新课标新高考

◎根据2007年广东、山东、海南、宁夏四省区高考方案编写◎

总主编/薛金星

高考总复习全解

GAOKAO ZONGFUXI QUANJIE

数学

文科(1–1 1–2)

人教实验版

【一轮复习 · 选修课程】

B版

陕西人民教育出版社

◎根据2007年广东、山东、海南、宁夏四省区高考方案编写◎

《中学教材全解》

高考总复习全解·数学

【一轮复习·选修课程·文科】

人教实验B版

总 主 编　薛金星
本册主编　丁　一
　　　　　张　剑
副 主 编　毛　喆
　　　　　刘锡钰
　　　　　刘　芸
　　　　　张德聚
　　　　　沈　强

陕西人民教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

中学教材全解. 高考总复习全解. 数学：人教实验B版/薛金星主编；丁一分册主编.
—西安：陕西人民教育出版社，2006.4
ISBN 7－5419－9561－4

Ⅰ.中… Ⅱ.①薛…②丁… Ⅲ.数学课－高中－升学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第029370号

中学教材全解

高考总复习全解·数学

【一轮复习·选修课程·文科】

人教实验版B版

陕西人民教育出版社出版发行

(西安市长安南路181号)

各地书店经销　　北京市昌平兴华印刷厂印刷

880×1230毫米　16开本　6.75印张　290千字

2006年10月第1版　2006年10月第1次印刷

ISBN 7－5419－9561－4/G·8336

定价：9.80元

前言

[illegible] 解准解活

为满足2007年新课标高考总复习的需求，我们特邀请了新课标实验区的部分一线特高级教师、骨干教研员，参照各地高考方案，反复研究新课标，精细分析新教材，准确把脉新高考，编写了这套体现新高考理念、指导学生高考复习、帮助师生应对新高考的教辅图书——《高考总复习全解》丛书。

为方便各地区考生选择与自己所学教材版本相对应的教辅图书，从而节省宝贵的时间和金钱，提高复习效率，我们把本丛书分为[一轮复习·必修课程]、[一轮复习·选修课程]和[供二轮专题复习使用]三种，其特点如下：

首先是知识分布全面。真正体现了"一册在手，复习内容全有"的编写理念。其次是信息含量大。本丛书涵盖了高中全部新教材和复习的全过程，内容丰富，题量充足。

首先是对教材讲解细致入微。以语文学科为例，小到字的读音、词的辨析，大到阅读训练和作文训练都在本书中有所体现。其次是重点难点讲解细致，既有解题过程，又有思路点拨。其三是解题方法细，一题多解，多题一法，变通训练，总结规律。

首先是教材内容讲解精。围绕重点，突破难点，引发思考，启迪思维。根据考点要求，巧设问题，精讲精练，举一反三，触类旁通。其次是例、习题配置精。所选例题、习题注重典型性，避免随意性；注重迁移性，避免孤立性；注重能力性，避免盲目性。

首先是教材知识整合透彻。以新考纲为导向，立足教材，透彻整合知识；以考点为依据，打破教材，划分专题，构建知能体系。其次是透彻研究知识之间的联系。讲解过程既注重知识"点"与"面"的联系，又强调"教"与"学"、"练"与"测"的互动。再次是例题讲解透彻，既有解题过程，又有分析、拓展、点拨和总结，便于学生透彻理解问题，全面提升能力。

首先是信息新。以新教材为蓝本，根据新考纲和各省高考方案编写。其次是体例新。以新考纲为依据，紧扣新教材，全面分析高考命题动向、要求和规律，建构基础知识框架体系，明确主干内容，落实重点，突破难点。其三是题型、资料新。书中选用的题型、资料大都来自新课标实验区，都是按高考要求精心设计、认真挑选的。

这是本丛书的最高编纂原则。选择例题、习题时，不是在偏、难、怪上下功夫，而是注重设置基础题、能力题，力求训练难度能够切实反映高考要求。本丛书紧扣新课标教材，充分发挥教材的基础作用，适应各地方高考命题要求，同时注意了方法、技巧、规律的总结和升华。

从书内容由浅入深，由易到难，循序渐进，点拨学法，灵活多样，学习效果显著。所选题例主要来源于各版本教材中的例题、习题，题型材料新颖，注意与生产、生活、科技的紧密结合，全书充盈着浓厚的时代生活气息。

薛金星于清华大学

目 录

选修 1-1

选修 1-2

教材全解

第一章

常用逻辑用语

第1讲 四种命题与充要条件

课标要求·考纲下载

(1)了解命题的逆命题、否命题与逆否命题.

(2)理解必要条件、充分条件与充要条件的意义,会分析四种命题的相互关系.

基础梳理·考点解读

1. 四种命题的构成

命题 $p\Rightarrow q$ 是由条件 p 及结论 q 组成的,对 p、q 进行"换位"和"换质"后,可构成四种不同形式的命题.

(1)原命题:$p\Rightarrow q$;

(2)条件和结论"换位"得:$q\Rightarrow p$,此为原命题的逆命题;

(3)条件和结论"换质"(分别否定)得:$\neg p\Rightarrow\neg q$,此为原命题的否命题;

(4)条件和结论"换位"又"换质"得:$\neg q\Rightarrow\neg p$,此为原命题的逆否命题.

说明:在学习过程中,要注意条件 p、q 的位置变化.

2. 四种命题的关系

由于原命题和它的逆否命题是等价的,所以当一个命题的真假不易判断时,往往可以转而判断它的逆否命题的真假;有的命题不易直接证明时,就可以改证它的逆否命题成立.所以反证法的实质就是证明"原命题的逆否命题成立",所以教材在阐述了四种命题后安排了用反证法的例题,可以加深对命题等价性的理解.

说明:否命题与命题的否定是不同的,如果原命题是"若 p 则 q",那么这个原命题的否命题是"若非 p 则非 q",而这个命题的否定是"若 p 则非 q".可见:否命题既否定条件又否定结论,而命题的否定只否定结论.例如,原命题"若 $\angle A=\angle B$,则 $a=b$"的否命题是"若 $\angle A\neq\angle B$,则 $a\neq b$",而原命题的否定是"若 $\angle A=\angle B$,则 $a\neq b$".

3. 充分条件

如果 $p\Rightarrow q$,则 p 叫做 q 的充分条件,原命题(或逆否命题)成立,命题中的条件是充分的,也可称 q 是 p 的必要条件.

4. 必要条件

如果 $q\Rightarrow p$,则 p 叫 q 的必要条件,逆命题(或否命题)成立,命题中的条件为必要的,也可称 q 是 p 的充分条件.

5. 充要条件

如果既有 $p\Rightarrow q$,又有 $q\Rightarrow p$,记作 $p\Leftrightarrow q$,则 p 叫做 q 的充分必要条件,简称充要条件,原命题和逆命题(或逆否命题和否命题)都成立,命题中的条件是充要的.

充分、必要条件的判断:

(1)直接用定义判断.

(2)从命题来看:原命题正确,则条件是充分的;逆命题正确,则条件是必要的;原命题与逆命题都正确,则条件是充要的;原命题与逆命题都不正确,则条件既不充分也不必要.所以有时也可以转化为判断它的逆否命题.

(3)还可以从集合的包含关系来判断条件与结论之间的逻辑关系:设 p 包含的对象组成集合 A,q 包含的对象组成集合 B,若 $A\subseteq B$,则 p 是 q 的充分条件;若 $A\supseteq B$,则 p 是 q 的必要条件;若 $A=B$,则 p 是 q 的充要条件;若 $A\not\subseteq B$ 且 $A\not\supseteq B$,则 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

典例解析·规律探究

本节内容在高考时,主要考查四种命题的写法、四种命题之间的关系,及充要条件的判断等,需紧扣定义.

