逻辑要求提出的问题以及其它数学分支向组合数学提出的问题, 使得组合数学已成为当今发展最为迅速的数学分支之一. 越来越多的大学已选择组合数学作为理工科学生的课程.

中国科学技术大学数学系有对本科生开设组合数学课程的传统. 20 世纪 90 年代以来, 我们一直采用李乔教授的《组合数学基础》(高等教育出版社) 和邵嘉裕教授的《组合数学》(同济大学出版社) 作为主要教材. 这是两本非常优秀的组合数学教材, 但由于印刷量太少, 加上年份已久, 图书市场上已经买不到了. 为了教学需要, 我们自己编写了这本教材. 本书就是编者在近几年教学实践的基础上, 以李乔教授和邵嘉裕教授的书为蓝本撰写的.

组合数学内容丰富, 很难全部包含在适于一个学期使用的教材中. 编者本着少而精的原则, 突出课程的核心内容: 组合计数的经典理论和方法. 全书分 6 章, 分别为: 母函数、容斥原理、反演公式、Polya 计数定理、矩阵的组合性质和区组设计. 根据编者的经验, 作为一学期的课程, 每周 3 学时, 讲完本书的全部内容是适当的.

本书包含大量例题. 每章后面都附有一定数量的习题, 有些还可以看成是对正文部分的补充, 供读者练习和进一步思考. 书末附有习题提示或解答. 编者建议, 读者在思考和动手解题的过程中, 不要先去看这些提示或解答, 以免干扰了自己的思维.

本书可作为数学与计算机科学专业的本科生和研究生的教材或者参考书, 也可供在这些领域从事教学和科研的教师和工程技术人员参考.

作者对关心本教材编写并从各方面给予大力支持的校研究生院、教务处和数学系的领导和老师表示感谢. 此外, 对科学出版社的支持表示感谢.

本书不妥之处, 敬请批评指正.

作　者

2005 年 12 月于中国科大

目　录

第1章　母　函　数

1.1　母函数的代数运算

母函数又称生成函数或发生函数. 它是处理组合论课题的一个重要工具. 下面先给出定义.

定义 1.1.1　设

$$a = \{a_n\}_0^\infty = (a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$$

是一个无限数列, 则称形式幂级数

$$a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots \tag{1.1.1}$$

是数列 a 的普通型母函数, 简称为普母函数或母函数, 简记其为 $G(z)$, 这里 z 是复数域 $\mathbf{C}$ 上的不定元.

定义中使用“形式幂级数”的用语, 为的是撇开级数 (1.1.1) 的收敛性的问题.

定义 1.1.2　形式幂级数 (1.1.1) 和

$$b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

相等, 当且仅当其对应的系数都相等:

$$b_n = a_n, \qquad n \geqslant 0.$$

我们记复数域 $\mathbf{C}$ 上所有形式幂级数的集合为 $C[[z]]$. 下面定义形式幂级数的代数运算.

定义 1.1.3　设 $a(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $b(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n \in C[[z]]$. 定义

$$a(z) + b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n, \tag{1.1.2}$$

$$a(z)b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n. \tag{1.1.3}$$

上面定义了 $C[[z]]$ 中两个幂级数的加法和乘法. 另外, 当 $a(z)$ 是个常数时, (1.1.3) 式实际上也给出了常数对形式幂级数的数乘定义. 读者易知 $C[[z]]$ 无零因子, 即

$$g(z) \neq 0, h(z) \neq 0 \Longrightarrow g(z)h(z) \neq 0.$$

从而 $C[[z]]$ 是整环.

若记 $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, 则称序列 $\{c_n\}$ 为序列 $\{a_n\}$ 和序列 $\{b_n\}$ 的 Cauchy 卷积, 记作 $\{c_n\} = \{a_n\} * \{b_n\}$. 于是, 形式幂级数的上述乘法与序列集合中的 Cauchy 卷积乘法有下面的对应:

$$a(z) \cdot b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \Longleftrightarrow \{c_n\} = \{a_n\} * \{b_n\}.$$

引理 1.1.1　取 $a_n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \geqslant 1, \end{cases}$ 则形式幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 是环 $C[[z]]$ 中的乘法单位元, 记作 1.

