高等职业教育数学系列教材

概率统计学习教程

GAILüTONGJIXUEXIJIAOCHENG

高文杰　张立圃　主编

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

高等职业教育数学系列教材

概率统计学习教程

主　编　高文杰　张立圃
副主编　崔　媛　李国辉
主　审　陈秀岐　丁　杰

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

概率统计学习教程/高文杰,张立圃主编.
—天津:天津大学出版社,2006.10
ISBN 7-5618-2238-3

Ⅰ.概... Ⅱ.①高...②张... Ⅲ.①概率论-高等学校-教学参考资料②数理统计-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第120068号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨欢
地 址 天津市卫津路92号天津大学内(邮编:300072)
网 址 www.tjup.com
电 话 发行部:022-27403647 邮购部:022-27402742
印 刷 廊坊市长虹印刷有限公司
经 销 全国各地新华书店
开 本 185mm×260mm
印 张 15.25
字 数 381千
版 次 2006年10月第1版
印 次 2006年10月第1次
印 数 1-3 000
定 价 26.00元

前　　言

概率统计作为一门研究随机现象数量规律性的数学学科，它广泛应用于自然科学、技术科学、社会科学和人文科学的各个方面，掌握这门学科的基本理论和方法对提高数学素养和应用其知识认识与解决相关问题的能力是重要的.这门学科不仅具有理论的抽象性、逻辑的严谨性，而且还具有自己独特的思维方法和解题技巧，对初学者往往是原理能理解而习题做不出，表现为缺乏思路，不得要领.为帮助初学者学好这门学科，笔者根据多年从事概率统计教学所累积的经验，编写了此书.

全书内容在兼顾现行较通行范围的基础上，紧扣笔者编写的《概率统计》(天津大学出版社，丁杰、高文杰主编)，故可作为其教学参考用书.同时还可作为高职高专及本科层次相关内容的学习辅导及教学参考.

全书共设9章，依次为概率论的基本概念、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、随机向量、样本及抽样分布、参数估计、假设检验、方差分析和回归分析.每章以节为单元展开辅导，每节设有知识要点、典型题型解析、同步练习及参考答案，每章还设有疑难解析、常考题型归纳、知识网络与检测题和答案，书末还给出了数套期末测试题与答案，以供自我检测.

典型题型解析部分对常见的题型介绍了一般的解题思路方法，并精选例题给出详尽解答，力求体现典型例题的示范作用；疑难解析将概率统计中理解困难、易于混淆的重要概念、思想方法和解题方法深入剖析，有助于正确把握相关内容；常考题型归纳以表格形式对不同知识点的常考题型做出归类总结，有助于从整体上把握问题的不同侧面；每章的检测题和期末测试题都经过精心挑选，有许多是全国各类考试的优秀试题，这将有益于检验和提高解决问题的能力，巩固学习效果.

参加本书编写的有高文杰、张立圃、崔媛、李国辉，由高文杰统稿.陈秀岐、丁杰任主审.

给予本书很大帮助并提出宝贵意见的有杜俊文、李艳梅、陈洁、刘振云、王鲁静、李仲佳、周爱丽、蒋风光和徐向东等，编者在此一并致谢.

限于编者水平，本书一定存在疏漏和错误，恳请读者批评指正.

编者

2006年9月

目　　录

第 1 章　概率论的基本概念

1.1　随机事件及其概率

1.1.1　知识要点

1. 随机事件

在一定条件下可能出现也可能不出现的现象称为随机事件，简称为事件，记为 $A,B,C,\cdots$.

在一定条件下必然出现的现象称为必然事件，记为 Ω.

在一定条件下必然不出现的现象称为不可能事件，记为$\varnothing$.

为了讨论问题方便起见，将必然事件 Ω 和不可能事件$\varnothing$也看作随机事件.

2. 频率

①在一定的条件下，重复进行 n 次试验，在这 n 次试验中，随机事件 A 发生的次数 μ 称为随机事件 A 的频数，比值 $f_n(A)=\frac{\mu}{n}$，称为随机事件 A 的频率.

大量的实践证明，随着试验次数 n 的逐渐增大，频率 $f_n(A)$ 逐渐稳定于一个常数 p，这种性质称为频率的稳定性，常数 p 称为频率稳定值. 频率的稳定性说明随机事件在试验中出现的可能性是可以度量的，即说明概率的存在性.

