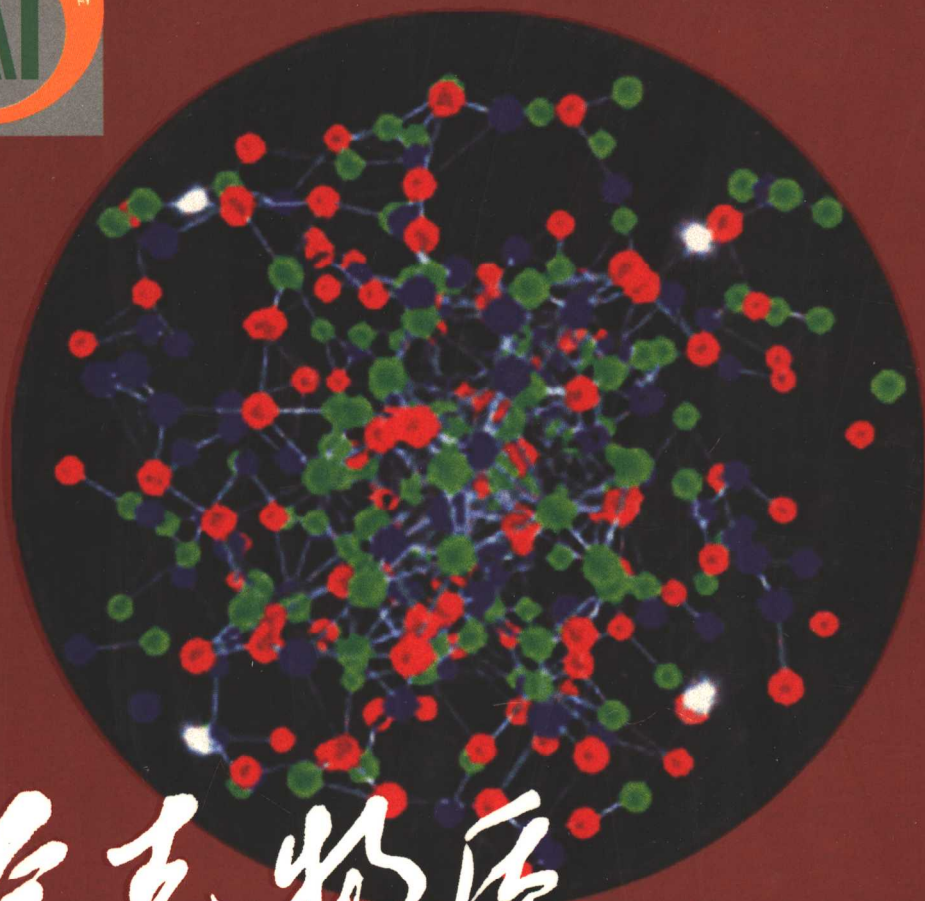




夸克物质

非线性非阿贝尔 非平衡性质

THE NONLINEAR NON-ABELIAN AND NONEQUILIBRIUM PROPERTIES OF QUARK MATTER

李家荣 著

湖北长江出版集团

湖北科学技术出版社

国家科学技术学术著作出版基金资助出版
国家“十五”重点图书规划项目

夸克物质

非线性非阿贝尔
非平衡性质

THE NONLINEAR NON-ABELIAN AND NONEQUILIBRIUM PROPERTIES OF QUARK MATTER

李家荣 著

湖北长江出版集团

湖北科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

夸克物质非线性非阿贝尔非平衡性质/李家荣著.
武汉:湖北科学技术出版社,2006.9
ISBN 7-5352-3510-7

I. 夸... II. 李... III. 夸克-研究 IV. 0572.3

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第002830号

夸克物质非线性非阿贝尔非平衡性质

© 李家荣 著

策 划: 李海宁

封面设计: 王 梅

责任编辑: 李海宁 刘辉 刘玲

责任校对: 蒋 静

出版发行: 湖北长江出版集团
湖北科学技术出版社

电话: 87679468

地 址: 武汉市雄楚大街268号湖北出版文化城B座12-13层

邮编: 430070

印 刷: 武汉中远印务有限公司

邮编: 430034

督 印: 刘春尧

787毫米×1092毫米

16开

25.5印张

4插页 455千字

2006年9月第1版

2006年9月第1次印刷

定价: 60.00元

本书如有印装质量问题 可找承印厂更换

内 容 提 要

夸克物质是正在探索中的夸克层次上的新物质形态.本书讨论的是夸克物质处在热力学平衡态和非平衡态的性质,并特别关注来自理论的非线性非阿贝尔的贡献.全书共六章,主要内容为夸克物质理论基础、相结构、集体效应、输运过程以及对外流的响应.在选材上,力求做到既主题集中,又兼顾对基本理论框架的简明概括;既以作者科研成果为基础和主体,又以国际上学科发展主流为纲要.试图做到既为专门研究者提供参考,也为准备步入该领域的读者提供学习调研的导引.讨论夸克物质时,相对照的要讨论核物质,所以书中多处有关于核物质的内容.

前言