证　任取 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n \in C[[z]]$, 则 $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n = b_n$. 故

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

即 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 是环 $C[[z]]$ 中的乘法单位元. □

定理 1.1.1　$a(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $C[[z]]$ 中有乘法逆元的充要条件是 $a_0 \neq 0$.

证　$a(z)$ 可逆 $\Longleftrightarrow$ 存在 $b(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, 使得 $a(z)b(z) = 1 \Longleftrightarrow$ 存在 $\{b_n\}_0^{\infty}$ 使得下列各关系式全成立:

$$a_n b_0 + \cdots + a_0 b_n = \begin{cases} 1, & 若n = 0, \\ 0, & 若n > 0 \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow$ 对任意下面的线性方程组对 $b_0, b_1, \cdots, b_n$ 有解:

$$\begin{pmatrix} a_0 & & & & \\ a_1 & a_0 & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Longleftrightarrow a_0 \neq 0.$ □

注 定理 1.1.1 可另证：由 $a_0b_0=1$ 得到 $b_0=\dfrac{1}{a_0}$. 由 $\sum\limits_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}=0, n\geqslant 1$ 得到

$$b_n=-\frac{1}{a_0}\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n-k}\qquad (n\geqslant 1).$$

所以 b_n 可以递归地唯一确定下来.

定理 1.1.2 若 $b=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nz^n$在 $C[[z]]$ 中可逆 (即 $b_0\neq 0$), 则方程 $x^2=b\,(x\in C[[z]])$ 在环 $C[[z]]$ 中有符号相反的两个解 $x=\pm c$.

证 设 $x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$, 则 $x^2=b$ 当且仅当以下各式成立：

$$a_0a_n+a_1a_{n-1}+\cdots+a_{n-1}a_1+a_na_0=b_n\qquad (n=0,1,2,\cdots).$$

由第一个方程 $a_0^2=b_0$ 知 $a_0=\pm\sqrt{b_0}$ (其中记号 $\sqrt{b_0}$ 表示 b_0 的任一确定的平方根). 因 $b_0\neq 0$, 所以 $a_0\neq 0$. 进而由上述各式可递归唯一地解出 $a_n=\dfrac{1}{2a_0}\sum\limits_{k=1}^{n-1}a_ka_{n-k}$, $n\geqslant 1$. 由归纳易知, a_0 取值 $\sqrt{b_0}$ 和 $-\sqrt{b_0}$ 后分别依次解出的各项 $a_1,\cdots,a_n,\cdots$ 均相差一符号. 故 $x^2=b$ 在环 $C[[z]]$ 中有符号相反的两个解. □

定义 1.1.4 对形式幂级数 $a=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n\neq 0$, 称满足 $a_0=a_1=\cdots=a_{k-1}=0$, 而 $a_k\neq 0$ 的非负整数 k 为 a 的最低幂次, 记作 $\mathrm{md}(a)$.

由定义易见形式幂级数的最低幂次满足如下关系式：

$$\mathrm{md}(ab)=\mathrm{md}(a)+\mathrm{md}(b)\qquad (a,b\in C[[z]]).$$

定理 1.1.3 形式幂级数 $a\neq 0$ 为可开方的充要条件是 $\mathrm{md}(a)$ 为偶数；又当 $a\neq 0$ 且 a 为可开方时, a 有两个符号相反的平方根.

证 若有 $x^2=a$, 则 $\mathrm{md}(a)=2\mathrm{md}(x)$ 为偶数. 反之, 若 $\mathrm{md}(a)$ 为偶数, 则 a 可表示为 $a=t^{2k}a'$, 其中 a' 为可逆元. 设 $\pm x$ 为 a' 的两个平方根, 则 $\pm t^kx'$ 是 a 的两个平方根. □

一般地, 人们的目的是求出数列 a 的一般项 a_n. 通常的做法是：先根据已知条件写出由此数列所生成的母函数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$, 得到其和函数 $a(z)$, 再反过来把和函数 $a(z)$ 展开成幂级数, 就可以得到 a_n. 这中间当然需要对 a 的母函数进行各种运算, 其中往往既会有代数运算, 也会有分析运算. 我们对数列的母函数进行运算就是指把它们当作形式幂级数时的运算. 下一节将讨论形式幂级数的分析运算.

