高联考研

2007年高联考研

【理工类】数学辅导讲义

主编　西安交通大学　黄庆怀

本书适用于理工类、经济类考生

国家行政学院出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学辅导讲义．理工类/黄庆怀主编．－北京:国家行政学院出版社,2006.4
ISBN 7-80140-468-8

Ⅰ.数…　Ⅱ.黄…　Ⅲ.数学-研究生-入学考试-自学参考资料　Ⅳ.01

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 025707 号

数学辅导讲义(2007 年版)

【理工类】

黄庆怀　主编

*

国家行政学院出版社出版发行

北京市海淀区长春桥路 6 号

邮政编码:100089

发行电话:88517082

新华书店经销

北京市朝阳印刷厂印刷

*

787×1092　1/16 开本　35.25 印张　920 千字

2006 年 4 月第 1 版　2006 年 4 月第 1 次印刷

ISBN 7-80140-468-8/O·40　　定价:48.00 元

前　　言

为了使考研的同学能在较短的时间内，准确理解和熟练掌握《考研数学大纲》所要求的考试内容，全面提高考生的数学水平和应试能力，我们根据教育部颁布的最新《考研数学大纲》、近年来考研命题的特点和动态以及作者阅卷和在“考研辅导班”辅导的经验编写了本书。

本书是按照《考研数学大纲》的内容顺序，首先对每部分的基本内容（基本概念、基本理论、基本方法）进行归纳总结，然后通过典型例题介绍每部分的题型、方法和技巧，并指出了考生容易出错的地方。

本书的特点如下：

1．本书紧扣《考研数学大纲》，针对性强。每部分都从基本内容着手，循序渐进，因此，考生在基础、强化、冲刺阶段都可以本书作为参考书。

2．本书涵盖了数学一、二、三、四的全部内容，因此考数学一、二、三、四的考生均可使用本书，每位考生只需阅读自己所考内容。

3．本书不仅精编了很多典型例题，而且根据近年来考研试题的特点和动态配备了大量的练习题，以便读者通过练习，更好地掌握书中的内容。

4．本书介绍了许多独特、快捷的解题方法和技巧。

本书的一元函数微积分和微分方程部分由**黄庆怀**教授编写；多元函数微积分和无穷级数部分由**武忠祥**教授编写；线性代数部分由**张永怀**副教授编写；概率论与数理统计部分由**梅长林**教授编写，最后由**黄庆怀**教授统稿。

由于时间仓促，书中疏漏之处在所难免，恳请专家和读者指正。

编　者

2006 年 4 月于西安交大

目　录

第一部分　高等数学

第一章　函数·极限·连续

第二章　导数与微分

第三章　中值定理与导数应用

第四章　一元函数积分学及应用

第五章　常微分方程

第六章　多元函数微分学及其应用

第七章　向量代数与空间解析几何及多元微分学在几何上的应用

第八章　重积分

第九章　线面积分及多元积分的应用

第十章　无穷级数

第二部分　线性代数

第一章　行列式

第五章　大数定律与中心极限定理

第六章　数理统计的基本概念

第七章　参数估计

第八章　假设检验

第一部分　高等数学

第一章　　函数·极限·连续

■ 考试内容讲解

一、函　数

1. **函数定义**　设变量 x 在某实数集 X 中任意取一个数时，另一变量 y 按一确定法则总有确定的实数与它对应，则称 y 为 x 的函数，x 称为自变量，X 称为函数的定义域，记作 $y = f(x), x \in X$.

定义中有两个要点：

1° 定义域 X. 它表示 x 的取值范围.

2° 对应法则 $f(\ )$. 它表示给定 x 值，求 y 值的方法，由此有：① 二个给定的函数，当且仅当它们的定义域和对应法则完全相同，才能说明它们相同，否则就说明它们是不同的函数. ② 会求函数 y 的定义域，就是使 y 的取值和运算有意义的范围.

2. **复合函数**　设 $u = \varphi(x), x \subset X, u$ 的值域为 U，又 $y = f(u), u \in U$，则称 y 为 x 的复合函数，记为 $y = f(\varphi(x)), x \in X$，其中 x 称为自变量，y 称为因变量，$u = \varphi(x)$ 称为中间变量.