1. 四种命题的关系

例1 有下列四个命题:

①"若 $x+y=0$,则 x、y 互为相反数"的否命题;

②"若 $a>b$,则 $a^2>b^2$"的逆否命题;

③"若 $x\leqslant-3$,则 $x^2-x-6>0$"的否命题;

④"对顶角相等"的逆命题.

其中真命题的个数是(   )

A. 0　　　　B. 1

C. 2　　　　D. 3

答案:B

解析:①"若 $x+y\neq0$,则 x、y 不是相反数"是真命题;

②"若 $a^2\leqslant b^2$,则 $a\leqslant b$",取 $a=0$,$b=-1$,则 $a^2\leqslant b^2$,但 $a>b$,故是假命题;

③"若 $x>-3$,则 $x^2-x-6\leqslant0$",解不等式 $x^2-x-6\leqslant0$ 可得 $-2\leqslant x\leqslant3$,而 $x=4>-3$,不是不等式的解,故

是假命题；

④"相等的角是对顶角"是假命题.

解题心得:本题的解法中运用了举反例的方法,如②③的解法.举出一个反例说明一个命题不正确是以后经常用到的方法.

例2 判断下列命题的真假,并写出它们的逆命题、否命题、逆否命题,进而判断其真假.

(1)若 $a>b$,则 $ac^2>bc^2$；

(2)若四边形的对角互补,则该四边形是圆的内接四边形；

(3)若在二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 中 $b^2-4ac<0$,则该函数的图象与 x 轴有交点.

分析:解决本题的关键在于找准命题的条件与结论.

解:(1)该命题为假,如 $c=0$ 时,$ac^2=bc^2$.

逆命题:若 $ac^2>bc^2$,则 $a>b$,为真；

否命题:若 $a\leqslant b$,则 $ac^2\leqslant bc^2$,为真；

逆否命题:若 $ac^2\leqslant bc^2$,则 $a\leqslant b$,为假.

(2)该命题为真.

逆命题:若四边形是圆的内接四边形,则四边形的对角互补,为真；

否命题:若四边形的对角不互补,则该四边形不是圆的内接四边形,为真；

逆否命题:若四边形不是圆的内接四边形,则该四边形的对角不互补,为真.

(3)该命题为假.

逆命题:若二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴有交点,则 $b^2-4ac<0$,为假；

否命题:若二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 中 $b^2-4ac\geqslant0$,则函数的图象与 x 轴无交点,为假；

逆否命题:若二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴无交点,则 $b^2-4ac\geqslant0$,为假.

解题心得:写出一个命题的逆命题、否命题、逆否命题的关键是分清原命题的条件和结论,然后按定义来写.在判断原命题及逆命题的真假时,要借助:原命题与其逆否命题同真假,逆命题和否命题同真假.

2. 四种命题的证明

例3 已知函数 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的增函数,且 $a,b\in\mathbf{R}$,对命题"若 $a+b\geqslant0$,则 $f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$".

(1)写出其逆命题,判断其真假,并证明你的结论；

(2)写出其逆否命题,并证明你的结论.

分析:根据四种命题之间的关系写逆命题、逆否命题,利用特例、反证法证互为逆否的命题,从而证明结论.

解:(1)逆命题是:若 $f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$,则 $a+b\geqslant0$.它是成立的,可用反证法证明它.

假设 $a+b<0$,则 $a<-b$,$b<-a$.

因为 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的增函数,

则 $f(a)<f(-b)$,$f(b)<f(-a)$,

所以 $f(a)+f(b)<f(-a)+f(-b)$,与条件矛盾,

所以逆命题为真.

(2)逆否命题是:若 $f(a)+f(b)<f(-a)+f(-b)$,则 $a+b<0$.它为真,可证明原命题为真来证明它.

因为 $a+b\geqslant0$,所以 $a\geqslant-b$,$b\geqslant-a$.

因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是增函数,

所以 $f(a)\geqslant f(-b)$,$f(b)\geqslant f(-a)$,

所以 $f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$.

所以逆否命题为真.

解题心得:(1)命题的否定形式与命题的否命题不同,前者只否定原命题的结论,而后者是同时否定条件和结论.

(2)当证明一个否定性命题的真假发生困难时,通常转化为判断它的逆否命题的真假.

(3)利用反证法证题要注意其步骤.

3. 充要条件的判断

例4 在下列四个结论中,正确的是( )

①$x^2>4$ 是 $x^3<-8$ 的必要不充分条件；

②在△ABC 中,"$AB^2+AC^2=BC^2$"是"△ABC 为直角三角形"的充要条件；

③若 $a,b\in\mathbf{R}$,则"$a^2+b^2\neq0$"是"a,b 全不为0"的充要条件；

④若 $a,b\in\mathbf{R}$,则"$a^2+b^2\neq0$"是"a,b 不全为0"的充要条件.

A. ①②　　B. ③④

C. ①④　　D. ②③

答案:C

解析:对于①,由 $x^3<-8\Rightarrow x<-2\Rightarrow x^2>4$,但是 $x^2>4\Rightarrow x<-2$ 或 $x>2$,不一定有 $x^3<-8$,故①正确；对于④,由 $a^2+b^2\neq0\Rightarrow a,b$ 不全为0,反之,由 a,b 不全为 $0\Rightarrow a^2+b^2\neq0$,故④正确.

于是我们根据选择题的特点就知应选择C.

解题心得:(1)我们应根据选择题的特点,对以上的四个结论有选择地进行判断.例如若判定①正确,则不必对③进行判定了,因为由①正确可知应淘汰B、D,进而只要对A、C作进一步的选择.而选择A、还是选择C,只需对②或④中的一个作出判定即可,我们还可从②④中选择容易判定的进行判断.

(2)结论②为什么不对呢?其原因是在"△ABC 为直角三角形"中没有明确哪个顶点为直角顶点,因此就不一定有"$AB^2+AC^2=BC^2$"成立.故"$AB^2+AC^2=BC^2$"是"△ABC 为直角三角形"的充分不必要条件.

例5 给出下列四组命题:

(1)p:$x-2=0$;q:$(x-2)(x-3)=0$；

(2)p:两个三角形相似;q:两个三角形全等；

(3)p:$m<-2$;q:方程 $x^2-x-m=0$ 无实根；

(4)p:一个四边形是矩形;q:四边形的对角线相等.

试分别指出 p 是 q 的什么条件.

分析:首先分清条件和结论,然后搞清楚是前者推后者,还是后者推前者.

解:(1)∵ $x-2=0\Rightarrow(x-2)(x-3)=0$,

而 $(x-2)(x-3)=0\nRightarrow x-2=0$,

$\therefore$ p 是 q 的充分不必要条件.

(2)$\because$ 两个三角形相似$\nRightarrow$两个三角形全等,

而两个三角形全等$\Rightarrow$两个三角形相似.

$\therefore$ p 是 q 的必要不充分条件.

(3)$\because$ $m<-2\Rightarrow$方程 $x^2-x-m=0$ 无实根,

而方程 $x^2-x-m=0$ 无实根$\nRightarrow m<-2$.

$\therefore$ p 是 q 的充分不必要条件.

(4)$\because$ 矩形的对角线相等,

而对角线相等的四边形不一定是矩形,

$\therefore$ p 是 q 的充分不必要条件.

解题心得:判定 p 是 q 的什么条件,关键是看 p 能否推出 q,q 能否推出 p.

4. 有关充要条件的证明

例 6 设 x、$y\in \mathbf{R}$,求证:$|x+y|=|x|+|y|$成立的充要条件是 $xy\geqslant 0$.

分析:充分性是证:$xy\geqslant 0\Rightarrow |x+y|=|x|+|y|$;

必要性是证:$|x+y|=|x|+|y|\Rightarrow xy\geqslant 0$.