②基本性质：

$$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1.$$

3. 概率

①在一组不变的条件 S 下，随机事件 A 的频率稳定值 p 称为随机事件 A 在条件组 S 下发生的概率，记为 $P(A)$，即

$$P(A)=p.$$

②基本性质：

对任何随机事件 A 有，$0\leqslant P(A)\leqslant 1$，

$$P(\Omega)=1,$$

$$P(\varnothing)=0.$$

4. 排列与组合

(1)两个基本原理

加法原理：完成一件事情，有 m 类方法，第 1 类中有 n_1 种不同方法，第 2 类中有 n_2 种不

同方法，…，第 m 类中有 n_m 种方法，任意一种方法都可完成这件事，那么完成这件事的不同方法共有 $n_1+n_2+\cdots+n_m$ 种.

乘法原理：完成一件事情，有 m 个步骤，第一步有 n_1 种不同方法，第 2 步有 n_2 种不同方法，…，第 m 步有 n_m 种不同方法.每一步都做完，这件事才完成，那么完成这件事的不同方法共有 $n_1\cdot n_2\cdot\cdots\cdot n_m$ 种.

(2)排列

从 n 个不同元素中任取 r 个元素，按照一定顺序排成一列，称为从 n 个不同元素中取出 r 个元素的一个排列.

当 $r<n$ 时，称为选排列，排列总数用 A_n^r 来表示

$$\mathrm{A}_n^r=n(n-1)\cdots n(n-r+1)=\frac{n!}{(n-r)!};$$

当 $r=n$ 时，称为全排列，排列总数用 P_n 来表示

$$\mathrm{P}_n=n(n-1)\cdots3\cdot2\cdot1=n!.$$

(3)组合

从 n 个不同元素中任取 r 个元素，不计顺序构成一组，称为从 n 个不同元素中任取 r 个元素的一个组合，其组合总数用 C_n^r 来表示，即

$$\mathrm{C}_n^r=\frac{\mathrm{A}_n^r}{r!}=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}=\frac{n!}{r!\ (n-r)!}.$$

5.古典概型

①如果一个事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 具有下列 3 条性质：

等可能性：$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 发生的机会相同；

完全性：在任一次试验中，$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生；

互不相容性：在任一次试验中，$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至多有一个发生.

则称事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为等概基本事件组，或称为等可能完备事件组，其中任一事件 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$称为基本事件.

②如果 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是一个等概基本事件组，而事件 B 由其中的某 m 个基本事件构成，则事件 B 的概率为

$$P(B)=\frac{m}{n}.$$

利用此公式来讨论事件的概率的模型称为古典概型.

1.1.2 典型题型解析

例 1.1.1 一次投掷两颗骰子，求出现的点数之和为奇数的概率.

解法 1 设随机事件 $A=$“出现的点数之和为奇数”.

若取每次投掷骰子所有可能出现的点数(i,j)为基本事件$(i=1,2,\cdots,6,j=1,2,\cdots,6)$，则基本事件总数 $n=\mathrm{C}_6^1\cdot\mathrm{C}_6^1=36$，并且 36 个基本事件组成等可能完备事件组，其中事件 A 包含的基本事件数 $m=2\mathrm{C}_3^1\cdot\mathrm{C}_3^1+\mathrm{C}_3^1\cdot\mathrm{C}_3^1=18$，所以 $P(A)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$.

解法 2 可取每次投掷骰子可能出现的点数之和的奇偶性为基本事件，即基本事件为{点数之和为奇数}、{点数之和为偶数}，它们构成了一个等可能完备事件组，基本事件总数 $n=2$，事件 A 包含的基本事件数 $m=1$，所以 $P(A)=\frac{1}{2}$.

解法 3 把每次投掷骰子可能出现的结果取为{奇，偶}、{奇，奇}、{偶，奇}、{偶，偶}，则这四个基本事件组成一个等可能完备事件组，基本事件总数 $n=4$，事件 A 包含的基本事件数 $m=2$，所以 $P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

注 本题说明同一问题可以选取不同的等可能完备事件组，但每个基本事件必须是等概的.

若{两个奇}、{两个偶}、{一奇一偶}作为基本事件，则会得出 $P(A)=\frac{1}{3}$，错误的原因就在于上述三个事件不是等概的，事实上，$P(\text{两个奇})=\frac{1}{4}\neq P(\text{一奇一偶})=\frac{1}{2}$.