夸克物质一般是泛指正在探测中的夸克层次上的物质形态. 由于在物理上能被观测的夸克物质应是色中性的, 即总的正、反色荷相等, 因而又称这种夸克物质是夸克胶子等离子体(Quark - Gluon Plasma), 简称 QGP. 探索夸克物质, 不仅会为人类揭示出一种新物态, 而且对它的深入研究有可能导致物理观念上的突破, 因而夸克物质物理在国际上已成为一个重大研究领域.

夸克物质中成分粒子的动力学基础是量子色动力学(QCD). 虽然其成分粒子可以参加弱电作用和强作用, 但占优势的物性特征是来自强作用, 因而除讨论弱电相变及若干相关的弱电过程外, 人们集中关心的是强作用诱发的物理, 并以 QCD 作为夸克物质的动力学基础. 按照 QCD 耦合常数的跑动性质: 在大动量或小距离, 耦合常数小, 相互作用具有渐近自由性质; 而在小动量或大距离, 耦合常数大, 相互作用具有色禁闭性质. 从而对夸克物质又有弱耦合系统和强耦合系统之分. 对于前者, 理论上可用微扰方法处理, 而对于后者, 则必须采用非微扰方法, 当前这主要是指格点 QCD 的 Monte Carlo 模拟.

夸克物质作为一个多粒子系统, 其理论基础是在夸克层次上的统计物理, 这包括描述其在热力学平衡态的温度场论和描述其在非平衡态的物理动力学. 从动力学观点看, 由于色禁闭, 人们不可能用动力学手段, 例如通过对核子碰撞, 从核子中分离出自由夸克. 但在物理上人们还有热力学手段, 例如相变, 使强子物质相变到夸克物质. 早在 20 世纪 70 年代理论物理学家就预言了这种相变的存在^[1], 并在以后相继做了大量研究, 其结果大都表明在高温高密下会发生从强子物质到夸克物质的相变. 综合理论工作的结果, 人们可以给出如图 0-1 所示的强作用物质相结构的草图(这里没有涉及高密端的色超导相). 粗略地说, 在净重子化学势为零时, 相变的临界温度 T_c 约为 $150 \sim 200 \text{ MeV}$ ($1 \text{ eV} = 1.16 \times 10^4 \text{ K}$), 其中热格点 QCD 的预言是 $T_c \sim 175 \text{ MeV}$. 而对于冷密强作用物质, 相变的临界密度约为 $3 \sim 10 \rho_0$ (ρ_0 为正常核物质密度, 约为 0.125 GeV/fm^3 , 或 $2.2 \times 10^{17} \text{ kg/m}^3$).

夸克物质的实验基础是相对论重离子碰撞. 显然在地球上不存在上述相变的自然环境, 物理学家期望通过相对论重离子碰撞, 把巨大的动能转化为热能和 对系统的压力, 从而提供发生相变所需的高温高密条件. 这种碰撞有两种基本图像, 见图 0-2. 两碰撞核由于罗伦兹收缩而成为两个盘, 在其质心系能量较小的情况 ($\sqrt{s} \ll 100 \text{ AGeV}$), 对撞时彼此阻止, 核被大力压缩和有所加热, 生成高密低