这里的要求是：

1° 会将一个复杂的函数（例如初等函数）拆成一些简单的函数（例如基本初等函数）的复合.

2° 会将一些简单的函数（例如分段函数）又复合在一起.

3. **函数的性态 —— 单调性，奇偶性，周期性，有界性**

(1) **单调性**　设 $f(x)$ 在区间 I 有定义，$x_1 < x_2 \in I$，

若 $f(x_1) < f(x_2)$ 称 $f(x)$ 在 I 上单调增；若 $f(x_1) > f(x_2)$ 称 $f(x)$ 在 I 上单调减.

判别方法：

方法 1°　定义本身. 设 $x_1 > x_2$，计算 $f(x_1) - f(x_2)$，若其大于零，则单调增；若其小于零，则单调减.（特别是对一些不具备可导条件的函数往往是用定义本身）

方法 2°　对可导函数 y 而言，$y' > 0$，y 单调增，$y' < 0$，y 单调减.

【例 1.1】　$y = x^2$，当 $x \geqslant 0$，y 单调增，$x < 0$，y 单调减.

[redacted] $y = \sin x$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 单调增，$y = \cos x$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 单调减.

[redacted] $$\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \sin 2x}\,dx = \int_0^{\pi}\sqrt{(\sin x - \cos x)^2}\,dx = \int_0^{\pi} |\sin x - \cos x|\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\sin x - \cos x)\,dx.$$

(2) **奇偶性** 设 $f(x)$ 的定义域为对称于原点 O，

若 $f(-x) = f(x)$，称 $f(x)$ 是偶函数；若 $f(-x) = -f(x)$，称 $f(x)$ 是奇函数.

判别方法：

方法 1° 定义本身就是判别 $f(x)$ 奇偶性的基本原理和方法，那就是计算 $f(-x) = \cdots = f(x)(-f(x))$，分别说明 $f(x)$ 是偶（奇）函数.

方法 2° 间接法

奇函数的导数必是偶函数，如：$(\sin x)' = \cos x$.

偶函数的导数必是奇函数，如：$(x^2)' = 2x$.

奇函数的原函数必是偶函数，如：$f(x) = \sin x, F(x) = -\cos x + c$.

偶函数必有一个原函数是奇函数，如：$f(x) = \cos x, F(x) = \sin x$.

(3) **周期性**

若 $f(x + T) = f(x)$，则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.

判别方法：

方法 1° 定义本身就是判别 $f(x)$ 周期性的原理和方法. 那就是计算 $f(x + T) = \cdots = f(x)$，则 $f(x)$ 是以 T 为周期的函数.

方法 2° 间接法

由 $\sin x, \cos x$ 的周期为 2π，推知 $|\sin x|, |\cos x|, \sin 2x, \cos 2x$ 的周期为 π；$\tan x, \cot x$ 的周期为 π，推知 $\tan\frac{x}{2}, \cot\frac{x}{2}$ 的周期为 2π.

$f(x)$ 是可导的周期函数，它的导数仍是周期函数，且周期不变.

[redacted] $$I = \int_0^{n\pi} \sqrt{1 - \sin 2x}\,dx = n\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \sin 2x}\,dx = n\int_0^{\pi} |\sin x - \cos x|\,dx$$

$$= n\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\sin x - \cos x)\,dx\right).$$

[redacted] 求 $I = \int_0^{n\pi} x|\sin x|\,dx$.

【解】 令 $x = n\pi - t, dx = -dt, x: 0 \to n\pi$ 时，$t \to n\pi \to 0$，于是

$$原式 = I = \int_0^{n\pi} (n\pi - t)|\sin t|\,dt = n\pi\int_0^{n\pi} |\sin t|\,dt - \int_0^{n\pi} t|\sin t|\,dt$$

$$= n^2\pi\int_0^{\pi} |\sin t|\,dt - I = n^2\pi\int_0^{\pi} \sin t\,dt - I.$$

故 $I = \frac{1}{2}n^2\pi\int_0^{\pi}\sin t\,dt = n^2\pi$.

[redacted] 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续，证明 $f(x)$ 是以正常数 l 为周期的周期函数的充分必要条件是 $\int_0^l f(x + y)\,dx$ 与 y 无关.

【证明】 设 $I(y) = \int_0^l f(x + y)\,dx \xlongequal{令 x + y = t} \int_y^{y+l} f(t)\,dt$.

