KEXUE MINGZHU
SHANGXI
SHUXUE JUAN

# 科学名著赏析

# 数学卷

王青建 主编

面对科学群碑，我们不是要去仰视、去感叹，而是要进入最高智慧的创生场景，探窥科学大师的非凡心智，体味科学创造的原始过程，在智识灯塔的照耀下不断前进。赏析科学名著就是与大师对话，与经典对话，与智慧对话。

山西科学技术出版社

KEXUE MINGZHU SHANGXI SHUXUE JUAN

# 科学名著赏析

# 数学卷

王青建 主编

山西科学技术出版社

**图书在版编目（CIP）数据**

科学名著赏析·数学卷/王青建主编. —太原:山西科学技术出版社,2006.6

ISBN 7-5377-2628-0

Ⅰ.科... Ⅱ.王... Ⅲ.①自然科学—著作—简介—世界②数学—著作—简介—世界 Ⅳ.①N49②01

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 146060 号

**科学名著赏析·数学卷**

| | |
|---|---|
| 主　　编 | 王青建 |
| 责任编辑 | 杜湘萍 |
| 助理编辑 | 李　华 |
| 出版发行 | 山西科学技术出版社 |
| 社　　址 | 太原市建设南路 21 号 |
| 邮　　编 | 030012 |
| 经　　销 | 新华书店 |
| 印　　刷 | 山西省建筑科学研究所印刷厂 |
| 版　　次 | 2006 年 6 月太原第 1 版 |
| | 2006 年 6 月太原第 1 次印刷 |
| 开　　本 | 850×1168　1/32 |
| 印　　张 | 10.125 |
| 字　　数 | 272 千字 |
| 书　　号 | ISBN 7-5377-2628-0/G·172 |
| 定　　价 | 18.00 元 |

# 《科学名著赏析》丛书编委会

# 《科学名著赏析·数学卷》编委会

**主　编：** 王青建

**编　委：**（按姓氏笔画排列）

王青建　孙宏安　张新立　林立军

# 目　录

CONTENTS



《几何原本》是一本世界名著，在各国流传之广、影响之大，仅次于基督教的《圣经》。它开辟了一条数学公理化的正确道路，对整个数学发展的影响超过了历史上任何一部著作。



《阿基米德全集》收集了已发现的阿基米德著作，它对于了解古希腊数学，研究古希腊数学思想以及整个科技史都是十分宝贵的。

CONTENTS

《无穷分析引论》是欧拉划时代的代表作之一，也是数学名著之一，在数学史上占有十分重要的地位。它包含了近100年来分析学中大量新的创造成果，并用纯粹形式的推理研究函数，为分析学的严格化开辟了正确的道路。同时，该著作也展示了欧拉作为大数学家从事分析基础知识写作的“风采”。



《热的解析理论》是傅立叶对数学和物理学贡献的代表作，实际上它也写进了傅立叶一生几乎所有有关数学和物理学方面的工作。尤为重要的是，它是记载“傅立叶级数”与“傅立叶积分”诞生过程的一篇历史文献，影响了整个19世纪分析严格化的进程，因而被公认为数学的经典著作之一。



《思维规律研究》是数学史、逻辑史和计算机史上的一部名著，是符号逻辑代数的奠基作，是现代意义上的符号逻辑开端的标志。随着计算机科学的迅速普及，该书对所有数学分支的影响正日益扩大。

CONTENTS

CONTENTS

# 《几何原本》赏析

## 【引言】

欧几里得《几何原本》是一本世界名著，在各国流传很广、影响很大，仅次于基督教的《圣经》。该著作开辟了一条数学公理化的正确道路，对整个数学发展的影响超过了历史上任何一部著作。