证明:充分性:如果 $xy=0$,

那么①$x=0$,$y\neq 0$;或②$y=0$,$x\neq 0$;或③$x=0$,$y=0$,

于是$|x+y|=|x|+|y|$.

如果 $xy>0$,即 $x>0$,$y>0$ 或 $x<0$,$y<0$,

当 $x>0$,$y>0$ 时,$|x+y|=x+y=|x|+|y|$;

当 $x<0$,$y<0$ 时,

$|x+y|=-(x+y)=-x+(-y)=|x|+|y|$;

总之,当 $xy\geqslant 0$ 时,有$|x+y|=|x|+|y|$.

必要性:由$|x+y|=|x|+|y|$及 x、$y\in \mathbf{R}$,

得$(x+y)^2=(|x|+|y|)^2$,

即 $x^2+2xy+y^2=x^2+2|xy|+y^2$,

$|xy|=xy$,$\therefore$ $xy\geqslant 0$.

解题心得:处理充分性、必要性问题时,首先要分清条件与结论,然后才能进行推理和判断.

新课标·信息搜索

1. 近几年山东、广东(全国)高考试题研究

例 1 **(2005·广东)**给出下列关于互不相同的直线 m、l、n 和平面 α、β 的四个命题:

①$m\subset\alpha$,$l\cap\alpha=A$,点 $A\notin m$,则 l 与 m 不共面;

②m、l 是异面直线,$l/\!/\alpha$,$m/\!/\alpha$,且 $n\perp l$,$n\perp m$,则 $n\perp\alpha$;

③若 $l/\!/\alpha$,$m/\!/\beta$,$\alpha/\!/\beta$,则 $l/\!/m$;

④若 $l\subset\alpha$,$m\subset\alpha$,$l\cap m=A$,$l/\!/\beta$,$m/\!/\beta$,则 $\alpha/\!/\beta$.

其中为假命题的是(　　)

A. ①　　B. ②　　C. ③　　D. ④

答案:C

解析:逐一验证:

①由异面直线的判定定理得 l 与 m 为异面直线,故①正确;

②由线面垂直的判定定理知②正确;

③l 可能与 m 相交或异面,故③错误;

④由线面垂直的判定定理得 $\alpha/\!/\beta$,故④正确.

解题心得:此题要求对立体几何的基础知识:线线、线面、面面关系要非常清楚.

例 2 (2005·湖南)设集合 $A=\left\{x\left|\dfrac{x-1}{x+1}<0\right.\right\}$,$B=\{x\,|\,|x-1|<a\}$,则“$a=1$”是“$A\cap B\neq\varnothing$”的(　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分又不必要条件

答案:A

解析:$A=\{x\,|\,-1<x<1\}$,当 $a=1$ 时,$B=\{x\,|\,|x-1|<1\}=\{x\,|\,0<x<2\}$,则满足 $A\cap B\neq\varnothing$;但当 $a=2$ 时,$B=\{x\,|\,-1<x<3\}$也满足 $A\cap B\neq\varnothing$,即 $A\cap B\neq\varnothing$时,a 不一定为 1.

解题心得:本题主要考查充要条件的有关知识及集合的运算.

例 3 (2005·北京)“$m=\dfrac{1}{2}$”是“直线$(m+2)x+3my+1=0$ 与直线$(m-2)x+(m+2)y-3=0$ 相互垂直”的(　　)

A. 充分必要条件

B. 充分而不必要条件

C. 必要而不充分条件

D. 既不充分也不必要条件

答案:B

解析:直线$(m+2)x+3my+1=0$ 与直线$(m-2)x+(m+2)y-3=0$ 相互垂直的充要条件是:

$(m+2)(m-2)+3m(m+2)=0$,

解得 $m=\dfrac{1}{2}$ 或 $m=-2$.

解题心得:两直线 $A_1x+B_1y+C_1=0$ 与 $A_2x+B_2y+C_2=0$垂直的充要条件是 $A_1A_2+B_1B_2=0$.

例 4 (2005·福建)把下面不完整的命题补充完整,并使之成为真命题.

若函数 $f(x)=3+\log_2 x$ 的图象与 $g(x)$的图象关于________对称,则函数 $g(x)=$________.

(注:填上你认为可以成为真命题的一种情形即可,不必考虑所有可能的情形)

答案:x 轴,$-3-\log_2 x$(或 y 轴,$3+\log_2(-x)$;或原点,$-3-\log_2(-x)$;或直线 $y=x$,2^{x-3}等)

解析:$\because$ $P(x_0,y_0)$关于 x 轴对称的点为 $P'(x_0,-y_0)$,

$\therefore$ $f(x)=3+\log_2 x$ 关于 x 轴对称的函数 $g(x)=-3-\log_2 x$.

解题心得:本题为开放性题目,要熟悉各种对称关系.

例 5 (2005·山东)已知 m、n 是不同的直线,α、β 是不重合的平面,给出下列命题:

①若 $\alpha/\!/\beta$,$m\subset\alpha$,$n\subset\beta$,则 $m/\!/n$;

②若 m,$n\subset\alpha$,$m/\!/\beta$,$n/\!/\beta$,则 $\alpha/\!/\beta$;

③若 $m\perp\alpha$,$n\perp\beta$,$m/\!/n$,则 $\alpha/\!/\beta$;

④m,n 是两条异面直线,若 $m/\!/\alpha$,$m/\!/\beta$,$n/\!/\alpha$,$n/\!/\beta$,则

$\alpha /\!/ \beta$.

上面命题中,真命题的序号是______(写出所有真命题的序号).

答案:③④

解析:因两平行平面内任两条直线不一定平行,故①不对;而 $m、n\subset\alpha, m/\!/\beta, n/\!/\beta$ 时,α 与 β 可以相交,故②不对;∵ $m/\!/n, m\perp\alpha$.∴ $n\perp\alpha$.又∵ $n\perp\beta$.∴ $\alpha/\!/\beta$.③正确;过 $m、n$ 分别作平面 $M、N$ 分别交 $\alpha、\beta$ 于 $m_1、m_2、n_1、n_2$,由线面平行的性质定理知 $m_1/\!/m_2、n_1/\!/n_2$,且 m_1 与 n_1 相交,∴ $\alpha/\!/\beta$,故④对.

解题心得:此类问题要求对每一个命题都要判断真假,要求熟悉各种线线、线面、面面的平行关系及判断方法和性质定理,特别是一些特例.

2. 一题多解,讲授方法

例6 $a=3$ 是直线 $ax+2y+3a=0$ 和直线 $3x+(a-1)y=a-7$ 平行且不重合的( )

A. 充分非必要条件

B. 必要非充分条件

C. 充要条件

D. 既非充分也非必要条件

答案:C

解析1:当 $a=3$ 时:

直线 $l_1:3x+2y+9=0$,直线 $l_2:3x+2y+4=0$.

∵ l_1 与 l_2 的 $A_1:A_2=B_1:B_2=1:1$,

而 $C_1:C_2=9:4\neq1:1$,

∴ $l_1/\!/l_2$.

同理 $l_1/\!/l_2\Rightarrow a=3$.

∴ $a=3\Leftrightarrow l_1/\!/l_2$.

解析2:当 $a=3$ 时:

$l_1:3x+2y+9=0$,即 $y=-\frac{3}{2}x-\frac{9}{2}$;

$l_2:3x+2y=-4$,即 $y=-\frac{3}{2}x-2$.

∵ $k_1=k_2$ 且 $b_1\neq b_2$,∴ $l_1/\!/l_2$.

同理 $l_1/\!/l_2\Rightarrow a=3$.

∴ $a=3\Leftrightarrow l_1/\!/l_2$.