必要性. $f(x+l)=f(x)$

$$I(y)=\int_y^{y+l}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_y^0 f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^l f(t)\,\mathrm{d}t+\int_l^{l+y}f(t)\,\mathrm{d}t,$$

其中 $\int_l^{l+y}f(t)\,\mathrm{d}t \xlongequal{令\ t=u+l} \int_0^y f(u+l)\,\mathrm{d}u=\int_0^y f(u)\,\mathrm{d}u$.

故 $I(y)=\int_0^l f(t)\,\mathrm{d}t$. 所以 $\int_0^l f(x+y)\,\mathrm{d}x$ 与 y 无关

充分性. 设 $I(y)$ 与 y 无关,则 $I'(y)=0$. 而

$$I'(y)=\left(\int_y^0 f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^l f(t)\,\mathrm{d}t+\int_l^{l+y}f(t)\,\mathrm{d}t\right)'=f(y+l)-f(y)=0,$$

故 $f(y+l)=f(y)$. 所以 $f(x)$ 是以 l 为周期的周期函数.

(4) 有界性

若 $\exists M>0$,使 $|f(x)|\leqslant M, \forall x\in I$,称 $f(x)$ 在 I 上有界;

若不存在 $M>0$,使 $|f(x)|\leqslant M, \forall x\in I$,称 $f(x)$ 在 I 上无界.

判别方法:

方法 1° 定义本身就是判定 $f(x)$ 是否有界的原理和方法,即对 $f(x)$ 去寻找 $|f(x)|\leqslant M$ 的一个 $M>0$,找到则有界,找不到则无界. 不过,这方法的原理虽简单,但要找出 M 却异常困难,因为它由 $|f(x)|\leqslant M$,本身涉及到不等式的放大或缩小,技巧性极强,因此,一般情况下也不要求它,完全不必细弄,只要掌握简单的基本的即可,例如,由 $\frac{1}{1+x^2}\leqslant 1$,得 $\frac{1}{1+x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有界.

方法 2° 间接法

1° 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有界.

2° 若 $f(x)$ 在 (a,b) 连续,且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 存在, $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在,则 $f(x)$ 在 (a,b) 有界.

3° 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$,则 $f(x)$ 必无界.

【例1.7】 当 $x\to\infty$ 时, $x\sin x$ 是

(A) 无穷小量. (B) 无穷大量. (C) 有界量(非无穷小). (D) 无界量(非无穷大).

【分析】 这里要当心的地方是,注意区别无穷大量与无界量,结论是无穷大量必是无界量,但无界量不一定是无穷大量.

取 $x=2n\pi$ 时, $x\sin x=(2n\pi)\cdot\sin(2n\pi)=(2n\pi)\cdot 0=0\to 0$,

$x=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ 时, $x\sin x=\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\to\infty$. 选(D).

[illegible] $f(x)=\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在以下哪个区间有界.

(A) $(-1,0)$ (B) $(0,1)$ (C) $(1,2)$ (D) $(2,3)$

【分析】 本题要讨论的是开区间的有界性,难,难就难在闭区间连续保证有界性用不上,故用以上 2°. 由于 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 连续,且

$$\lim_{x\to -1^+}f(x)=\lim_{x\to -1^+}\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\frac{-\sin 3}{2\cdot 9}=\frac{-\sin 3}{18}\quad(存在),$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\frac{-\sin 2}{4}\quad(存在),$$

故 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 有界,选(A).

4. **基本初等函数与初等函数**

基本初等函数:以下五种函数统称基本初等函数,即 $y = x^{\alpha}$;$y = a^x(a > 0, a \neq 1)$;$y = \log_a x(a > 0, a \neq 1)$;$y = \sin x, \cos x, \tan x, \cot x$;$y = \arcsin x, \arccos x, \arctan x, \mathrm{arccot} x$.

初等函数:由基本初等函数经过有限次的有理运算及有限次的函数复合而产生,且能用一个解析式子表示的函数,统称初等函数.

微积分学中所讨论的函数基本上都是初等函数,请熟悉基本初等函数的性质,图形.

5. **分段函数**

$f(x) = \begin{cases} g_1(x), & x > x_0, \\ g_2(x), & x = x_0, \\ g_3(x), & x < x_0 \end{cases}$ 称为分段函数,x_0 称为接头点.