例 1.1.2 k 个朋友随机地围绕圆桌而坐，求其中甲、乙座位相邻的概率.

解法 1 设事件 $A=$“甲、乙两人座位相邻”.

k 个朋友随机地围绕圆桌而坐的所有可能的坐法共有 $k!$ 种，所以基本事件总数 $n=k!$，甲、乙两人座位要求相邻，可以分两步完成：先让甲、乙两人坐在一起，有 $2!$ 种坐法，其中 $(k-2)$ 个人随机地围绕圆桌而坐，共有 $(k-2)!$ 种坐法，由乘法原理，事件 A 包含的基本事件数 $m=2!(k-2)!$，所以 $P(A)=\frac{2!(k-2)!}{k!}=\frac{2}{k(k-1)}$.

解法 2 设甲先坐好；再考虑乙的坐法，甲有 k 种坐法，乙有 $k-1$ 种坐法，由乘法原理，乙的坐法即基本事件总数 $n=k\cdot(k-1)$，而乙坐在甲身边的座法有 2 种，即事件 A 包含的基本事件数 $m=2$，所以 $P(A)=\frac{2}{k\cdot(k-1)}$.

例 1.1.3 袋中有 10 个球，9 个白球，1 个红球，10 个人依次从袋中各取一个球，每人取一球后不放回袋中，问第一人、第二人、…，最后一个人取到红球的概率各是多少？

解 设随机事件 $A_k=$“第 k 个人取得红球”$(k=1,2,\cdots,10)$，10 个人依次从袋中各取一球，每一种可能的取法对应于一个基本事件，基本事件总数 $n=10!$，事件 A_k 的发生意味着红球排在第 k 个位置，其余 9 个球排剩余的 9 个位置，即事件 A_k 包含的基本事件数为 $m=9!$，所以 $P(A)=\frac{9!}{10!}=\frac{1}{10}$. 答案与 k 无关，说明抽到红球的概率只与红球所占比率有关，而与第几次抽取无关.

例 1.1.4 共有 k 双不同型号的鞋子，从其中任意取出 $2r$ 只 $(2r\leqslant n)$，求下列事件的概率：

(1) $A=$“没有一双配对”；

(2) $B=$“恰有一双配对”；

(3) $C=$“恰有两双配对”；

(4) $D=$“恰有 r 双配对”.

解 从 k 双鞋中取出 $2r$ 只的所有可能结果为 C_{2k}^{2r} 种，即基本事件总数 $n=C_{2k}^{2r}$.

(1)要取的 $2r$ 只鞋没有一双配对,只需选取 k 双中任意取出 $2r$ 双,再从每双中任取一只,共有 $C_k^{2r}\cdot(C_2^1)^{2r}$ 种取法,事件 A 包含的基本事件数 $m=C_k^{2r}\cdot(C_2^1)^{2r}$,所以

$$P(A)=\frac{C_k^{2r}\cdot(C_2^1)^{2r}}{C_{2k}^{2r}}.$$

(2)要取的 $2r$ 只鞋有 2 只配对,首先从 k 双中任取一双,有 C_k^1 种取法,再从剩下的 $k-1$ 双鞋中任取 $2r-2$ 双并从每双中取出一只,有 $C_{k-1}^{2r-2}\cdot(C_2^1)^{2r-2}$ 种取法,所以

$$P(B)=\frac{C_k^1\cdot C_{k-1}^{2r-2}\cdot(C_2^1)^{2r-2}}{C_{2k}^{2r}}.$$

(3)本题与(2)题类似,所以 $P(C)=\dfrac{C_k^2\cdot C_{k-2}^{2r-4}\cdot(C_2^1)^{2r-4}}{C_{2k}^{2r}}$.

(4)"恰有 r 双配对"意味着取出的 $2r$ 只鞋正好为 r 双,即从 k 双鞋中任取 r 双,有 C_k^r 种取法,所以 $P(D)=\dfrac{C_k^r}{C_{2k}^{2r}}$.

例 1.1.5 设每人生于一年中任意一个月都是等可能的,求下列事件的概率:

(1)$A=$"12 个人的生日在 12 个不同的月份";

(2)$B=$"6 个人的生日恰在两个月中".

解 (1)12 个人出生月份的所有可能有 12^{12} 种,即基本事件总数 $n=12^{12}$. 12 个人的生日在 12 个不同的月份共有 12! 种可能,即事件 A 包含的基本事件数 $m=12!$,所以

$$P(A)=\frac{12!}{12^{12}}\approx 0.000\ 054.$$

(2)6 个人出生月份的所有可能有 12^6 种,即基本事件总数 $n=12^6$.