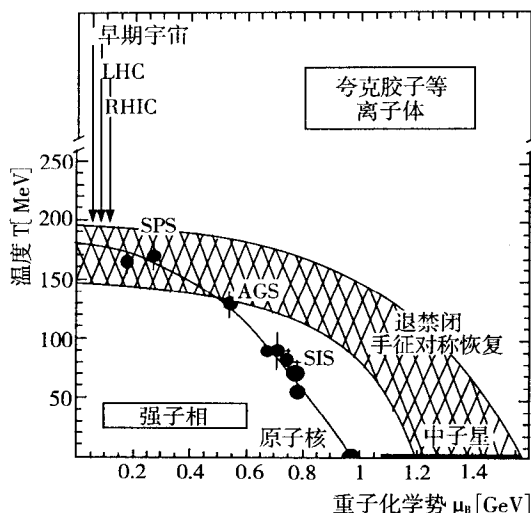


图 0-1 相作用物质相结构草图

图内细线表示理论上最期待的曲线,它周边的网格区是理论不确定区,图中还标出了有关加速器可能达到的临界位置

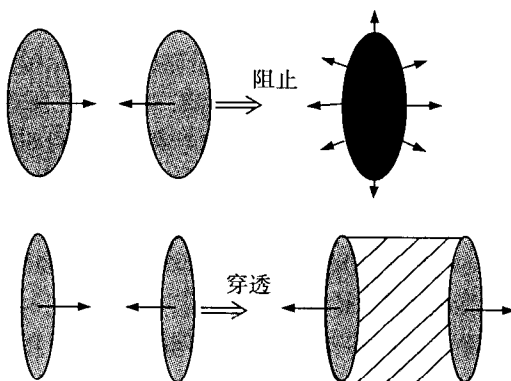


图 0-2 相对论重离子碰撞的两种基本图像

温的火球;在质心系能量很大时($\sqrt{s} \gg 100 \text{ AGeV}$),两对撞核彼此穿透,重子数几乎被领头粒子带走,其间的真空也获得巨大能量,使大量的胶子和夸克-反夸克对凝聚受激,并解除闭禁而形成高温低密的 QGP. 最早是李政道先生提出通过高能重离子碰撞改变真空^[2],研究禁闭解除. 实验上最重要的任务就是通过寻找标识夸克物质的信号而探明在相对论重离子碰撞中是否有夸克物质的生成. 具体的实验是从 1986 年开始的,主要是在美国布鲁克海文实验室(BNL)的加速器

AGS 以及欧洲核子研究中心(CERN)的加速器 SPS 上进行,大量观测分析了 J/ψ 压低,奇异粒子丰度增高以及双轻子和直接光子产生等标识信号,并在 2000 年发出公告,宣称在 SPS 上找到了 QGP 存在的证据^[3]. 同年设在 BNL 的相对论重离子对撞机 RHIC 正式运行,其质心系能量高达 200 AGeV. 特别是在 RHIC 通过观测分析了椭圆流、喷注淬火以及 D + Au 实验. 据此在 2004 年一些著名的专家宣称在 RHIC 观察到了 QGP,而且是一种强耦合的 QGP^[4],而不是早先所预期的弱耦合 QGP. 当然,在目前关于能否断言在实验上已发现了夸克物质,国际学术界尚无一致的结论. 另外,有一种估计,认为在 $T < (2 \sim 4) T_c$ 的情况下,看到的会是强耦合 QGP,而在 $T > (2 \sim 4) T_c$ 的情况下,会出现弱耦合 QGP. 人们期待着在 CERN 建造的质心系能量高达 5500 AGeV 的大型强子对撞机 LHC 于 2007 年运行后会更加有力地推动这个领域的进展.

根据宇宙大爆炸的标准模型,在大爆炸后的若干微秒内,有高温夸克物质存在的条件,以及根据对 neutron star 中心区密度的估计,这里会有高密夸克物质存在的条件. 因而夸克物质的研究也为早期宇宙的演化以及天体物理研究注入了新的活力,同时,人们也期待着能在这些领域内找到夸克物质存在的证据.