值得强调的是以下三点:

1° 如何求分段函数的函数值.

2° 应该知道考试的一个重点就是,求分段函数在接头点处的极限,连续性,可导性,积分.

3° 处理分段函数接头点 x_0 的关键是:用哪一个表达式,用哪一个表示式明确了,那么求极限、讨论连续性、可导性、积分等就十分的自然、简单.

【例 1.9】 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leqslant 0, \\ \ln x, & x > 0, \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 2 - \cos x, & x \leqslant 0, \\ 1 - \sqrt{x}, & x > 0, \end{cases}$ 求 $f(g(x)), g(f(x))$.

【解】 $f(g(x)) = \begin{cases} (g(x))^2, & g(x) \leqslant 0, \\ \ln(g(x)), & g(x) > 0, \end{cases}$

由 $g(x) = \begin{cases} 2 - \cos x, & x \leqslant 0, \\ 1 - \sqrt{x} > 0, & 0 < x < 1, \\ 1 - \sqrt{x} \leqslant 0, & x \geqslant 1, \end{cases}$ 故 $f(g(x)) = \begin{cases} \ln(2 - \cos x), & x \leqslant 0, \\ \ln(1 - \sqrt{x}), & 0 < x < 1, \\ (1 - \sqrt{x})^2, & x \geqslant 1. \end{cases}$

$g(f(x)) = \begin{cases} 2 - \cos f(x), & f(x) \leqslant 0, \\ 1 - \sqrt{f(x)}, & f(x) > 0. \end{cases}$

由 $f(x) = \begin{cases} x^2 \geqslant 0, & x \leqslant 0, \\ \ln x \leqslant 0, & 0 < x \leqslant 1, \\ \ln x > 0, & x > 1, \end{cases}$ 故 $g(f(x)) = \begin{cases} 1 - |x|, & x \leqslant 0, \\ 2 - \cos(\ln x), & 0 < x \leqslant 1, \\ 1 - \sqrt{\ln x}, & x > 1. \end{cases}$

注:不少考生很怕以上题目,经验是“由里至外”,并注意我们的“格式”,例如求 $f(g(x))$,必须按 $f(x)$ 的定义要求分 $x \leqslant 0, x > 0$,所以将 $g(x)$ 代进 $f(x)$ 时,只要将 $g(x) \leqslant 0, g(x) > 0$ 分开,即可代入.

二、极　　限

1. **定义**

(1) **数列极限**　设数列 a_n,常数 A,若对任意正数 $\varepsilon > 0$,$\exists N$,当 $n > N$ 时 $|a_n - A| < \varepsilon$ 恒成立,称 a_n 收敛于 A,记为 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = A$.

(2) **当 $x \to \infty$ 时,函数 $f(x)$ 的极限**　对任意给定正数 $\varepsilon > 0$,$\exists X$,当 $|x| > X$ 时,$|f(x) - A| < \varepsilon$ 恒成立,称 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时的极限为 A,记为 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$.

(3) **当 $x \to x_0$ 时(x_0 为有限值)函数 $f(x)$ 的极限**　对任给定的正数 $\varepsilon > 0$,$\exists \delta > 0$,当 $0 < |x - x_0|$

$< \delta$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$ 恒成立，称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 的极限为 A，记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

(4) 当 $x\to x_0$ 时(x_0 为有限值)函数 $f(x)$ 的左、右极限

对 $\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<x-x_0<\delta$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$ 恒成立，称 $f(x)$ 当 $x\to x_0^+$ 时的右极限为 A，记为 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

对 $\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<x_0-x<\delta$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$ 恒成立，称 $f(x)$ 当 $x\to x_0^-$ 时的左极限为 A，记为 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$.

左、右极限也有以下记法：$f_-(x_0)$，$f_+(x_0)$. 显然 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f_+(x_0)=f_-(x_0)=A$.

2. 极限的四则运算

设　$\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则有

$$\lim(f(x)\pm g(x))=A\pm B;\qquad \lim(f(x)\cdot g(x))=A\cdot B;$$

$$\lim\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{A}{B}(B\neq 0);\qquad \lim(f(x)^{g(x)})=A^B(A>0).$$

3. 无穷小量与无穷大量

(1) 无穷小量　若 $\lim f(x)=0$，则称变量 $f(x)$ 为无穷小量($x\to x_0$，或 $x\to\infty$).