要使 6 个人的生日恰在两个月中,必须先从 12 个月中任选两个月,共有 C_{12}^2 种选法;然后 6 个人的生日月份在这两个月中选择,但必须减去都在某一个月中的情况,即有 2^6-2 种,因此事件 B 包含的基本事件数 $m=C_{12}^2\cdot(2^6-2)$,所以 $P(B)=\dfrac{C_{12}^2\cdot(2^6-2)}{12^6}\approx 0.001\ 37$.

例 1.1.6 从 $1,2,\cdots,10$ 共 10 个数中任取一数,设每个数以 $\dfrac{1}{10}$ 的概率被取到,取后放回,共取 7 个数,求下列事件的概率:

(1)$A=$"7 个数全不相同";

(2)$B=$"不含 10 与 1";

(3)$C=$"10 恰好出现两次";

(4)$D=$"取到的最大数恰好为 6";

(5)$E=$"取出的 7 个数形成一个严格上升序列".

解 根据题意可知,基本事件总数 $n=10^7$.

(1)取出的 7 个数都不相同,根据排列的定义可知,事件 A 包含的基本事件数 $m=A_{10}^7$,所以

$$P(A)=\frac{A_{10}^7}{10^7}\approx 0.060\ 5.$$

(2)因为取出的 7 个数不含 10 与 1,所以在剩下的 8 个数中有放回地取 7 个数,因此事件 B 包含的基本事件数 $m=8^7$,所以 $P(B)=\dfrac{8^7}{10^7}\approx 0.209\ 7$.

(3)10 出现两次可以是 7 次中的任意两次,有 C_7^2 种选法;在其他 5 次中,每次可以取其余 9 个数中的任意一个,有 9^5 种选法,因此事件 C 包含的基本事件数 $m=C_7^2\cdot 9^5$,所以

$$P(C)=\frac{C_7^2\cdot 9^5}{10^7}\approx 0.124.$$

(4)从 1,2,…,10 这 10 个数中取 7 个数,其中最大数不大于 6 的取法有 6^7,最大数不大于 5 的取法有 5^7 种,因此,事件 D 包含的基本事件数 $m=6^7-5^7$,所以 $P(D)=\dfrac{6^7-5^7}{10^7}\approx 0.020\,2$.

(5)若取出的 7 个数形成一个严格上升序列,则 7 个数必然完全不相同,7 个不同号码有 7! 种不同排列,其中只有一个是按严格上升次序的排列,也就是说,一种组合对应一种严格上升排列,因此事件 E 包含的基本事件数 $m=C_{10}^7$,所以 $P(E)=\dfrac{C_{10}^7}{10^7}\approx 0.000\,012$.

例 1.1.7 电梯从第 1 层到第 14 层,一开始电梯里面有 10 名乘客,每位乘客都可能在 2～14 楼下电梯,求下列事件的概率:

(1)A="10 人在同一层下";

(2)B="10 人不在同一层下";

(3)C="10 人都在第 2 层下";

(4)D="10 人中有 4 人在第 10 层下".

解 10 名乘客中的任意一名乘客都等可能在 2～14 层的 13 层楼中任选一楼下电梯,因此基本事件总数 $n=13^{10}$.

(1)10 个人在同一层楼下电梯有 13 种可能,即事件 A 包含的基本事件数 $m=13$,所以

$$P(A)=\frac{13}{13^{10}}=13^{-9}.$$

(2)10 个人不在同一层下,意味着第 1 人在 13 层中任选一层下,第二个人在余下的 12 层中任选一层下,…,第 10 人在余下的 4 层中任选一层下,因此事件 B 包含的基本事件 $m=13\times 12\times 11\times\cdots\times 4$,所以 $P(B)=\dfrac{13\times 12\times\cdots\times 4}{13^{10}}$.

(3)作法类似于(1)题,所以 $P(C)=\dfrac{1}{13^{10}}$.

(4)10 个人中有 4 人在第 10 层下,意味着先从 10 个人中任选 4 个人在第 10 层下,有 C_{10}^4 种方法;余下 6 人等可能地在余下的 12 层中任选一层下,有 12^6 种方法,因此事件 D 包含的基本事件数 $m=2C_{10}^4\cdot 12^6$,所以 $P(D)=\dfrac{C_{10}^4\cdot 12^6}{13^{10}}$.