## 【作者简介】

《几何原本》的作者是古希腊数学家欧几里得(Euclid，活动于公元前 300 年前后)。由于史料缺乏，作者生平不详。据零星史料记载，他是托勒密一世(公元前 323—公元前 285 年在位)时代的人，早年求学于雅典，深知柏拉图学说。公元前 300 年左右，他活跃于古希腊文化中心亚历山大，是希腊数学繁荣时期亚历山大学派的代表人物之一。

有关欧几里得的轶闻流传很广，其中较为重要的有两个。一个记载于古希腊学者普罗克洛斯(Proclus，公元 410—485 年)的《几何学发展概要》一书中：托勒密王问欧几里得，除了他的《几何原本》之外，还有没有其他学习几何的捷径。欧几里得回答道："几何无王者之道"，意思是在几何学里，没有专为国王铺设的大道。

这句话后来推广为"求知无坦途",成为千古传诵的箴言。古希腊学者斯托比亚斯(Stobaeus,约500年)记载了另一个故事:一个学生刚开始学习《几何原本》的第一个命题时就问欧几里德,学了几何学之后将得到什么,欧几里得说:"给他三个钱币,因为他想在学习中获取实利"。由此可知,欧几里得主张学习必须循序渐进、刻苦钻研,不赞成投机取巧的作风,也反对狭隘实用的观点。

欧几里得

欧几里得以其所著的《几何原本》而闻名于世,他的名字在20世纪以前一直是"几何学"的同义词。《几何原本》是一部划时代的著作,其伟大的历史意义在于它是用公理方法建立起演绎体系的最早典范。在欧几里得之前,积累下来的数学知识是零碎的、片断的,可以被比作是木石和砖瓦。只有借助于逻辑方法把这些知识组织起来,并加以分类、比较,来揭露彼此之间的内在联系,最后将其整理在一个严密的系统中才能建成巍峨的大厦。《几何原本》完成了这一艰巨的工作,对整个数学的发展产生了深远的影响。

欧几里得还有其他几部著作,但流传下来的不多。《已知数》(The data)是除了《几何原本》以外唯一保存下来的一部希腊文几何著作,它包含94个命题,内容与《几何原本》卷1~6相仿。全篇的中心内容是指出图形内的某些元素若为已知,则另外的元素也是已知的。《图形的分割》(On divisions of figures)是另一本几何著作,但不是希腊文本,现仅存两种阿拉伯文本。全书共36个命题,主要讨论作直线将已知图形分为相等的两部分、分成比例的部分或分成满足某种条件的图形。《圆锥曲线》(Conics)四卷已失传,它是后来阿波罗尼奥斯《圆锥曲线论》(八卷)的基础。此外,欧几里得还写过音乐、光学和力学方面的书,是一位博学多才的数学家。

欧几里得一方面总结和完善了几何学,奠定了公理化的思想

基础；另一方面注意到数学在天文学、物理学中的应用，开辟了数学研究的新领域。他还提出一些启发后人的新问题，如希腊人对二次曲线的研究就是以他的工作为基础发展起来的。他提出的有些问题涉及到高等几何的某些基础知识，为这些领域的发展起了引导作用①。

**【写作背景】**

《几何原本》的出现并不偶然，在它之前已有许多希腊数学学者做了大量的前驱工作。

泰勒斯（Thales of Miletus，约公元前 625—公元前 547 年）是希腊第一个哲学学派——伊奥尼亚学派的创建者，也是希腊最早留名于世的数学家和天文学家，被尊称为“希腊七贤之首”。他力图摆脱宗教，从自然现象中寻找真理，对一切科学问题不仅回答“怎么样”，还要回答“为什么这样”。他在数学上划时代的贡献是开始引入命题证明的思想，因而被认为是希腊几何学的先驱。泰勒斯发现的命题有：①圆的直径将圆平分；②等腰三角形两底角相等；③两条直线相交，对顶角相等；④有两角夹一边分别相等的两个三角形全等；⑤对半圆的圆周角是直角。泰勒斯已证明或试图证明的这些命题，使数学从具体的、实验的阶段开始向抽象的、理论的阶段过渡，是数学史上的一大创举。