性质 1　若 $\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $\alpha(x)$ 是($x\to x_0$ 或 $x\to\infty$ 时)无穷小量.

性质 2　1° 有限个无穷小的代数和仍是无穷小.

2° 有限个无穷小的积仍是无穷小.

3° 无穷小与有界函数的积仍是无穷小.

无穷小量的比较　设 $\alpha(x)$，$\beta(x)$ 是无穷小($x\to x_0$，或 $x\to\infty$)，

1° 若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的高阶无穷小.

2° 若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$，则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的低阶无穷小.

3° 若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c(c\neq 0)$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶无穷小.

4° 若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小.

5° 若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k}=c(c\neq 0)$，则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小.

(2) 无穷大量　若 $\lim f(x)=\infty$，则称变量 $f(x)$ 为无穷大量($x\to x_0$，或 $x\to\infty$).

注：①$f(x)$ 为无穷大量，那么 $\dfrac{1}{f(x)}(f(x)\neq 0)$ 必为无穷小量；$\alpha(x)$ 为无穷小量，那么 $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ 必为无穷大量.

② 无穷小量是变量，应区别于很小很小的数，常数 0 可看为无穷小量，无穷大量是变量，应区别于很大很大的数；无穷大量必是无界量，但无界量不一定是无穷大量，如 $x\to 0$ 时 $\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 是无界量，非无穷大量.

4. 极限存在的两个准则

【存在定理】 $f(x)$ 单调增(或单调减)，且有上界(或有下界)，那么 $f(x)$ 必有极限.

【夹逼准则】 若 $g(x) \leqslant f(x) \leqslant k(x)$，且 $\lim g(x) = \lim k(x) = A$，则 $\lim f(x) = A$.

注：① 以上判别极限存在的准则，理论价值极大，应用却很困难，因为都碰上找出 $f(x)$ 的界，或 $f(x) \leqslant k(x)$（上界），$f(x) \geqslant g(x)$（下界）只要用上不等式为放大与缩小，技巧性却很强，故仅作一般要求，会做基本题就可以了.

② 必须回答考生的一个问题，"单调有界必有极限"，仅判定了"极限存在"而后再"求极限"，问：有时求极限就直接求，有时必须先证存在，才能进一步求极限. 那么什么时候一定要先证存在性，什么时候根本不必证"存在性". 答：你若用到"$\lim f(x) = A$"这个结论，那就必须先证其"存在性"，否则就错；如果你根本就不用 $\lim f(x) = A$，或 $\lim x_n = B$ 等，那么你就根本不必先证其"存在性".

[illegible] 设 $a_1 > 0, a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n})$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

【解】 首先证其存在性. 因 $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n}) \geqslant \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$（$a_n$ 有下界 1），

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{a_n^2}) \leqslant \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{1}) = 1, \text{所以 } a_n \text{ 单调减}.$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$（存在性证明）.

然后求 A. 由 $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n})$ 两边取极限得 $A = \frac{1}{2}(A + \frac{1}{A})$，求解得 $A = 1$.

注：这里取极限时，用到了 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ 这结论，故必须先证存在性.

[illegible] 设 $x_n = \frac{3n^2 - n + 1}{n^2 + n - 2}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

【解】 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2 - n + 1}{n^2 + n - 2} = 3$.

注：这里是直接求，因为根本就不用"$\lim x_n = A$"这一结论.

5. 两个基本极限

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1,\ \lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \text{ 或 } \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e.$$

6. 常用基本极限及等价代换

(1) 基本极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1,\ \lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e,\ \lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e,$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1,\ \lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} = 1,\ \lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1,\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt[x]{a} = 1 \quad (a > 0).$$

(2) 等价代换 当 $x \to 0$ 时，

$\sin x \sim x,\ \tan x \sim x,\ \arcsin x \sim x,\ \arctan x \sim x,$

$e^x - 1 \sim x,\ a^x - 1 \sim x\ln a,\ \ln(1+x) \sim x,$

$(1+x)^m - 1 \sim mx,\ 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2.$

7. 极限的重要性质

【唯一性】 若 $\lim f(x)$ 存在，且 $\lim f(x) = A, \lim f(x) = B$，则 $A = B$.