解题心得:本例从一般式和斜截式两条思路研究了直线平行的问题,应学会用多种方法研究同一问题.

3. 多题一解,培养能力

例7 (1)设 $\alpha、\beta$ 为两个不同的平面,$l、m$ 为两条不同的直线,且 $l\subset\alpha, m\subset\beta$,有如下两个命题:①若 $\alpha/\!/\beta$,则 $l/\!/m$;②若 $l\perp m$,则 $\alpha\perp\beta$.那么( )

A. ①是真命题,②是假命题

B. ①是假命题,②是真命题

C. ①②都是真命题

D. ①②都是假命题

答案:D

解析:①若 $\alpha/\!/\beta$,直线 l 和 m 可以平行,也可以异面;

②若 $l\perp m$,可以异面垂直,此时平面 α 可以与平面 β 平行.

(2)在空间中:

①若四点不共面,则这四点中任何三点都不共线;

②若两条直线没有公共点,则这两条直线是异面直线.

以上两个命题中,逆命题为真命题的是______(把符合要求的命题序号都填上).

答案:②

解析:①的逆命题是:若四点中任何三点都不共线,则这四点不共面.

我们用正方体 AC_1 做模型来观察:上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 中任何三点都不共线,但 $A_1B_1C_1D_1$ 四点共面.所以①的逆命题为假.

②的逆命题是:若两条直线是异面直线,则这两条直线没有公共点.

由异面直线的定义可知,成异面直线的这两条直线不会有公共点.所以②的逆命题为真.

解题心得:以上两题都考查了线面基本关系,都是判断命题的真假.

测点专练·知能提升

一、选择题

1. 已知 $\boldsymbol{a}、\boldsymbol{b}、\boldsymbol{c}$ 为在同一平面内的非零向量.

令甲:$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$,乙:$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$,则( )

A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件

B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件

C. 甲是乙的充要条件

D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

答案:B

解析:$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0$,

不能推出 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$.

而 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\Rightarrow\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0\Rightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$.

故甲是乙的必要不充分条件.

2. 已知 $\alpha、\beta$ 均为锐角,若 $p:\sin\alpha<\sin(\alpha+\beta)$,$q:\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$,则 p 是 q 的( )

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

答案:B

解析:由于 $\alpha、\beta$ 为锐角,易得 $q\Rightarrow p$.所以排除D选项,取特殊角 $\alpha=60°,\beta=30°$,满足条件 p,但不满足条件 q.故 $p\nRightarrow q$.所以选B.

3. 如图1-1-1所示的电路图由电池、开关和灯泡L组成,假定所有零件均能正常工作,则电路中"开关 K_1 闭合"是"灯泡L亮"的( )

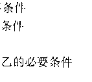

图1-1-1

A. 充分非必要条件

B. 必要非充分条件

C. 充要条件

D. 既非充分又非必要条件

答案：A

解析：由物理学中串、并联电路的基础知识易得结果.

4. 函数 $y=x^2+bx+c(x\in[0,+\infty))$ 是单调函数的充要条件是(　　)

A. $b\geqslant 0$　　B. $b\leqslant 0$　　C. $b>0$　　D. $b<0$

答案：A

解析：若 $b\geqslant 0$，设 $x_1<x_2$，x_1、$x_2\in[0,+\infty)$，

$f(x_2)-f(x_1)=x_2^2+bx_2+c-(x_1^2+bx_1+c)$

$=x_2^2-x_1^2+b(x_2-x_1)$

$=(x_2-x_1)(x_2+x_1+b)>0$，

∴ $f(x_2)>f(x_1)$，

∴ $y=f(x)$ 是单调函数.

∴ $b\geqslant 0$ 是 $y=f(x)$ 为单调函数的充分条件.

若 $f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)(x_2+x_1+b)>0$，

∵ $x_2-x_1>0$，$x_2+x_1>0$，

∴ 此时必有 $b\geqslant 0$，

∴ $b\geqslant 0$ 是 $y=f(x)$ 为单调函数的必要条件.

5. 设集合 A、B 是全集 U 的两个子集，则 $A\subsetneqq B$ 是 $(\complement_U A)\cup B=U$ 的(　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

答案：A

解析：由 $A\subsetneqq B$ 利用 Venn 图得 $(\complement_U A)\cup B=U$，故 $A\subsetneqq B$ 是 $(\complement_U A)\cup B=U$ 的充分条件；而 $A=B$ 时 $(\complement_U A)\cup B=U$，故 $A\subsetneqq B$ 不是 $(\complement_U A)\cup B=U$ 的必要条件.

6. 设命题甲："直四棱柱 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，平面 ACB_1 与对角面 BB_1D_1D 垂直"；命题乙："直四棱柱 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 是正方体". 那么，甲是乙的(　　)

A. 充分必要条件

B. 充分非必要条件

C. 必要非充分条件

D. 既非充分又非必要条件

答案：C

解析：若命题甲成立，命题乙不一定成立，如底面为菱形时；若命题乙成立，命题甲一定成立.

7. "$\cos 2\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$"是"$\alpha=k\pi+\frac{5\pi}{12}$，$k\in\mathbf{Z}$"的(　　)

A. 必要非充分条件

B. 充分非必要条件

C. 充分必要条件

D. 既非充分又非必要条件

答案：A

解析：$\cos 2\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，∴ $2\alpha=2k\pi\pm\frac{5\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，

∴ $\alpha=k\pi\pm\frac{5\pi}{12}$，$k\in\mathbf{Z}$.

8. 已知 a、b 为两条不同的直线，α、β 为两个不同的平面，且 $a\perp\alpha$，$b\perp\beta$，则下列命题中的假命题是(　　)

A. 若 $a\parallel b$，则 $\alpha\parallel\beta$

B. 若 $\alpha\perp\beta$，则 $a\perp b$

C. 若 a、b 相交，则 α、β 相交

D. 若 α、β 相交，则 a、b 相交

答案：D

解析：如图 1-1-2 所示，∵ α、β 为两个不同的平面，

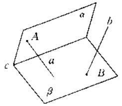

图 1-1-2

∴ 若 $\alpha\cap\beta=c$，但平面 α、β 不会重合.

∵ $a\perp\alpha$，$b\perp\beta$，

∴ a 与 b 不一定相交.

故"若 α、β 相交，则 a、b 相交"是假命题.

9. 已知 α、β 是不同的两个平面，直线 $a\subset\alpha$，直线 $b\subset\beta$. 命题 p：a 与 b 无公共点；命题 q：$\alpha\parallel\beta$. 则 p 是 q 的(　　)

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

答案：B

解析：如图 1-1-3 所示，p 不是 q 的充分条件，又 $\alpha\parallel\beta$，则 a 与 b 无公共点，p 是 q 的必要条件.

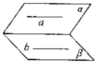

图 1-1-3

二、填空题

10. 对任意实数 a、b、c，给出下列命题：

①"$a=b$"是"$ac=bc$"的充要条件；

②"$a+5$ 是无理数"是"a 是 [illegible] 的充要条件；

③"$a>b$"是"$a^2>b^2$"的充分条件；

④"$a<5$"是"$a<3$"的必要条件.

其中，真命题的序号是________.

答案：②④

解析：当 $c=0$，a、b 不为 0 [illegible] $ac=bc\nRightarrow a=b$，所以①是假命题；当 $a=2$，$b=-$ [illegible] $a>b\nRightarrow a^2>b^2$，所以③是假命题；②④显然正确. [illegible]②④.

11. 设 A、B 为两个集合. 下列四个命题：

①$A\not\subseteq B\Leftrightarrow$ 对任意 $x\in A$，$x\notin B$；

②$A\not\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=\varnothing$；

③$A\not\subseteq B\Leftrightarrow A\supseteq B$；

④$A\not\subseteq B \Leftrightarrow$ 存在 $x\in A$，使得 $x\notin B$.