例 1.1.8 20 名运动员中有 2 名种子选手,现将运动员平均分成两组,求下列事件的概率:

(1)A="两名种子选手分在不同组";

(2)B="两名种子选手分在同一组".

解 将 20 名运动员平均分成两组,基本事件总数 $n=C_{20}^{10}$.

(1)事件 A 包含的基本事件数 $m=C_2^1\cdot C_{18}^9\cdot C_{10}^{10}=2C_{18}^9$,其中 C_2^1 表示两名种子选手中有一名在此组,剩下的 9 名选手从 18 名非种子选手中选,为 C_{18}^9,剩下 10 名选手组成另一组,为

C_{10}^{10}.所以 $P(A)=\dfrac{C_2^1\cdot C_{18}^9\cdot C_{10}^{10}}{C_{20}^{10}}\approx 0.526$.

(2)两名种子选手在同一组,则该组在余下 18 名选手中选 8 名进行组合,但因为有两组,因此事件 B 包含的基本事件数 $m=2C_{18}^8$,所以 $P(B)=\dfrac{2C_{18}^8}{C_{20}^{10}}\approx 0.474$.

例 1.1.9 袋中有 $1,2,\cdots,N$ 号球各一个,采用(1)无放回;(2)有放回两种方式摸球,求在第 k 次摸球时首次摸到 1 号球的概率.

解 设事件 A_k="第 k 次摸球时首次摸到 1 号球".

(1)无放回摸球时.从 N 个球中任取 k 个球的每个排列就是一个基本事件,则基本事件总数 $n=A_N^k$.事件 A_k 可分成两步完成:首先在第 k 个位置上排上一号球,有一种排法,然后在前 $k-1$ 个位置上排上其他 $N-1$ 个球,有 A_{n-1}^{k-1} 种排法,由乘法原理事件 A_k 包含的基本事件数 $m=1\times A_{n-1}^{k-1}$,所以
$$P(A_k)=\frac{A_{n-1}^{k-1}}{A_N^k}=\frac{1}{N}.$$

(2)有放回摸球时.基本事件总数 $n=N^k$,事件 A_k 可分为两步完成:首先前 $k-1$ 次未摸到 1 号球,有 $(N-1)^{k-1}$ 种可能,然后第 k 次摸到 1 号球有一种可能,由乘法原理事件 A_k 包含的基本事件数 $m=(N-1)^{k-1}\times 1$,所以 $P(A_k)=\dfrac{(N-1)^{k-1}}{N^k}$.

例 1.1.10 从一副扑克牌中(共 52 张)一张一张地取牌,求下列事件的概率:

(1)A="第 r 次取牌时,第 1 次取出 A 牌";

(2)B="第 r 次取牌时,第 2 次取出 A 牌";

(3)C="第 r 次取牌时,第 3 次取出 A 牌";

(4)D="第 r 次取牌时,第 4 次取出 A 牌".

解 从 52 张牌中无放回地取出 r 张牌的所有可能结果有 A_{52}^r 种,即基本事件总数 $n=A_{52}^r$.

(1)事件 A 表明前 $r-1$ 次取牌均未取出 A 牌,有 A_{48}^{r-1} 种可能;第 r 次取出 A 牌,有 C_4^1 种可能,因此,事件 A 包含的基本事件数 $m=A_{48}^{r-1}\cdot C_4^1$,所以 $P(A)=\dfrac{A_{48}^{r-1}\cdot C_4^1}{A_{52}^r}=\dfrac{4A_{48}^{r-1}}{A_{52}^r}$.

(2)事件 B 表明前 $r-1$ 次取牌恰有 1 次取出 A 牌,有 $C_4^1\cdot C_{r-1}^1\cdot A_{48}^{r-2}$ 种可能,第 r 次取牌时第 2 次取出 A 牌,有 C_3^1 种可能,因此,事件 B 包含的基本事件数 $m=C_4^1\cdot C_{r-1}^1\cdot A_{48}^{r-2}\cdot C_3^1$,所以
$$P(B)=\frac{C_4^1\cdot C_{r-1}^1\cdot A_{48}^{r-2}\cdot C_3^1}{A_{52}^r}=\frac{12(r-1)A_{48}^{r-2}}{A_{52}^r}.$$