【保号性】 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,

若 $A>0$,则 $\exists\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时 $f(x)>0$;

若 $f(x)\geqslant 0$,则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时 $A\geqslant 0$.

【局部有界性】 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,则 $f(x)$ 在 x_0 的某空心邻域 $U_0(x_0,\delta)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}$ 内有界.

注:极限性质 $\lim f(x)=A\Rightarrow f(x)=A+\alpha(x)$ 及保号性定理用处极大,其技巧关键是:据已知极限,利用以上性质可将“极限符号”去掉,这样对 $f(x)$ 的运算就变成异常简单、明白.

[redacted] 设 $f(x)$ 在 x_0 邻域连续,且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n}=2$,试讨论 $f(x)$ 在 x_0 处的极值.

【解】 据极限性质,由 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n}=2$ 得

$$f(x)-f(x_0)=2\cdot(x-x_0)^n+\alpha((x-x_0)^n),$$

即 $f(x)-f(x_0)$ 的符号由 $2(x-x_0)^n$ 确定.

当 n 为奇数,$x>x_0$ 时,$f(x)-f(x_0)>0$;$x<x_0$ 时,$f(x)-f(x_0)<0$.故 x_0 不是极值点.

当 n 为偶数,$x>x_0$ 或 $x<x_0$ 时,$f(x)-f(x_0)>0$,故 x_0 为极小值点.

[redacted] 若 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$,则在 $x=a$ 处

(A) $f(x)$ 的导数存在,且 $f'(a)\neq 0$. (B) $f(x)$ 取得极大值.

(C) $f(x)$ 取得极小值. (D) $f(x)$ 的导数不存在.

【分析】 由 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)}\cdot\dfrac{1}{x-a}=-1$ 又 $\lim\limits_{x\to a}(x-a)=0$,

得 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}\cdot(x-a)=0$,即 $f'(a)=0$.

由 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$,则 $\exists\delta>0$,当 $x\in(a-\delta,a+\delta)$ 时,$\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}<0$,即 $f(x)-f(a)<0$.故 $f(x)$ 在 $x=a$ 取极大值.选(B).

[redacted] 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续,$f(a)=f(b)=0$,且 $f'(a)\cdot f'(b)>0$,求证:$\exists\xi\in(a,b)$,使 $f(\xi)=0$.

【证明】 设 $f'(a)>0$,则 $f'(b)>0$.

由 $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$,据保号性定理推知,$\exists\delta_1$,当 $x_1\in(a,a+\delta_1)$ 时,

$$\frac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a}>0\quad\Rightarrow f(x_1)>0.$$

同理由 $f'(b)=\lim\limits_{x\to b}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}>0$,$\exists\delta_2$,当 $x_2\in(b-\delta_2,b)$ 时,

$$\frac{f(x_2)-f(b)}{x_2-b}>0\quad\Rightarrow f(x_2)<0.$$

对 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$,由于 $f(x_1)\cdot f(x_2)<0$,故 $\exists\xi\in(a,b)$ 使 $f(\xi)=0$.

注:以上例题对我们的启发是,已知极限中去掉“极限”符号十分关键,这正是极限性质中保号性定理的应用技巧!

三、连　　续

1. **定义**　若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

若 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 处左连续.

若 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 处右连续.

$\forall x_0 \in (a,b)$，$f(x)$ 在 x_0 连续，称 $f(x)$ 在 (a,b) 连续.

若 $f(x)$ 在 (a,b) 连续，且在 $x = a$ 处右连续，在 $x = b$ 左连续，则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

2. **$f(x)$ 在 x_0 连续的充分必要条件**　$f(x)$ 在 x_0 左连续，同时右连续. 这充分条件告诉我们，讨论 $f(x)$ 在 x_0 的连续就是看它在 x_0 处是否是左连续，且右连续.

3. **$f(x)$ 在 x_0 连续，就表示以下三条同时满足**

(1) $f(x)$ 在 x_0 处有定义；(2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在；(3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

4. **间断性及间断类型**

间断性　$f(x)$ 在以上连续的三个条件中，只要有一条不满足，称 $f(x)$ 在 x_0 处间断.

间断类型　第一类型间断：$f(x)$ 在 x_0 处的左、右极限均存在的间断点.