其中真命题的序号是______.（把符合要求的命题序号都填上）

答案：④

解析：不妨设 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{2,3,4\}$，$A\not\subseteq B$，但是 $2\in A$，$2\in B$，①错；$A\cap B=\{2,3\}$，②错；若 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{2,3\}$，$A\not\subseteq B$ 但 $A\supseteq B$，③错；易知④正确.

12. 设命题 p：$|4x-3|\leqslant 1$；命题 q：$x^2-(2a+1)x+a(a+1)\leqslant 0$. 若$\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要而不充分条件，则实数 a 的取值范围是______.

答案：$\left[0,\frac{1}{2}\right]$

解析：解 $|4x-3|\leqslant 1$ 得 $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$，解 $x^2-(2a+1)x+a(a+1)\leqslant 0$ 得 $a\leqslant x\leqslant a+1$，由题设条件得 q 是 p 的必要不充分条件，即 $p\Rightarrow q$，$q\not\Rightarrow p$.

$\therefore \left[\frac{1}{2},1\right]\subsetneqq[a,a+1]$，$\therefore a\leqslant\frac{1}{2}$ 且 $a+1\geqslant 1$，得 $0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$.

第2讲　逻辑联结词与量词

课标要求·考纲下载

1. 简单的逻辑联结词：

了解逻辑联结词"且"、"或"、"非"的含义.

2. 全称量词与存在量词：

(1)理解全称量词与存在量词的意义；

(2)能正确地对含有一个量词的命题进行否定.

基础梳理·考点解读

1. 命题的概念

(1)命题的概念是数学中的基础概念，学习时应结合具体实例理解它的含义. 可以判断真假是命题的特征.

(2)一个命题要么是真的，要么是假的，但不能同时既真又假，也不能模棱两可，无法判断其真假.

(3)把简单命题写成复合命题，或把复合命题写成简单命题并判断其真假是本节的基本要求，关键在于理解逻辑联结词的意义，逻辑联结词中的"且"、"或"、"非"与日常用语中的"且"、"或"、"非"的意义是不尽相同的，熟悉有关复合命题的真值表可以加快这类题的解题速度和提高准确性.

(4)判断一个语句是否为命题只能根据定义看这一语句是否能判断真假. 能判断真假的语句是命题，有些语句目前不能判断真假，随着时间的推移与科学技术的发展，总能确定它们的真假，这样的猜想也是命题.

2. 全称命题与存在性命题

(1)全称命题、存在性命题就是含有全称量词、存在量词的命题，学会自然语言与符号语言的转化.

(2)要判定一个全称命题是真命题，必须对限定集合 M 中的每个元素 x 验证 $p(x)$ 成立；但要判定全称命题是假命题，却只要能举出集合 M 中的一个 $x=x_0$，使得 $p(x_0)$ 不成立即可.

要判定一个存在性命题是真命题，只要在限定集合 M 中至少能找到一个 $x=x_0$，使 $p(x_0)$ 成立即可；否则，这一存在性命题就是假命题.

(3)同一个全称命题、存在性命题，由于自然语言的不同，可以有不同的表述方法. 现列表总结于下，在实际应用中可以灵活地选择.

命题	全称命题"$\forall x\in A, p(x)$"	存在性命题"$\exists x_0\in A, p(x_0)$"
表述方法	①所有的 $x\in A$，$p(x)$ 成立	①存在 $x_0\in A$，使 $p(x_0)$ 成立
	②对一切 $x\in A$，$p(x)$ 成立	②至少有一个 $x_0\in A$，使 $p(x_0)$ 成立
	③对每一个 $x\in A$，使 $p(x)$ 成立	③对有些 $x_0\in A$，使 $p(x_0)$ 成立
	④任选一个 $x\in A$，使 $p(x)$ 成立	④对某个 $x_0\in A$，使 $p(x_0)$ 成立
	⑤凡 $x\in A$，都有 $p(x)$ 成立	⑤有一个 $x_0\in A$，使 $p(x_0)$ 成立

(4)常用的全称量词有"所有"、"任意一个"、"一切"、"每一个"、"任给"等.

(5)常用的存在量词有"存在一个"、"至少有一个"、"有些"、"有一个"、"对某个"、"有的"等.

3. 基本逻辑联结词

基本逻辑联结词有"且"、"或"、"非"三种，复合命题就是由三种逻辑联结词与简单命题构成的.

(1)真值表是根据简单命题的真假，判断由这些简单命题构成的复合命题的真假，要掌握以下规律：

①"$p\wedge q$"形式的复合命题只有当命题"p"与"q"同时为真时才为真，否则为假；

②"$p\vee q$"形式的复合命题只有当命题"p"与命题"q"同时为假时才为假，否则为真；

③"$\neg p$"形式的复合命题的真假与命题"p"的真假相反.

(2)

复合命题真值表

p	q	$p\wedge q$	$p\vee q$	$\neg p$
真	真	真	真	假
真	假	假	真	假
假	真	假	真	真
假	假	假	假	真

(3)写出一个命题的否定形式，往往需要对正面词语进行否定，要熟悉常用的正面叙述词语及它的否定形式.

(4)含有一个量词的全称命题与存在性命题的否定要熟悉.

全称命题 q：$\forall x\in A$，$q(x)$，

它的否定是$\neg q$：$\exists x_0\in A$，$\neg q(x_0)$.

存在性命题 p：$\exists x_0\in A,p(x_0)$.

它的否定是$\neg p$：$\forall x\in A,\neg p(x)$.

(5)判断一个命题是简单命题还是复合命题时，不能只从字面上看有没有"且"、"或"、"非"，如"等腰三角形的顶角平分线、底边上的中线、底边上的高互相重合"，此命题字面上无"且"，但可改成"等腰三角形的顶角平分线既是底边上的中线又是底边上的高线"，所以它是复合命题．又例如"5的倍数的末位数字不是0就是5"，此命题字面上无"或"，但它也是复合命题.

(6)判断复合命题真假的基本程序如下：

①确定复合命题的构成形式(先找出逻辑联结词，后确定被联结的简单命题)；

②判断各个简单命题的真假；

③结合真值表推断复合命题的真假.

典例解析·规律探究

1. 复合命题的真假

本题型主要考查复合命题的判断，对"且"、"或"、"非"逻辑联结词的理解，重点是真值表的理解与应用.

例1 指出下列命题的真假：

(1)命题："不等式$|x+2|\leqslant 0$没有实数解"；

(2)命题："-1是偶数或奇数"；

(3)命题："$\sqrt{2}$属于集合$\mathbf{Q}$，也属于集合$\mathbf{R}$"；

(4)命题："$A\not\subseteq(A\cup B)$".

分析：本题是命题构成形式的进一步应用，逻辑联结词是基础.

解：(1)此命题为"非p"的形式，其中p：不等式$|x+2|\leqslant 0$有实数解，因为$x=-2$是该不等式的一个解，所以p是真命题，即非p为假命题，所以原命题为假命题；

(2)此命题为"p或q"的形式，其中p：-1是偶数，q：-1是奇数，因为p为假命题，q为真命题，所以"p或q"为真命题，故原命题为真命题；

(3)此命题为"p且q"的形式，其中p：$\sqrt{2}$属于$\mathbf{Q}$，q：$\sqrt{2}$属于$\mathbf{R}$，因为p为假命题，q为真命题，所以p且q为假命题，故原命题为假命题；

(4)此命题为"非p"的形式，其中p：$A\subseteq(A\cup B)$，因为p为真命题，所以"非p"为假命题，故原命题为假命题.

解题心得：(1)本例在判断命题的真假时，要准确理解复合命题的构成，如命题(3)是"p且q"形式，防止判断有误.