(3)事件 C 表明前 $r-1$ 次取牌中取出 2 张 A 牌与 $r-3$ 张非 A 牌,再将这 $r-1$ 张牌进行排位置,共有 $C_4^2\cdot C_{48}^{r-3}\cdot P_{r-1}$ 种排法,第 r 次取牌时第 3 次取出 A 牌,有 C_2^1 种可能,因此事件 C 包含的基本事件数 $m=C_4^2\cdot C_{48}^{r-3}\cdot P_{r-1}\cdot C_2^1$,所以
$$P(C)=\frac{C_4^2\cdot C_{48}^{r-3}\cdot P_{r-1}\cdot C_2^1}{A_{52}^r}=\frac{12(r-1)!\ C_{48}^{r-3}}{A_{52}^r}.$$

(4)本题与(3)类似,所以 $P(D)=\frac{4(r-1)!\ C_{48}^{r-4}}{A_{52}^{r}}$.

同步练习 1.1

1.10 件产品中有次品 3 件,从这 10 件产品中一件一件地无放回地任意取出 4 件,求 4 件中恰有 1 件次品的概率.

2.从 5 双不同颜色的袜子中取 4 只,求 4 只袜子中至少有 2 只配成一双的概率.

3.任意将 10 本书放在书架上,其中有两套书,一套 3 卷,一套 4 卷,求下列事件的概率.

A =“3 卷一套的放在一起”;

B =“两套各自放在一起”.

4.袋内放有两个 5 分的钱币,三个 2 分的钱币,五个 1 分的钱币,任取 5 个,求总数超过一角的概率.

5.10 个人分别佩戴从 1 号到 10 号的胸卡,任选 3 人记录其胸卡的号码,求最小号码为 5 的概率.

6.掷三颗骰子,求所得点数能构成等差数列的概率.

7.从 0~9 共 10 个数中每次任取一个数,求:

(1)无放回地取两个数,恰为相邻数的概率.

(2)有放回地取两个数,恰为相邻数的概率.

8.从一副扑克牌(52 张)中任取 5 张,求下列事件的概率:

A =“5 张牌恰为同一花色”;

B =“3 张牌点数相同,另两张是相同的另一点数”;

C =“5 张牌中有两个不同的对”.

9.袋中有编号为 1~5 的 5 个球,从袋中有放回地取 3 个球,求下列事件的概率:

A =“取出的 3 个球的次序是 1、2、3”;

B =“3 个球恰好是 1、2、3”;

C =“3 个球恰好不同”.

10.田径场上有 7 条跑道,其中有 3 条好跑道,7 名运动员抽签决定自己的跑道,运动员甲最先抽,乙随后抽.问甲、乙两名运动员抽到好跑道的概率是否相等?并证明你的结论.

同步练习 1.1 参考答案

1.$\frac{C_4^1\cdot A_7^3\cdot A_3^1}{A_{10}^4}=\frac{1}{2}$.2.$\frac{C_5^1\cdot C_4^2\cdot C_2^1\cdot C_2^1+C_5^2}{C_{10}^4}=\frac{13}{21}$.3.$P(A)=\frac{8!\ \cdot 3!}{10!}=\frac{1}{15}$,$P(B)=\frac{5!\ \cdot 4!\ \cdot 3!}{10!}=\frac{1}{210}$.4.$\frac{126}{C_{10}^5}=\frac{1}{2}$.5.$\frac{10}{120}=\frac{1}{12}$.6.$\frac{6\times 3!}{6^3}=\frac{1}{6}$.7.$\frac{9C_2^1}{C_{10}^1\cdot C_9^1}=\frac{1}{5}$,$\frac{9C_2^1}{C_{10}^1\cdot C_{10}^1}=\frac{9}{50}$.8.$P(A)=\frac{C_4^1\cdot C_{13}^5}{C_{52}^5}=\frac{33}{166\ 600}$,$P(B)=\frac{C_{13}^1\cdot C_4^3\cdot C_{12}^1\cdot C_4^2}{C_{52}^5}=\frac{6}{4\ 165}$,$P(C)=\frac{C_{13}^2\cdot C_4^2\cdot C_4^2\cdot C_{44}^1}{C_{52}^5}=\frac{198}{4\ 165}$.9.$P(A)=\frac{1}{5^3}$,$P(B)=\frac{6}{5^3}$,$P(C)=\frac{A_5^3}{5^3}=\frac{60}{5^3}$.10.相等.因为甲、乙两名运动员抽到好跑道的概率都是$\frac{3}{7}$.