公元前 6 世纪出现毕达哥拉斯学派。毕达哥拉斯（Pythagoras，约公元前 560—约公元前 480 年）曾游历埃及、巴比伦等地，学习数学、天文学知识。大约在公元前 520 年，他移居西西里岛，最后定居克罗托内（Crotone，位于意大利半岛的南端）。在那里他广收门徒，建立了一个宗教、政治、学术合一的团体，人称“毕达哥拉斯学派”。其最大的特点是宣称宇宙万物的主宰者（相当于上帝）是用数来统御宇宙的，认为万物包含数、万物皆为数。他们将数学从具体的事物中抽象出来，建立起自己的理论体系，并由此取得了许多数学成果。例如，发现了“勾股定理”，因此西方称这一定理为

---

① 吴文俊．世界著名科学家传记·数学家Ⅱ．北京：科学出版社，1992．93～122

“毕达哥拉斯定理”。该学派除证明了这一定理外，还发现了用三个整数表示直角三角形边长的一种公式：$2n+1, 2n^2+2n, 2n^2+2n+1$，现在叫做“毕达哥拉斯数组”；发现了不可通约量或无理量，通常的例子是单位正方形的对角线或正五角星相交线段之间的关系，由此扩展了数系；发现了完全数，即等于除它本身以外的全部因子之和的数（如6，28等）；发现了亲和数，即两个各自真因子之和等于对方的数（如220与284等）；发现了5种正多面体，并懂得了正五边形的作图法。这些后来都成为欧几里得《几何原本》中的重要内容。该学派的另一特点是注意数与形的结合，讨论了形数（三角形数、五边形数等）的性质，利用简单整数比原理创立了一套音乐理论等等，将算术与几何紧密结合起来，为《几何原本》算术的几何化提供了线索。该学派还将学问分为四部分：①数的绝对理论——算术；②数的应用——音乐；③静止的量——几何；④运动的量——天文。这种分类方法一直影响到中世纪末期。

欧几里得教学画像

智人学派亦称诡辩学派，大约在公元前5世纪活动于雅典一带，以教授修辞、辩术、文法、逻辑、数学等知识为职，常出入群众集会，发表应时演说。智人学派的数学研究主要是所谓几何三大作图问题：①三等分任意角；②倍立方体，即作一个立方体使其体积是一已知立方体体积的两倍；③化圆为方，即作一正方形使其面积等于一已知圆的面积。问题的难点在于，作图时只许使用没有刻度的直尺和圆规。后人证明了这三个问题都是尺规作图不可能的问题，但历史上对它们的研究却发展起许多新的数学方法和理论，如圆锥曲线论，三、四次代数曲线，割圆曲线等等。其中，割圆曲线是由该学派成员西皮亚斯（Hippias of Elis，公元前400年）创设的，目的是用它来三等分任意角。该学派的另一成员安蒂丰（Antiphon，约公元前480—公元前411年）在研究“化圆为方”问题时提出了一种“穷竭法”，即通过将圆内接正多边形边数不断加倍的

方法来使多边形与圆相结合。该方法既是阿基米德割圆术的先导,也是近代极限论的雏形。以智人学派为代表的希腊人的兴趣并不在于图形的实际作出,而是在尺规的限制下从理论上去解决这些问题。这是几何学从实际应用向演绎体系靠拢的又一步。《几何原本》是用公设的形式规定了几何作图的尺规限制,后来它便成为希腊几何的金科玉律。

埃利亚学派的代表人物是芝诺(Zeno of Elea,约公元前 490—约公元前 425 年),他以提出"芝诺悖论"而著称,并因此在数学和哲学上都享有盛誉。据说他的悖论多达 40 个,其中有关运动的四个悖论尤为著名,记载于亚里士多德的《物理学》中。这四个悖论是二分说、阿基里斯说、飞箭静止说和运动场悖论。这些悖论涉及间断与连续、有限与无限等问题,它们迫使哲学家和数学家深入思考无穷的问题。由于当时并没有解决这些悖论提出的问题,因而《几何原本》实际上回避了这一矛盾,没有使用"无穷"、"无限"等说法。