(2)为了正确判断复合命题的真假，首先要确定复合命题的构成形式，然后指出其中简单命题的真假，再根据真值表判断这个复合命题的真假.

例2 分别指出下列复合命题的形式及构成的简单命题.

(1)小李是老师，小赵也是老师；

(2)1是合数或质数；

(3)他是运动员兼教练员；

(4)这些文学作品不仅艺术上有缺点，而且政治上也有错误.

分析：本题考查命题的构成形式，是本节课的重点，也是以后学习的基础.

解：(1)这个命题是p且q的形式，其中p：小李是老师，q：小赵是老师.

(2)这个命题是p或q的形式，其中p：1是合数，q：1是质数.

(3)这个命题是p且q的形式，其中，p：他是运动员，q：他是教练员.

(4)这个命题是p且q的形式，其中，p：这些文学作品艺术上有缺点，q：这些文学作品政治上有错误.

解题心得：正确理解逻辑联结词"且"、"或"、"非"的含义是解题的关键，应根据组成上述各复合命题的语句中所出现的逻辑联结词或语句的意义确定复合命题的形式.

2. 命题与量词

本题型主要考查对全称量词、存在量词的理解及对全称命题、存在性命题的判断.

例3 判断下列命题的真假：

(1)每个指数函数都是单调函数；

(2)任何实数都有算术平方根；

(3)$\forall x\in\{x|x$是无理数$\}$，x^2是无理数.

(4)$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^3\leqslant 0$；

(5)至少有一个整数，它既不是合数，也不是奇数；

(6)$\exists x\in\{x|x$是无理数$\}$，x^2是无理数.

分析：逻辑中通常把短语"所有"、"任意一个"、"每一个"、"一切"、"任给"等叫做全称量词，用符号"$\forall$"表示，含有全称量词的命题叫全称命题.

逻辑中通常把短语"有一个"、"有些"、"至少有一个"等叫做存在量词，用符号"$\exists$"表示，含有存在量词的命题叫做存在性命题.

解：(1)指数函数的形式为$y=a^x$(其中$a>0$且$a\neq 1$)，定义域$\{x|x\in\mathbf{R}\}$，对每一个符合题意的a，函数$y=a^x$都是单调的，当$a>1$时，函数$y=a^x$在$\mathbf{R}$上为增函数；当$0<a<1$时，函数$y=a^x$在$\mathbf{R}$上为减函数. 所以，全称命题"每个指数函数都是单调函数"是真命题.

(2)-1是实数，但$x^2=-1$无解，也就是$\sqrt{-1}$无意义. 所以，全称命题"任何实数都有算术平方根"是假命题.

(3)$\sqrt{3}$是无理数，但$(\sqrt{3})^2=3$是有理数. 所以全称命题"$\forall x\in\{x|x$是无理数$\}$，x^2是无理数"是假命题.

(4)由于$-1\in\mathbf{R}$，当$x=-1$时，$x^3\leqslant 0$. 所以，存在性命题"$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^3\leqslant 0$"是真命题.

(5)2是整数，它是素数且不是奇数. 所以存在性命题"至少有一个整数，它既不是合数，也不是奇数"是真命题.

(6)由于$\sqrt[4]{2}$是无理数，当$x=\sqrt[4]{2}$时，$x^2=\sqrt{2}$是无理数. 所以命题"$\exists x\in\{x|x$是无理数$\}$，x^2是无理数"是真命题.

解题心得：(1)要判定全称命题是真命题，必须对限定集合M中的每个元素x验证$p(x)$成立；但要判定全称命题是假命题，却只要能举出集合M中一个$x=x_0$，使得

$p(x_0)$不成立即可(举一反例).

(2)要判定一个存在性命题是真命题,只要在限定集合M中至少能找到一个$x=x_0$,使$p(x_0)$成立即可;如果在集合M中,使$p(x)$成立的元素不存在,那么这个存在性命题是假命题.

例4 判断命题的真假.

(1)每个函数都有反函数;

(2)存在一个$x\in\mathbf{Z}$,使$2x+4=6$.

分析:首先要分清命题是全称命题还是存在性命题,进而判断其真假.

解:(1)$y=x^2$是函数,但它是偶函数,所以它没有反函数,所以"每个函数都有反函数"是假命题.

(2)由于存在$x=1$,使$2x+4=6$成立,所以"存在$x\in\mathbf{Z}$,使$2x+4=6$"是真命题.

解题心得:抓住命题的本质去分析,往往会事半功倍.

3. 含有一个量词的命题的否定

本题型是新课程中新增内容,主要考查全称量词与存在量词的否定形式.

例5 写出下列命题的"否定",并判断其真假.

(1)p:$\forall x\in\mathbf{R}$,$x^2-x+\frac{1}{4}\geq0$;

(2)q:所有的正方形都是矩形;

(3)r:$\exists x\in\mathbf{R}$,$x^2+2x+2\leq0$;

(4)s:至少有一个实数x,使$x^3+1=0$.

分析:这四个命题中,p,q是全称命题,r,s是存在性命题,要判断"非"命题的真假,可以直接判断,也可以判断p命题的真假.因为p与$\neg p$"真假相对".

解:(1)$\neg p$:$\exists x\in\mathbf{R}$,$x^2-x+\frac{1}{4}<0$(假),这是由于$\forall x\in\mathbf{R}$,$x^2-x+\frac{1}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\geq0$恒成立.

(2)$\neg q$:至少存在一个正方形不是矩形.(假)

(3)$\neg r$:$\forall x\in\mathbf{R}$,$x^2+2x+2>0$(真),这是由于$\forall x\in\mathbf{R}$,$x^2+2x+2=(x+1)^2+1\geq1>0$恒成立.

(4)$\neg s$:$\forall x\in\mathbf{R}$,$x^3+1\neq0$(假),这是由于$x=-1$时$x^3+1=0$.

解题心得:要先判断命题是存在性命题还是全称命题,注意防止判断错误而导致否定出错,要特别注意命题的否定不等同于否命题.

一般地含有一个量词的命题的否定,首先要确定这个命题是全称命题还是存在性命题,也就是要找出语句中的全称量词、存在量词,写命题的否定,往往需要对这些量词进行否定.

例6 写出下列命题的"否定".

(1)每个函数都有反函数;

(2)存在$x\in\mathbf{Z}$,使$2x+4=6$.

分析:对命题的否定,实质上就是对量词的否定.

解:(1)存在一个函数没有反函数.

(2)任意$x\in\mathbf{Z}$,使$2x+4\neq6$.

解题心得:全称命题的否定是存在性命题,存在性命题否定是全称命题.

新课标·信息搜索

1. 近几年山东、广东(全国)高考试题研究

例1 (2004·重庆)已知p是r的充分不必要条件,s是r的必要条件,q是s的必要条件,那么p是q成立的(　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

答案:A

解析:根据充分条件、必要条件的定义进行判断.

由已知$p\Rightarrow r$,$r\nRightarrow p$,$r\Rightarrow s$,$s\nRightarrow r$,$s\Rightarrow q$,$q\nRightarrow s$.可知$p\Rightarrow q$,$q\nRightarrow p$.$\therefore$ p是q的充分不必要条件.

解题心得:箭头图法在研究此类问题时会起到事半功倍的效果.

例2 (2005·福建)已知p:$|2x-3|<1$,q:$x(x-3)<0$,则p是q的(　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

答案:A

解析:p:$|2x-3|<1$,$\therefore$ $1<x<2$.

q:$x(x-3)<0$,$\therefore$ $0<x<3$.$\therefore$ $p\Rightarrow q$.

解题心得:利用全称量词判断该问题.