第二类型间断：$f(x)$ 在 x_0 的左、右极限中至少有一个不存在的间断点.

间断点的名称：①$f(x)$ 在 x_0 处的左、右极限均存在，且相等的间断点，称**可去间断点**.

②$f(x)$ 在 x_0 处的左、右极限存在，但不相等的间断点，称**跳跃间断点**.

③ 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$，则称 x_0 为 $f(x)$ 的**无穷间断点**.

④ 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 因振荡而不存在，则称 x_0 为 $f(x)$ 的**振荡间断点**.

5. **初等函数的连续性**

若 $f(x)$ 在区间 I 上是初等函数，则 $f(x)$ 在 I 上连续.

6. **连续函数在闭区间上的性质**

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，那么

(1) **最大值与最小值定理**　在 $[a,b]$ 上必有 ξ_1, ξ_2，使 $f(\xi_1) = m_1$，$f(\xi_2) = M$，其中 m_1, M 分别是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值，最大值.

(2) **介值定理**　设 $m = \min\limits_{x \in [a,b]} f(x)$，$M = \max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$，$m \leqslant \mu \leqslant M$，则 $\exists \xi \in [a,b]$，使 $f(\xi) = \mu$.

(3) **零点定理**　$f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，且 $f(a) \cdot f(b) < 0$，则至少 $\exists$ 一个 $\xi \in (a,b)$，使 $f(\xi) = 0$.

■ 常考题型解题方法与技巧

题型一　求函数的定义域及函数表达式

【例 1.15】　求下列函数定义域：

（Ⅰ）$y = \dfrac{1}{\sqrt{2x - x^2}} + \arcsin\dfrac{2x+1}{3}$；　　（Ⅱ）$y = \dfrac{1}{\ln|x-1|}$.

【解】　（Ⅰ）$\begin{cases} 2x - x^2 > 0 \\ \left|\dfrac{2x+1}{3}\right| \leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < x < 2, \\ -2 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$ 故定义域为 $0 < x \leqslant 1$.

（Ⅱ）$\begin{cases} \ln|x-1| \neq 0 \\ |x-1| \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0, x \neq 2 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow$ 定义域为 $x \neq 0, x \neq 1, x \neq 2$.

注：复杂函数的定义域，就是各个简单函数定义域的交集．

【例 1.16】　设 $f(x) = e^{x^2}$，$f(\varphi(x)) = 1 - x$，且 $\varphi(x) \geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 的定义域．

【解】　由 $f(x) = e^{x^2}$，推知 $f(\varphi(x)) = e^{\varphi^2(x)} = 1 - x \Rightarrow \varphi^2(x) = \ln(1-x)$.

由 $\varphi(x) \geqslant 0$ 可得 $\varphi(x) = \sqrt{\ln(1-x)}$.

故 $\varphi(x)$ 的定义域为：$\ln(1-x) \geqslant 0$，即 $x \leqslant 0$.

【例 1.17】　设 $y = f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，$\varphi(x) = 1 - \ln x$，求 $y = f(\varphi(x))$ 的定义域．

【解】　令 $t = \varphi(x)$，$f(t)$ 的定义域由题意知为 $[0,1]$，

即 $0 < t = \varphi(x) = 1 - \ln x \leqslant 1$，解得 $1 \leqslant x < e$，为所求定义域．

【例 1.18】　设 $f(x-1)$ 的定义域为 $[0,a]$ $(a > 0)$，则 $f(x)$ 的定义域是

(A) $[1, a+1]$.　　　　(B) $[-1, a-1]$.

(C) $[a-1, a]$.　　　　(D) $[a, a+1]$.

【分析】　$f(x-1)$ 的定义域为 $[0,a]$，即 $0 \leqslant x \leqslant a$.

令 $t = x - 1$，则 $-1 \leqslant t \leqslant a - 1$．故 $f(x) = f(t)$ 的定义域为 $[-1, a-1]$．选(B)．

注：强调两点：① 已知 $f(\varphi(x))$ 的定义域求 $f(x)$ 的定义域的一般方法是，从 x 的变化范围解出 $t = \varphi(x)$ 的变化范围．

② 定义域是指 x 的变化范围，【例 1.18】中 $f(x-1)$ 的定义域为 $[0,a]$，是指 $0 \leqslant x \leqslant a$，而不是 $x - 1$ 的定义域为 $[0,a]$，本题很多人选(A)．错就错在将 $f(x-1)$ 的定义域理解成 $0 \leqslant x - 1 \leqslant a$!