1.2　形式幂级数的分析运算

定义 1.2.1　形式幂级数

$$a(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n \tag{1.2.1}$$

的形式微商定义为形式幂级数

$$D_za(z)=Da(z)=\sum_{n\geqslant 1}na_nz^{n-1}.$$

D 称为形式微商算符. (1.2.1) 的 $n\,(n\geqslant 0)$ 次形式微商归纳地定义为

$$\begin{aligned}&D^0a(z)=a(z),\\&D^na(z)=D(D^{n-1}a(z)).\end{aligned}$$

若形式幂级数 $b(z)$ 满足

$$a(z)=Db(z),$$

则称 $b(z)$ 为 $a(z)$ 的形式原函数.

易知, (1.2.1) 的原函数是

$$c+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}z^{n-1}, \tag{1.2.2}$$

其中 c 为任意常数. (1.2.1) 的第 t 次形式微商是

$$D^ta(z)=\sum_{n\geqslant t}n(n-1)\cdots(n-t+1)a_nz^{n-t}.$$

容易验证, 以下的形式微商法则成立:

$$D(a(z)+b(z))=Da(z)+Db(z), \tag{1.2.3}$$

$$D(ca(z))=cDa(z),\qquad c\text{ 为常数}, \tag{1.2.4}$$

$$D(a(z)b(z))=a(z)Db(z)+b(z)Da(z). \tag{1.2.5}$$

(1.2.3) 和 (1.2.4) 的证明是直接的. (1.2.5) 成立的原因是

$$D(a(z)b(z))=D\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i+j=n}a_ib_j\right)z^n$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n\geqslant 1} n \sum_{i+j=n} a_i b_j z^{n-1} \\
&= \sum_{n\geqslant 1} \sum_{i+j=n} (i+j) a_i b_j z^{n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} \left(i a_i z^{i-1}\right) b_j z^j + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} \left(a_i z^i\right) \left(j b_j z^{j-1}\right) \\
&= \sum_{i\geqslant 1} i a_i z^{i-1} \sum_{j\geqslant 0} b_j z^j + \sum_{i\geqslant 0} a_i z^i \sum_{j\geqslant 1} j b_j z^{j-1}.
\end{aligned}
$$

很明显, (1.2.3) 和 (1.2.5) 对多个因子的情形也有类似的公式.

若幂级数 (1.2.1) 在圆

$$|z| < R \qquad (R > 0) \tag{1.2.6}$$

内收敛, 则 (1.2.1) 有其解析函数论中的意义. 由解析函数论中的结果可知, 它有唯一的和函数 $f(z)$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad |z| < R, \tag{1.2.7}$$

且 (1.2.7) 对圆 (1.2.6) 是内闭绝对一致收敛的, 可以逐项微商, 逐次求原函数等等. 有时还可能有有限的表达式, 即是由初等函数经有限次代数运算的结果.

若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ 在圆

$$|z| < R_1$$

内收敛, 其和函数为 $g(z)$. 不失一般性, 可设 $R = \min(R, R_1)$, 则由解析函数论中的结果可知, 级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} a_i b_j z^n, \qquad |z| < R$$

收敛, 其和函数为 $f(z)g(z)$.

若在 (1.2.7) 中, $a_0 \neq 0$, 则由定理 1.1.1 知 $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)^{-1}$ 在 $C[[z]]$ 中存在. 进而, 当 $|z|$ 充分小 (例如 $|z| < r$) 时, $f(z) \neq 0$, 它收敛于 $\dfrac{1}{f(z)}$ $(|z| < r)$.