例3 (2004·福建)命题p:若$a,b\in\mathbf{R}$,则$|a|+|b|>1$是$|a+b|>1$的充分而不必要条件;命题q:函数$y=\sqrt{|x-1|-2}$的定义域是$(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$,则(　　)

A. "p或q"为假　　B. "p且q"为真

C. p真q假　　D. p假q真

答案:D

解析:由绝对值不等式知$|a|+|b|\geq|a+b|$,$|a+b|>1\Rightarrow|a|+|b|>1$,反之不一定成立,即$|a|+|b|>1$是$|a+b|>1$的必要而不充分条件,故命题$p$为假命题.

又由$|x-1|-2\geq0$,得$x\leq-1$或$x\geq3$,即函数$y=\sqrt{|x-1|-2}$的定义域是$(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$,所以命题$q$为真命题.

解题心得:考查命题的真假,要注意举反例或证明.

例4 (2005·江苏)命题"若$a>b$,则$2^a>2^b-1$"的否命题为___________.

答案:若$a\leq b$,则$2^a\leq2^b-1$

解析:"$a>b$"的否命题是"$a\leq b$","$2^a>2^b-1$"的否命题是"$2^a\leq2^b-1$".

$\therefore$ 原命题的否命题是"若$a\leq b$,则$2^a\leq2^b-1$".

解题心得:注意否定词的应用和否命题的形式.

2. 难题巧解,讲授方法

例5 (2004·南开中学检测)今有命题 p、q,若命题 m 为“$p\wedge q$”,则“$\neg p$ 或 $\neg q$”是“$\neg m$”的(　　)

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

答案:C

解析:∵“$p\wedge q$”的否定为“$\neg p\vee\neg q$”,

∴“$\neg p\vee\neg q$”是“$\neg m$”的充要条件.

解题心得:理解“且”命题的否定形式是关键.

例6 (2005·山东检测)已知命题“非空集合 M 的元素都是集合 P 的元素”是假命题,那么下列命题:

①M 的元素都不是 P 的元素;

②M 中有不属于 P 的元素;

③M 中有 P 的元素;

④M 中元素不都是 P 的元素.

其中,真命题的个数为(　　)

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

答案:B

解析:若命题 p 错误,则 $\neg p$ 正确.故命题②④正确.

解题心得:体会存在量词在命题中的应用.

3. 多题一解,培养能力

例7 (2003·南通调研)下列各组命题中,满足“p 或 q”为真,“p 且 q”为假,“非 p”为真的是(　　)

A. p:$0=\varnothing$;q:$0\in\varnothing$

B. p:在 $\triangle ABC$ 中,若 $\cos 2A=\cos 2B$,则 $A=B$;q:$y=\sin x$ 在第一象限是增函数

C. p:$a+b\geq 2\sqrt{ab}(a,b\in\mathbf{R})$;$q$:不等式 $|x|>x$ 的解集为 $(-\infty,0)$

D. p:圆 $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ 的面积被直线 $x=1$ 平分;q:椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的一条准线方程是 $x=4$

答案:C

解析:由真值表:若“$p\vee q$”为真“$p\wedge q$”为假,

则 p 真 q 假或者 p 假 q 真.

若 $\neg p$ 为真,则 p 为假.

所以由已知得“p 假 q 真”.

分析各选项得C.

例8 (2005·合肥抽样)给出命题:p:$3\geq 3$;q:函数 $f(x)=\begin{cases}1 & (x\geq 0),\\ -1 & (x<0)\end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上是连续函数.则在下列三个复合命题:“p 且 q”;“p 或 q”;“非 p”中,真命题的个数为(　　)

A. 0个　　B. 1个　　C. 2个　　D. 3个

答案:B

解析:显然,p 真,q 假,

∴只有“$p\vee q$”为真,故选B.

解题心得:以上两题都可用真值表判断.

测点专练·知能提升

一、选择题

1. 已知直线 $l\perp$ 平面 α,直线 $m\subset$ 平面 β,有下面四个命题:

①$\alpha\parallel\beta\Rightarrow l\perp m$;②$\alpha\perp\beta\Rightarrow l\parallel m$;

③$l\parallel m\Rightarrow\alpha\perp\beta$;④$l\perp m\Rightarrow\alpha\parallel\beta$.

其中正确的两个命题的序号是(　　)

A. ①②　　B. ③④　　C. ②④　　D. ①③

答案:D

解析:①正确.因 $l\perp\alpha$,$\alpha\parallel\beta$,则 $l\perp\beta$.

又因为 $m\subset\beta$,故 $l\perp m$.

②错误.l 与 m 也可能异面或相交.

③正确.因 $l\parallel m$,$l\perp\alpha$,则 $m\perp\alpha$.

又因为 $m\subset\beta$,故 $\alpha\perp\beta$.

④错误.举反例即可知 α 与 β 可能相交.

2. 设有两个命题:①关于 x 的不等式 $x^2+2ax+4>0$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立;②函数 $f(x)=-(5-2a)^x$ 是减函数.若命题有且只有一个是真命题,则实数 a 的取值范围是(　　)

A. $(-\infty,-2]$　　B. $(-\infty,2]$

C. $(-2,2)$　　D. $\left(2,\frac{5}{2}\right)$

答案:A

解析:若 $x^2+2ax+4>0$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立,则 $-2<a<2$.

若 $f(x)=-(5-2a)^x$ 是减函数,则 $a<2$.

若①真②假,则 $a\in\varnothing$;

若①假②真,则 $a\leq -2$.

故选A.

3. 设 l_1、l_2 表示两条直线,α 表示平面.若有:①$l_1\perp l_2$;②$l_1\perp\alpha$;③$l_2\subset\alpha$,则以其中两个为条件,另一个为结论,可以构造的所有命题中,正确命题的个数为(　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

答案:B

解析:只有②③⇒①.

4. 已知 A 表示点,a、b、c 表示直线,M、N 表示平面,给出下列命题:

①$a\perp M$,$b\not\subset M$,若 $b\parallel M$,则 $b\perp a$;

②$a\perp M$,若 $a\perp N$,则 $M\parallel N$;

③$a\subset M$,$b\cap M=A$,c 为 b 在 M 上的射影,若 $a\perp c$,则 $a\perp b$;

④$a\perp M$,若 $b\parallel M$,$c\parallel a$,则 $a\perp b$,$c\perp b$.

其中逆命题正确的是(　　)

A. ①④

B. ③④

C. ①②③

D. ①②③④

答案:C

解析:④的逆命题为:$a\perp M$,若 $a\perp b$,$c\perp b$,则$b/\!/M$,$c/\!/a$,c 可能在 M 内,故不正确.

5. 设 l、m、n 表示三条直线,α、β、γ 表示三个平面,则下列命题中不成立的是(　　)

A. 若 $l\perp\alpha$,$m\perp\alpha$,则 $l/\!/m$

B. 若 $m\subset\beta$,n 是 l 在 β 内的射影,$m\perp l$,则 $m\perp n$

C. 若 $m\subset\alpha$,$n\not\subset\alpha$,$m/\!/n$,则 $n/\!/\alpha$

D. 若 $\alpha\perp\gamma$,$\beta\perp\gamma$,则 $\alpha/\!/\beta$

答案:D

解析:在选项 D 中,α 与 β 可能相交.

二、填空题

6. 同住一间寝室的四名女生,她们当中有一人在修指甲,一人在看书,一人在梳头发,另一人在听音乐.

①A 不在修指甲,也不在看书;②B 不在听音乐,也不在修指甲;③如果 A 不在听音乐,那么 C 不在修指甲;④D 不在看书,也不在修指甲;⑤C 不在看书,也不在听音乐.

若上面的命题都是真命题,问她们各在做什么?

A 在________;B 在________;

C 在________;D 在________.

答案:听音乐,看书,修指甲,梳头发

解析:由①②③④可得只有 C 在修指甲,结合③得 A 必在听音乐,由④得 B 在看书,最后得 D 在梳头发.