公元前 5 世纪至公元前 4 世纪,古希腊雅典建立了"雅典学派"。该学派的主要成员及其思想集中在柏拉图科学院和亚里士多德的吕园这两个科学机关,因此常分别被称为"柏拉图学派"和"亚里士多德学派"。柏拉图(Plato,公元前 427—公元前 347 年)是希腊大哲学家苏格拉底的学生,他深受苏格拉底逻辑思想的影响。大约在公元前 387 年,他在雅典创办了一所学院,很像现代的私立大学。该学院重视数学教育,所教课程包括算术、平面几何、立体几何、天文学和谐音学。传说该学院门口刻着"不懂几何者不得入内"的铭文。柏拉图坚持准确的定义、清楚的假设和严格的推理,重视数学的作用,促进了数学的科学化。柏拉图的学生有许多是数学家,其中有两位著名学者:一位是欧多克索斯(Eudoxus of

1482 年《几何原本》最早的印刷本首页

Cnidus,约公元前 400—约公元前 347 年),他在数学上创立了“比例论”和“穷竭法”,深入研究了“中末比”问题,还最早得到“阿基米德公理”,证明了近代极限论的某些命题,其理论对欧几里得公理体系的形成颇有帮助;另一位就是亚里士多德(Aristotel,公元前 384—公元前 322 年),他于公元前 367 年进入柏拉图学院学习,师事柏拉图 20 余年,后因与其继任者的哲学观点不同而离开该学院。大约在公元前 335 年,亚里士多德在雅典吕克昂阿波罗神庙附近成立了自己的学园,形成“亚里士多德学派”或称“吕园学派”。因他常与学生散步讨论问题,又被称为“逍遥学派”。亚里士多德是形式逻辑的奠基人,他讨论过数学的一些基本原理,并给出点、线、面的定义。他将公理和公设加以区别,尝试由数学推导出逻辑学,这一尝试影响深远。

到了公元前 4 世纪,希腊几何学已积累了大量的知识,逻辑理论也日趋成熟,由来已久的公理化思想更是得以迅猛发展。从事建造大厦工作的并不是个别学者,在欧几里得之前已有很多数学家做过综合整理工作,但经得起历史考验的只有欧几里得的《几何原本》。

**【内容大意】**

《几何原本》因版本众多而内容略有差异,有的是 13 卷,有的是 15 卷。现以 1990 年 13 卷的新汉语译本中的内容作一简介。这 13 卷是欧几里得的原著,它共包含 465 个命题:1~4 卷是平面几何,5~6 卷是比例论,7~9 卷是数论,10 卷讨论无理量,11~13 卷是立体几何。后来希腊数学家许普西克勒斯(Hypsicles of Alexandria,活动于公元前 175 年)和大马士革乌斯(Damascius of Damascus,约公元 458—约公元 533 年)分别添加了一卷,成为了现在的 15 卷。我国于 1607 年译出了《几何原本》的前 6 卷,于 1857 年译出其后 9 卷。

第 I 卷首先给出了关于几何基本元素的 23 个定义,如定义 1“点是没有部分的”,定义 2“线只有长而没有宽”,等等;还有平面、直角、垂直、钝角、锐角、圆、平行线等定义。定义之后是 5 个公设

和 5 个公理,例如“凡直角都相等”(公设 4),“整体大于部分”(公理 5),等等。在《几何原本》中,公设主要是关于几何的基本规定,而公理是关于量的基本规定,现代数学一律把它们称为“公理”。其中引起人们较大争议的是公设 5,它又被称作“欧几里得平行公设”:同平面内一条直线和另外两条直线相交,若在某一侧的两个内角的和小于二直角,则这二直线经无限延长后在这一侧相交。对它的深入研究导致了 19 世纪非欧几何学的建立。