因此, 在进行形式幂级数的形式运算时, 若遇其中某些幂级数是收敛的, 则可用它的和函数来代替它参与运算. 因而, 函数论的知识可以用来处理组合论的课题. 当然, 运算的最后结果可能因有不收敛的形式幂级数的参与而不收敛, 故不具备函数论上的意义, 然而却仍具备组合论上的意义.

下面我们就幂级数的具体计算作一些讨论.

定义 1.2.2　若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 有正的收敛半径, 则称形式幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ 收敛, 进而称其为序列 $\{a_n\}$ 的发生函数. 记 $C[[z]]$ 中全体收敛元所成的子集为 $C_0[[z]]$.

由解析函数论知道: 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 有正的收敛半径当且仅当其和函数在其收敛域内解析. 所以 $C_0[[z]]$ 中元素就是正常的解析函数, 元素之间的运算可以先化成它们的生成函数进行正常的函数运算, 而不必拘泥于纯粹的形式级数之间的运算规则, 这将大大简化计算的步骤, 加快计算的进程. 不幸的是, 人们往往需求解含有未知元 (其收敛性当然也未知) 的形式幂级数关系式. 这种关系式不能直接转化成函数的关系式, 除非能事先确定该关系式中未知元的收敛性. 下面建立一些准则, 用以确定一个关于未知形式幂级数的一次和二次方程的解的收敛性. 为此我们先考虑收敛元的逆元和平方根的收敛性.

定理 1.2.1　设 $a(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in C[[z]]$.

(1) 若 $a(z)$ 是可逆的收敛元, 则其逆元 $a^{-1}(z)$ 也是收敛元;

(2) 若 $a(z)$ 是可开方的收敛元, 则 $a(z)$ 的所有平方根也是收敛元.

证　(1) $C[[z]]$ 中有 $a(z)$ 的逆, 设为 $b(z)$. $a(z)$ 在 $z=0$ 的某邻域 $|z|<r$ 内解析, 且 $a(0)=a_0\neq 0$, 由连续性知存在一邻域 $|z|<r'$, 使在其内 $a(z)\neq 0$, 故 $b(z)=\dfrac{1}{a(z)}$ 在 $|z|<r'$ 内解析, 所以 $b(z)$ 有正的收敛半径.

(2) 由 $a(z)$ 收敛, 知其在收敛域上解析, 所以 $\sqrt{a(z)}$ 的任一个分支也解析. 而任一个分支也具有形式级数形式, 所以任一个分支有正的收敛半径. □

从前面到定理 1.2.1, 我们知, $C[[t]]$ 中的收敛元之间由有限次加、减、乘、除及开方运算后所得的仍是收敛元.

定理 1.2.2　对环 $C[[t]]$ 上一元一次方程 $ax=b(a\neq 0)$ 有:

(1) 方程有解的充要条件是 $\mathrm{md}(a)\leqslant \mathrm{md}(b)$;

(2) 方程有解时, 其解必唯一;

(3) 方程有解且当 a,b 均为收敛元时, 解也是收敛元.

证　(1) 若方程有解 x, 则 $\mathrm{md}(b)=\mathrm{md}(a)+\mathrm{md}(x)\geqslant \mathrm{md}(a)$. 反之可记 $a=t^{\mathrm{md}(a)}\cdot a'$, $b=t^{\mathrm{md}(a)}\cdot b'$, 其中 a' 为可逆元. 此时 $x=(a')^{-1}b'$ 就是方程的一个解.

(2) 若 $ax_1=b=ax_2$, 则 $a(x_1-x_2)=0$. 再由条件 $a\neq 0$ 及 $C[[t]]$ 是整环知 $x_1=x_2$, 即解唯一.

(3) 若 a,b 均为收敛元, 则 (1) 的证明过程中的 a',b' 也为收敛元, 从而 (1) 中给出的 (唯一) 解 $x=(a')^{-1}b'$ 也为收敛元. □

定理 1.2.3　对环 $C[[t]]$ 上的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\,(a\neq 0)$, 有:

(1) 方程有解的充要条件是 b^2-4ac 为可开方元, 且

$$\mathrm{md}(a)\leqslant\max\left(\mathrm{md}\left(-b+\sqrt{b^2-4ac},\mathrm{md}(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)\right),$$

其中 $\sqrt{b^2-4ac}$ 是 b^2-4ac 的某一平方根;

(2) 方程有解且当 a, b, c 均为收敛元时, 解也都是收敛元.