7. 关于双曲线 $xy=1$ 有下面四个命题:

①它的渐近线方程为 $x=0$ 和 $y=0$;

②它的实轴长为 $2\sqrt{2}$;

③它的离心率为$\sqrt{2}$;

④正三角形的三个顶点 $P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$、$R(x_3,y_3)$ 在双曲线 $xy=1$ 上,则 x_1、x_2、x_3 不可能同号.

以上正确命题的序号为________(注:把所有正确命题的序号都写上).

答案:①②③④

解析:利用等轴双曲线的定义、性质和$y=\dfrac{1}{x}$的图象可知①②③④对.

8. 已知函数 $f(x)=x|x|+px+q(x\in\mathbf{R})$,给出下列四个命题:

①$f(x)$为奇函数的充要条件是 $q=0$;

②$f(x)$的图象关于点$(0,q)$对称;

③当 $p=0$ 时,方程 $f(x)=0$ 的解集一定非空;

④方程 $f(x)=0$ 的解的个数可能超过两个.

其中所有正确命题的序号是________.

答案:①②③④

解析:当 $q=0$ 时,$f(x)=x|x|+px$,显然是奇函数,故①正确;设(x_1,y_1)是 $f(x)$图象上的点,它关于点$(0,q)$的对称点为 $P(x,y)$,则 $x_1=-x$,$y_1=2q-y$,$\therefore$ 其对称曲线为 $2q-y=-x|x|-px+q$,即 $f(x)=x|x|+px+q$. $\therefore$ $f(x)$的图象关于点$(0,q)$对称,故②正确;作函数 $y=x|x|$和 $y=-q$ 的图象,它们恒有公共点,故③正确;利用函数的图象知④正确.

三、解答题

9. 判断下列命题是否为全称或存在性命题,并判断真假.

(1)有一个实数 α 使 $\tan\alpha$ 无意义;

(2)任何一条直线都有斜率;

(3)所有圆的圆心到其切线的距离等于半径;

(4)凡圆内接四边形,其对角互补.

解:(1)存在性命题. $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$时,$\tan\dfrac{\pi}{2}$不存在. 所以,存在性命题"有一个实数 α 使 $\tan\alpha$ 无意义"是真命题.

(2)全称命题. 平行于 y 轴的直线,倾斜角为$\dfrac{\pi}{2}$,而 $\tan\dfrac{\pi}{2}$无意义,所以这些直线斜率不存在. 所以,全称命题"任何一条直线都有斜率"是假命题.

(3)全称命题. 任何一个圆的圆心到其切线的距离等于半径. 所以,全称命题"所有圆的圆心到其切线的距离等于半径"是真命题.

(4)全称命题. 圆内接四边形对角互补. 所以,全称命题"凡圆内接四边形,其对角互补"是真命题.

10. 设 $p(x)$:$\sin x>\cos x$. 试问:

(1)当 $x=\dfrac{\pi}{3}$时,$p\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$是真命题吗?

(2)$p\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$是真命题吗?

(3)x 取哪些值时,$p(x)$是真命题?

解:(1)因为 $\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,$\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$,$\dfrac{\sqrt{3}}{2}>\dfrac{1}{2}$,

即$p\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$:$\sin\dfrac{\pi}{3}>\cos\dfrac{\pi}{3}$是真命题.

(2)因为 $\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$,$\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,$\dfrac{1}{2}<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

即 $p\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$:$\sin\dfrac{\pi}{6}>\cos\dfrac{\pi}{6}$是假命题.

(3)$p(x)$是真命题,有 $\sin x>\cos x$ 成立,结合正、余弦函数在一个周期内的图象可得 $x\in\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{4},2k\pi+\dfrac{5}{4}\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$,即 $x\in\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{4},2k\pi+\dfrac{5}{4}\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$时,$p(x)$是真命题.

11. 设 p:关于 x 的不等式 $a^x>1$ 的解集是$\{x|x<0\}$,q:函数 $y=\lg(ax^2-x+a)$的定义域为 $\mathbf{R}$. 如果 p 和 q 有且仅有一个正确,求 a 的取值范围.

解：若 p 真，则 $0<a<1$；若 p 假，则 $a\geqslant1$ 或 $a\leqslant0$.

若 q 真，由 $\begin{cases}a>0,\\ \Delta=1-4a^2<0\end{cases}$ 得 $a>\frac{1}{2}$；

若 q 假，则 $a\leqslant\frac{1}{2}$.

又 p 和 q 有且仅有一个正确，

当 p 真 q 假时，$0<a\leqslant\frac{1}{2}$；当 p 假 q 真时，$a\geqslant1$.

综上，得 $a\in\left(0,\frac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty)$.

12. 已知：p：方程 $x^2+mx+1=0$ 有两个不等的负实根；q：方程 $4x^2+4(m-2)x+1=0$ 无实根. 若 $p\vee q$ 为真，$p\wedge q$ 为假，求 m 的取值范围.

解：p：$\begin{cases}\Delta=m^2-4>0,\\ m>0,\end{cases}$ 解得 $m>2$.

q：$\Delta=16(m-2)^2-16=16(m^2-4m+3)<0$，

解得 $1<m<3$.

∵ $p\vee q$ 为真，$p\wedge q$ 为假，

∴ p 为真，q 为假，或 p 为假，q 为真.

即 $\begin{cases}m>2,\\ m\leqslant1\text{，或 }m\geqslant3,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m\leqslant2,\\ 1<m<3.\end{cases}$

解得 $m\geqslant3$，或 $1<m\leqslant2$.

∴ m 的取值范围为 $\{m|m\geqslant3\text{，或 }1<m\leqslant2\}$.

13. 写出下列命题的否定.

(1)3 是 9 的约数或 18 的约数；

(2)菱形的对角线相等且互相垂直；

(3)方程 $x^2+x-1=0$ 有两实根符号相同或绝对值相等；

(4)$a>0$，或 $b\leqslant0$.

解：(1)命题的否定是：3 不是 9 的约数，也不是 18 的约数；

(2)命题的否定是：菱形的对角线不相等或不互相垂直；

(3)方程 $x^2+x-1=0$ 的两实数根符号不相同且绝对值不相等；

(4)$a\leqslant0$，且 $b>0$.

注意："$p\vee q$"命题的否定为"$(\neg p)\wedge(\neg q)$"，"$p\wedge q$"命题的否定为"$(\neg p)\vee(\neg q)$".

14. 判断下列命题的真假，并写出这些命题的否定.

(1)$\forall x\in\mathbf{N}$，$x^3>x^2$；

(2)所有可以被 5 整除的整数，末位数字都是 0；

(3)$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2-x+1\leqslant0$；

(4)存在一个四边形，它的对角线互相垂直且平分.

解：(1)当 $x=0$ 时，$0^3=0$，$0^2=0$，$0=0$.

所以 $x=0$ 时，$x^3>x^2$ 不成立.

即 $\forall x\in\mathbf{N}$，$x^3>x^2$ 是假命题.

命题的否定是：$\exists x\in\mathbf{N}$，$x^3\leqslant x^2$.

(2)因为 15 可以被 5 整除，但 15 的末位数字是 5 而不是 0，所以，此命题是假命题.

命题的否定是：有些可以被 5 整除的整数，末位数字不是 0.

(3)因为 $x^2-x+1=0$ 的 $\Delta=1-4=-3<0$，所以 $x^2-x+1>0$ 恒成立.

所以，"$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2-x+1\leqslant0$"是假命题.

命题的否定是：$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-x+1>0$.

(4)菱形的对角线互相垂直且平分，所以，此命题是真命题.

命题的否定是：任何一个四边形，它的对角线不互相垂直或不互相平分.