1.2 事件的运算及概率的加法公式

1.2.1 知识要点

1.事件间的关系

关系	符号	概率论	集合论
包含关系	$A\subset B$	如果事件 A 发生了,则事件 B 必发生	集合 A 是集合 B 的子集
相等关系	$A=B$	事件 A 与事件 B 相等	集合 A 与集合 B 相等
对立关系	$\bar{A}$	事件 A 的对立事件	集合 A 的余集
互不相容	$AB=\varnothing$	事件 A 与事件 B 不能同时发生	集合 A 与集合 B 没有公共元素

2.事件间的运算

运算	符号	概率论	集合论
和	$A+B$(或 $A\cup B$)	事件 A 与事件 B 至少有一个发生	集合 A 与集合 B 的并集
积	AB	事件 A 与事件 B 同时发生	集合 A 与集合 B 的交集
差	$A-B$	事件 A 发生而事件 B 不发生	集合 A 与集合 B 的差集

3.事件的运算律

交换律 $A+B=B+A;AB=BA$.

结合律 $(A+B)+C=A+(B+C);(AB)C=A(BC)$.

分配律 $A+BC=(A+B)(A+C);A(B+C)=AB+AC$.

对偶律 $\overline{A+B}=\bar{A}\bar{B};\overline{AB}=\bar{A}+\bar{B}$.

4.事件的性质

$A+A=A,\quad A+\bar{A}=\Omega,\quad A+\varnothing=A,\quad A+\Omega=\Omega,$

$AA=A,\quad A\varnothing=\varnothing,\quad A\bar{A}=\varnothing,\quad A\Omega=A,$

$\overline{(\bar{A})}=A,\quad A-B=A\bar{B},\quad \bar{A}=\Omega-A.$

5.概率的加法公式

(1)若 $AB=\varnothing$,则 $P(A+B)=P(A)+P(B)$,

特别地,$P(A)=1-P(\bar{A})$.

(2)若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的事件,则

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)\text{(概率的有限可加性)}.$$

(3)若 A,B 是两个任意事件,则 $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

(4)若 A,B,C 是三个任意事件,则

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC).$$

(5)若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是一事件列,且两两互不相容,则

$$P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$（概率的完全可加性）.

1.2.2 典型题型解析

1. 随机事件间的关系及其运算

例 1.2.1 设袋内有 10 个编号为 1～10 的球，从中任取一个，观察其号码，设 $A=$“取得球的号码是奇数”，$B=$“取得球的号码是偶数”，$C=$“取得球的号码小于 5”，则

(1)$A+B, AB, \bar{C}, \bar{A}\bar{C}, \overline{B+C}, \overline{BC}, A-C$ 各表示什么事件？

(2)事件 AC 与 $\bar{A}\bar{C}$ 是否不相容？是否对立？

解 设 $H_i=$“取得球的号码为 i”$(i=1,2,\cdots,10)$.

(1)$A+B=$“取得球的号码或是奇数或是偶数”，这是必然事件，即 $A+B=\Omega$.

$AB=$“取得球的号码既是奇数又是偶数”，这是不可能事件，即 $AB=\varnothing$.

$\bar{C}=$“取得球的号码大于或等于 5”，即 $C=H_5+H_6+H_7+H_8+H_9+H_{10}$.

$\bar{A}\bar{C}=$“取得球的号码是大于 5 的偶数”，即 $\bar{A}\bar{C}=H_6+H_8+H_{10}$.

$\overline{B+C}=\bar{B}\bar{C}=$“取得球的号码是大于或等于 5 的奇数”，即

$$\overline{B+C}=H_5+H_7+H_9.$$

$\overline{BC}=\bar{B}+\bar{C}=$“取得球的号码是奇数或者大于等于 5”，即 $\overline{BC}=H_1+H_3+H_5+H_6+H_7+H_8+H_9+H_{10}$.

$A-C=A\bar{C}=$“取得球的号码是大于等于 5 的奇数”，即 $A-C=H_5+H_7+H_9$.

(2)$AC=$“取得的球的号码是小于 5 的奇数”，即 $AC=H_1+H_3$，而 $\bar{A}\bar{C}=H_6+H_8+H_{10}$，$(AC)(\bar{A}\bar{C})=\varnothing$，$AC+\bar{A}\bar{C}\neq\Omega$，所以事件 AC 与事件 $\bar{A}\bar{C}$ 互不相容，但不对立.