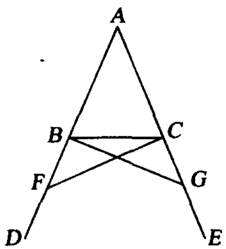
公理之后给出了 48 个命题。前 4 个命题是:

1. 在已知线段上作一个等边三角形。

2. 以已知点为端点,作一线段与已知线段相等。

3. 已知两条不相等的线段,求在大线段上截取一线段与小线段相等。

4. 如果两个三角形两边与夹角对应相等,则这两个三角形相等(指全等)。




命题 5 涉及等腰三角形的性质:等腰三角形两底角相等,则两底角的外角也相等。由于《几何原本》的证明规则是循序渐进的,后面的命题只能用公理、公设和前面已经证明为真的命题来证,因此该命题的证明稍微麻烦些。

在中世纪,该命题被称为“笨蛋的难关”。因为当时欧洲数学水平很低,学生初读《几何原本》时只要图形中的线和角一多就难以理解,故而得名。另外,按其形状又把该命题称为“驴桥”。

该卷后面的命题包括三角形、垂直、平行、直线形相等等关系,其中的相等主要指拼补相等,方法采用了“面积贴合”,如将一个平行四边形贴合到某一线段(该平行四边形的一条边)上。

命题 47 是著名的“勾股定理”:在直角三角形斜边上的正方形等于直角边上的两个正方形。这里的相等仍然指拼补相等,不涉及长度和数的关系。

第Ⅱ卷包括 14 个命题,用几何形式叙述代数问题,即所谓的

“几何代数学”。其中，一个数(或量)用一条线段表示；两个数的乘积说成是两条线段所构成的矩形；数的平方根说成是等于这个数的正方形的一边，等等。

命题1：设有两线段，其中之一被截成若干部分，则此两线段所构成的矩形等于各个部分与未截线段所构成的矩形之和，相当于恒等式 $a(b+c+d+\cdots)=ab+ac+ad+\cdots$。

命题4：将一线段任意分成两部分，在整个线段上的正方形等于在部分线段上的两个正方形加上这两部分线段所构成的矩形的二倍，相当于 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$。

命题5、命题6相当于一元二次方程的解法，但也完全是用几何形式叙述的。

命题11：分已知线段为两部分，使它与一小线段所构成的矩形等于另一小线段上的正方形。这就是将线段分成“中末比”，后来叫“黄金分割”的著名问题。《几何原本》后面将多次用到这一分割方法。

命题12、命题13是三角学中的“余弦定理”，也是用几何的语言叙述的，没有出现三角函数。

第Ⅲ卷有37个命题，论述圆、弦、切线、圆周角、圆内接四边形及其他有关圆的图形等，如命题35是“相交弦定理”，命题36是“圆幂定理”等。

第Ⅳ卷有16个命题，包括圆内接与外切三角形、正方形的研究，圆内接正多边形的作图，如命题11和命题12分别是圆内接和外切正五边形的作图，命题16是圆内接正15边形的作图。

第Ⅴ卷有25个命题，阐述比例理论，后世评论家认为这是《几何原本》中最大的成就。毕达哥拉斯学派过去也建立了比例论，不过只适用于可公度量(相当于有理数)，但《几何原本》已突破了这一限制。该卷首先给出18个定义，如在定义4“如果一个量加大若干倍后可以大于另一个量，则说这两个量有一个比”中已经没有了可公度量的限制；定义5“设有 $A$、$B$、$C$、$D$ 四个量，$A$ 与 $B$、$C$ 与 $D$ 分别乘以相同的倍数 $m$、$n$。如果由 $mA$ 大于、等于或小于 $nB$ 可推出 $mC$ 大于、等于或小于 $nD$，则说两个比 $A/B$ 与 $C/D$ 相