证 (1) 易知原方程可化为 $(2ax+b)^2=b^2-4ac$, 此方程有解时 b^2-4ac 为可开方元. 进一步考虑两个一元一次方程 $2ax+b=\sqrt{b^2-4ac}$ 及 $2ax+b=-\sqrt{b^2-4ac}$, 并利用定理 1.2.2, 即知 (1) 成立.

(2) 因为收敛元的和、差、积、平方根均收敛, 而且以收敛元为系数的一元一次方程的解也收敛, 所以结论成立. □

定理 1.2.2 及定理 1.2.3 使我们能在一个形式幂级数的一次及二次的关系式解出之前先确定未知元的收敛性, 然后再将其合理地转化为相应的和函数间的函数关系式来求解.

1.3 线性常系数齐次递推关系式

定义 1.3.1 若序列 $\{a_n\}$ 的项满足下列关系式:

$$a_n+b_1a_{n-1}+\cdots+b_ka_{n-k}=0 \qquad (n\geqslant k), \tag{1.3.1}$$

其中 $b_1,\cdots,b_k$ 为常数且 $b_k\neq 0$, 则称此关系式是一个 k 阶常系数线性齐次递推关系式. 满足此关系式的任一序列称为是递推式 (1.3.1) 的一个解. 由全体解构成的集合称为是递推式 (1.3.1) 的通解.

我们下面主要的目的就是要找到满足递推关系式 (1.3.1) 的序列 $\{a_n\}$ 的通项表达式.

定理 1.3.1 若序列 $\{a_n\}$ 是 (1.3.1) 式满足 "初始条件" $(a_0, a_1, \cdots, a_{k-1})=(d_0, d_1, \cdots, d_{k-1})$ 的一个解, 则此序列的母函数 $a=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 收敛, 且其和函数 $a(z)$ 是如下的函数 (其中 $b_1,\cdots,b_k$ 为 (1.3.1) 式中的系数, 取 $b_0=1$):

$$a(z)=\frac{\sum\limits_{n=0}^{k-1}\left(\sum\limits_{i=0}^{n}d_ib_{n-i}\right)z^n}{\sum\limits_{n=0}^{k}b_nz^n}. \tag{1.3.2}$$

证 补充定义 $b_n=0(n>k)$, 则序列 $\{b_n\}$ 的形式幂级数 $b=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nz^n$ 收敛, 且

其和函数为 $b(z)=\sum\limits_{n=0}^{k} b_n z^n$. 于是递推关系式 (1.3.1) 可写为

$$\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}=0 \qquad (n \geqslant k). \tag{1.3.3}$$

由形式幂级数乘法规则及 (1.3.3) 式, 我们有

$$\begin{aligned} a\cdot b &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}\right) z^n \\ &= \sum_{n=0}^{k-1}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}\right) z^n. \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

即当 $n \geqslant k$ 时, ab 的 z^n 项的系数全为 0, 因此 ab 收敛. 于是由定理 1.2.2 知 a 也必收敛. 将 (1.3.4) 式转化为和函数间的函数关系式, 并利用 "初始条件" $a_i=d_i\,(i=0,1,\cdots,k-1)$, 即得 (1.3.2) 式. □

(1.3.2) 式右端的函数是 z 的有理函数. 所谓有理函数就是形如

$$R(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$$

的函数, 其中 P 和 Q 都是多项式. 如果 $\deg P(z) < \deg Q(z)$, 称 R 为真分式; 如果 $\deg P(z) \geqslant \deg Q(z)$, 称 R 为假分式. 假分式总可以通过除法化为一个多项式与一个真分式之和. 例如

$$\frac{z^5}{1-z^2}=-z^3-z+\frac{z}{1-z^2}.$$

下面先介绍一个结论, 即有理函数可以分解成部分分式之和.