例 1.2.2 设 A、B、C 为三个事件，用 A、B、C 表示下列事件：

$H_1=$“三个事件中恰有一个发生”；

$H_2=$“三个事件中恰有两个发生”；

$H_3=$“三个事件至少有一个发生”；

$H_4=$“三个事件都不发生”；

$H_5=$“三个事件不多于一个发生”；

$H_6=$“三个事件不多于两个事件发生”.

解 $H_1=A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C$；

$H_2=AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC$；

$$\begin{aligned} H_3 &= A+B+C \\ &= A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC+ABC; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_4 &= \bar{A}\bar{B}\bar{C} \\ &= \overline{A+B+C}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_5 &= \bar{A}\bar{B}\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+\bar{A}B\bar{C}+A\bar{B}\bar{C} \\ &= \overline{AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC+ABC} \\ &= \overline{AB+AC+BC}; \end{aligned}$$

$$H_6=\bar{A}\bar{B}\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+\bar{A}B\bar{C}+A\bar{B}\bar{C}+AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC$$

$=\overline{ABC}$

$=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}.$

例 1.2.3 化简下列各式:

(1)$(A+B)(A+\overline{B})$;

(2)$(A+B)(B+C)$;

(3)$(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)$.

解 (1)$(A+B)(A+\overline{B})=(A+B)A+(A+B)\overline{B}=A+BA+A\overline{B}$

$=A+(BA+\overline{B}A)=A+A(B+\overline{B})=A+A\Omega=A+A=A$;

(2)$(A+B)(B+C)=(A+B)B+(A+B)C=AB+B+AC+BC$

$=(AB+BC)+B+AC=((AB+BC)+B)+AC=B+AC$;

注 $AB+BC\subset B$;

(3)$(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)=A(\overline{A}+B)=A\overline{A}+AB=AB$.

注 此题利用了(1)的结果.

例 1.2.4 设 A、B 是两个事件,证明下列等式:

(1)$A+B=A+B\overline{A}$;

(2)$\overline{A}B+A\overline{B}+\overline{A}\overline{B}=\overline{AB}$;

(3)$(A-B)(B-A)=\overline{AB+\overline{A}\overline{B}}$;

(4)$P(A-B)=P(A)-P(AB)$.

证明 (1)$A+B=(A+B)\Omega=(A+B)(A+\overline{A})=A+B\overline{A}$.

(2)$\overline{A}B+A\overline{B}+\overline{A}\overline{B}=(\overline{A}B+\overline{A}\overline{B})+A\overline{B}=\overline{A}(B+\overline{B})+A\overline{B}$

$=\overline{A}\Omega+A\overline{B}=\overline{A}+A\overline{B}=(\overline{A}+A)(\overline{A}+\overline{B})=\overline{A}+\overline{B}=\overline{AB}$.

(3)$\overline{AB+\overline{A}\overline{B}}=(\overline{AB})(\overline{\overline{A}\overline{B}})=(\overline{A}+\overline{B})(A+B)$

$=(\overline{A}+\overline{B})A+(\overline{A}+\overline{B})B=\overline{A}A+\overline{B}A+\overline{A}B+\overline{B}B$

$=A\overline{B}+B\overline{A}=(A-B)(B-A)$.

(4)因为 $A-B=A\overline{B}$,$A=AB+A\overline{B}$,而 AB 与 $A\overline{B}$ 互不相容,所以

$$P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})=P(AB)+P(A-B),$$

即

$$P(A-B)=P(A)-P(AB).$$

注 特别地,当 $B\subset A$ 时,$AB=B$,则有 $P(A-B)=P(A)-P(B)$.

2. 利用概率的加法公式计算随机事件的概率

例 1.2.5 某城市的电话号码由 7 位数组成(第一位数不为 0),求下列事件的概率:

(1)A=“电话号码中不含 0 或 9”;

(2)B=“电话号码中含 0 但不含 9”.

(1)**解法 1** 利用古典概型公式计算.

基本事件总数 $n=9\times10^6$,事件 A 包含的基本事件数 $m=9^7+8\times9^6-8^7$,所以

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{9^7+8\times9^6-8^7}{9\times10^6}=0.77.$$

解法 2 利用加法公式计算.

设 H_1=“电话号码中不含 0”,H_2=“电话号码中不含 9”,而