【例 1.19】　设 $f(x)$ 满足 $af(x) + bf\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{c}{x}$，其中 a, b, c 为常数，$a^2 \neq b^2$．求 $f(x)$.

【解】　由 $af(x) + bf\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{c}{x}$，令 $x = \dfrac{1}{t}$，得 $af\left(\dfrac{1}{t}\right) + bf(t) = ct$.

故 $\begin{cases} af(x) + bf\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{c}{x}, \\ bf(x) + af\left(\dfrac{1}{x}\right) = cx. \end{cases} \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{a^2 - b^2}\left(\dfrac{ac}{x} - bcx\right)$.

【例 1.20】　设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & |x| \leqslant 2, \\ 2, & |x| > 2, \end{cases}$ 求 $f(g(x))$，$g(f(x))$.

【解】 $f(g(x))=\begin{cases}1, & |g(x)|\leqslant 1,\\ 0, & |g(x)|>1,\end{cases}$ 其中

$$g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 2,\\ 2, & |x|>2\end{cases}=\begin{cases}-1\leqslant 2-x^2\leqslant 1, & 1\leqslant|x|\leqslant\sqrt{3},\\ 2-x^2>1, 2-x^2<-1, & |x|<1,\text{或}\sqrt{3}<|x|\leqslant 2,\\ 2, & |x|>2.\end{cases}$$

故 $f(g(x))=\begin{cases}1, & 1\leqslant|x|\leqslant\sqrt{3},\\ 0, & |x|<1\text{ 或}\sqrt{3}<|x|\leqslant 2,\\ 0, & |x|>2.\end{cases}$

$$g(f(x))=\begin{cases}2-f^2(x), & |f(x)|\leqslant 2,\\ 2, & |f(x)|>2.\end{cases}$$

其中 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1\end{cases}=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & 1<|x|\leqslant 2,\\ 0, & |x|>2.\end{cases}$

故 $g(f(x))=\begin{cases}2-1^2, & |x|\leqslant 1,\\ 2-0^2, & 1<|x|\leqslant 2,\\ 2-0^2, & |x|>2\end{cases}=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 2, & |x|>1.\end{cases}$

【例 1.21】 设 $f(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0,\\ x+2, & x>0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $f(g(x))$.

【解】 $f(g(x))=\begin{cases}2-g(x), & g(x)\leqslant 0,\\ g(x)+2, & g(x)>0,\end{cases}$ 其中 $g(x)=\begin{cases}x^2>0, & x<0,\\ -x\leqslant 0, & x\geqslant 0,\end{cases}$

故 $f(g(x)=\begin{cases}x^2+2, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$

题型二　函数性态

▶ Ⅰ. 单调性

【例 1.22】 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，$\forall x_1,x_2,(x_1-x_2)(f(x_1)-f(x_2))\geqslant 0$，则

(A) $f'(x)\geqslant 0$.　　(B) $f'(x)\leqslant 0$.

(C) $f(-x)$ 单调增加.　　(D) $-f(-x)$ 单调增加.

【分析】 因 $x_1>x_2$，$f(x_1)>f(x_2)$，$-x_1<-x_2$，$f(-x_2)>f(-x_1)$，故 $-f(-x_1)>-f(-x_2)$. 即 $x_1>x_2$ 时，$-f(-x_1)>-f(-x_2)$. 故选(D).

【例 1.23】 设 $f(x)$ 连续，$F(x)=\int_0^x(x-2t)f(t)\,\mathrm{d}t$，求证：若 $f(x)$ 单调增，则 $F(x)$ 必单调减.

【证明】 $F(x)=\int_0^x(x-2t)f(t)\,\mathrm{d}t=x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-2\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$,

$$F'(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+xf(x)-2xf(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-xf(x).$$

由此有：① $F'(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-xf(x)=xf(c)-xf(x)=x(f(c)-f(x))\leqslant 0\ (0\leqslant c\leqslant x)$,

② $F'(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-xf(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}t=\int_0^x(f(t)-f(x))\,\mathrm{d}t\leqslant 0$.