引理 1.3.1 设 $R=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 是个真分式, 其分母 Q 有分解式

$$Q(z)=(z-a)^{\alpha}\cdots(z-b)^{\beta}, \tag{1.3.5}$$

其中 $\alpha,\cdots,\beta$ 为自然数, 则

$$\begin{aligned} R(z)=&\frac{A_\alpha}{(z-a)^\alpha}+\frac{A_{\alpha-1}}{(z-a)^{\alpha-1}}+\cdots+\frac{A_1}{z-a}+\cdots \\ &+\frac{B_\beta}{(z-b)^\beta}+\frac{B_{\beta-1}}{(z-b)^{\beta-1}}+\cdots+\frac{B_1}{z-b}. \end{aligned} \tag{1.3.6}$$

并且这个分解式的所有系数是唯一确定的.

证 设 $Q(z)$ 的次数为 n, 对 n 用数学归纳法.

当 $n=1$ 时, $P(z)$ 是常数, 命题成立.

假设对小于 n 的正整数, 命题成立. 下面证明对正整数 n 命题成立. 设 ω 是 $Q(z)$ 的 k 重根,

$$Q(z)=(z-\omega)^kQ_1(z),\qquad Q_1(\omega)\neq 0.$$

不妨设 $P(z)$ 与 $Q(z)$ 互素. 设

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{A_k}{(z-\omega)^k}+\frac{P_1(z)}{(z-\omega)^{k-1}Q_1(z)},$$

则

$$A_kQ_1(z)+(z-\omega)P_1(z)=P(z).$$

因此

$$A_k=\frac{P(\omega)}{Q_1(\omega)}\neq 0,$$

$$P_1(z)=\frac{P(z)-A_kQ_1(z)}{z-\omega}.$$

这里显然有 $\deg P_1(z)<\deg P(z)\leqslant\deg(z-\omega)^{k-1}Q_1(z)=n-1$. 根据归纳假设,

$$\frac{P_1(z)}{(z-\omega)^{k-1}Q_1(z)}$$

可分项表示. 因此

$$\frac{P(z)}{Q(z)}$$

可分项表示.

从 $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ “脱出”的第一项是 $\dfrac{A_k}{(z-\omega)^k}$, 余下的项的分母是 $(z-\omega)^{k-1}Q_1(z)$, 所以从下一项“脱出”的将是 $\dfrac{A_{k-1}}{(z-\omega)^{k-1}}$, 依次下去, 我们知 $R(z)$ 具有定理所描绘的分项表示形式. 而且由上面 A_k 的唯一性容易推知其分项表示必唯一.

若 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 不是互素的, 我们在作分解的时候, 就直接先把它们的公因子约去, 以化 $R(z)$ 为既约形式. 读者可以注意到, 它的分解式依然有 (1.3.6) 的形式, 只不过其中非既约因子所对应的前几项的系数必为 0 而已. □

定义 1.3.2 称多项式

$$g(z)=\sum_{n=0}^{k}b_nz^{k-n}=z^k+b_1z^{k-1}+\cdots+b_{k-1}z+b_k$$

为递推式 (1.3.1) 的特征多项式.

显然 $g(z)=z^k b\left(\dfrac{1}{z}\right)$, 所以

$$g(z)=\prod_{i=1}^{k}(z-\lambda_i) \Longleftrightarrow b(z)=\prod_{i=1}^{k}(1-\lambda_i z),$$

即 $g(z)$ 与 $b(z)$ 的根互为倒数.

令 $C[z]$ 为以 z 为不定元的全体复系数多项式的集合, 并记

$$C_m[z]=\left\{f(z)\in C[z]\,\middle|\,\deg f(z)\leqslant m\right\},$$

其中 $\deg f(z)$ 表示多项式 $f(z)$ 的次数.

下面将区分特征多项式 $g(z)$ 无重根和有重根两种情形来讨论递推式 (1.3.1) 的解的表达式.

定理 1.3.2 若递推关系式 (1.3.1) 的特征多项式 $g(t)$ 有 k 个不同的根 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$, 则 (1.3.1) 式的通解的通项 a_n 可表示为

$$a_n=A_1\lambda_1^n+\cdots+A_k\lambda_k^n, \tag{1.3.7}$$

其中 $A_1,\cdots,A_n\in\mathbf{C}$.

证 由 $g(z)=\prod\limits_{i=1}^{k}(z-\lambda_i)$ 知有 $b(z)=\prod\limits_{i=1}^{k}(1-\lambda_i z)$. 记 (1.3.2) 式右端的分子部分为 $f(z)$, 即 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{k-1}\left(\sum\limits_{i=0}^{n}d_i b_{n-i}\right)z^n\in C_{k-1}[z]$. 把 (1.3.1) 式改写为

$$a(z)=\frac{f(z)}{\prod\limits_{i=1}^{k}(1-\lambda_i z)}.$$

上式是有理真分式, 而且 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ 两两不同, 所以 $a(z)$ 可表示为分母均为一次因式的若干个有理真分式 (部分分式) 之和. 于是

$$\begin{aligned}a(z)&=\frac{f(z)}{\prod\limits_{i=1}^{k}(1-\lambda_i z)}=\sum_{i=1}^{k}\frac{A_i}{1-\lambda_i z}\\&=\sum_{i=1}^{k}A_i\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_i^n z^n=\sum_{n=0}^{\infty}(A_1\lambda_1^n+\cdots+A_k\lambda_k^n)z^n,\end{aligned}$$

从而得到

$$a_n=A_1\lambda_1^n+\cdots+A_k\lambda_k^n,$$

其中 $A_1, \cdots, A_k \in \mathbf{C}$. □

注 当我们把序列 $\{a_n\}$ 的前面 k 个项的值代入式 (1.3.2) 的分子, 则 $f(z)$ 就给定了, 于是 a_n 表达式 (1.3.7) 中的 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 就唯一确定了. 有了上面定理后, 从"初始条件" $a_i = d_i\,(i = 0, 1, \cdots, k-1)$, 可由下面的方程组唯一确定出 $A_1, \cdots, A_k$.

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + \cdots + A_k = d_0, \\ A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2 + \cdots + A_k\lambda_k = d_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_1\lambda_1^{k-1} + A_2\lambda_2^{k-1} + \cdots + A_k\lambda_k^{k-1} = d_{k-1}. \end{cases} \tag{1.3.8}$$

方程组 (1.3.8) 的系数矩阵的行列式是 Vandermonde 行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant k} (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0,$$

所以 (1.3.8) 有唯一解.

对于 k 阶常系数线性齐次递推式, 当特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 都不相等时, 我们已经给出了序列 $\{a_n\}$ 的解. 但是当 $g(z)$ 有重根时, (1.3.7) 就不好直接用了. 下面的定理 1.3.3 将解决特征多项式 $g(z)$ 有重根时的情况.

定理 1.3.3 若递推关系式 (1.3.1) 的特征多项式 $g(z) = \prod\limits_{i=1}^{s}(z - \lambda_i)^{m_i}$, 其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ 两两不同, 而 $\sum\limits_{i=1}^{s} m_i = k$, 则 (1.3.1) 式的解的项 a_n 可表示为

$$a_n = \sum_{i=1}^{s} Q_i(n)\lambda_i^n, \tag{1.3.9}$$

其中 $Q_i(n)$ 取遍 n 的次数不超过 $m_i - 1$ 的任意复多项式.

证 由 $g(z) = \prod\limits_{i=1}^{s}(z - \lambda_i)^{m_i}$ 知 $b(z) = \prod\limits_{i=1}^{s}(1 - \lambda_i t)^{m_i}$.

另外, 对 $\dfrac{1}{1-z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ 取 $j-1$ 次导数可得如下幂级数展开式:

$$\frac{1}{(1-z)^j} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+j-1}{j-1} z^n. \tag{1.3.10}$$

利用部分分式展开式及 (1.3.10) 式可将解的生成函数 $a(z)$ 表示为

$$a(z) = \frac{f(z)}{\prod\limits_{i=1}^{s}(1 - \lambda_i z)^{m_i}}$$