由于刘连寿教授的倡导,作者所在的华中师范大学粒子物理研究所从 20 世纪 80 年代初在国内率先步入夸克物质这一研究领域. 到现在夸克物质物理已成为我所的集中研究方向,从实验和理论两方面,在广泛的国际合作背景下从事研究工作. 作者曾于 1989 年,根据当时积累的文献资料,以当时理论上主要关心的退禁闭相变为主题出版了《夸克物质理论导论》一书^[5]. 该书得到了国内同行广泛认可,对帮助有兴趣的读者尽快接触到这一领域前沿起到了一定作用. 现在该书已出版十多年了,夸克物质的理论和实验研究都有了很大的发展,特别是在 SPS 和 RHIC 都先后发出了关于在实验已发现了 QGP 的声音,尽管国际学术界对此尚无一致的断言,但也向世人显示出关于夸克物质研究取得了令人鼓舞的成就,并将进入到一个更深入的阶段. M. Gyulassy 在《RHIC 上发现的 QGP》一文中指出^[4]: QGP 被发现并不意味着对它的物理性质已经理解,事实上它只是一个信号,标志人们将会长期从事的一个研究方向的开始. 正是在这样的背景下,作者总结出版了现在这本书. 这是一本属于夸克物质性质的书,它所关注的是夸克物质作为在夸克层次的多粒子系统,处在热力学平衡态和非平衡态的基础理论和性质. 在撰写中,作者力求做到既主题集中,又兼顾对基本理论框架的简明概括;具体取材既以作者科研成果为基础和主体,又以国际上学科发展主流为纲要. 试图做到既为专门研究者提供参考,也为准备步入该领域的读者提供学习调研的导引. 需要指出的是,本书所论及的 QGP 性质是关于弱耦合 QGP 的,而对于强耦合 QGP 的研究目前尚处于起步艰难阶段. 夸克物质研究的深入需要新的物

理观念,呼唤有更深刻洞察力的新人出现.讨论夸克物质时,相对照的要讨论核物质,所以书中多处有关于核物质的内容.

感谢国家科学技术学术著作出版基金委员会对出版本书的资助.感谢湖北科学技术出版社,特别是编辑李海宁同志为出版本书所作的努力和支持.感谢国家自然科学基金委员会持续对作者提供的项目资助.本书所概括的很多科研成果都是在这些项目资助下取得的,尤其是本书的完成得到了项目 NO.90303007 的支持.感谢我国著名学者刘连寿教授、高崇寿教授、彭宏安教授、赵维勤教授和苏汝铿教授在长期工作中给予的支持和帮助.感谢曾和我合作工作的年轻学者,他们是王恩科、邓胜华、侯德富、张晓飞、郑小平、贾亚、陈继胜、王欣、金猛、舒崧和刘绘,本书总结的很多内容都是他们当年和我共同完成的.感谢庄鹏飞教授和吴元芳教授在工作中给予的友谊支持和帮助.感谢妻子张声蒂女士的精心照料和支持.

夸克物质物理是一个正在快速发展的研究领域.由于作者水平所限,书中的错误和不足之处一定可见,诚望专家、同行和读者批评指正.

李家荣

2006 年 2 月

目 录

前言	(I)
第一章 夸克物质的理论基础	(1)
§ 1.1 温度场论的虚时形式	(1)
§ 1.2 温度场论的实时形式	(15)
1.2.1 热真空态	(15)
1.2.2 热传播子	(21)
1.2.3 热场动力学	(23)
§ 1.3 实时格林函数的 Keldysh 表示	(27)
1.3.1 格林函数的谱函数	(28)
1.3.2 复时间平面上温度格林函数的生成泛函	(29)
1.3.3 Keldysh 表示	(33)
§ 1.4 热力学势和有效势的圈图计算	(36)
1.4.1 热力学势的圈图表示	(36)
1.4.2 有效势	(40)
1.4.3 重整化	(45)
§ 1.5 硬热圈及有效微扰论	(46)
1.5.1 硬热圈自能	(46)
1.5.2 有效微扰论	(51)
§ 1.6 QGP 的动力论基础	(52)
1.6.1 玻尔兹曼动力论	(53)
1.6.2 QGP 的经典动力论方程	(54)
1.6.3 QGP 的量子动力论	(56)
1.6.4 QGP 的半经典动力论	(59)
1.6.5 有效动力论	(60)
§ 1.7 过渡到流体力学描述	(65)
第二章 从核物质到夸克物质相变的模型理论	(74)
§ 2.1 强子动力学模型和平均场方法	(74)
2.1.1 QHD - I 模型	(74)
2.1.2 Walecka 平均场	(76)
2.1.3 相对论 Hartree 近似和 Hartree - Fock 近似	(78)

2.1.4	强子动力学的进一步发展	(83)
§ 2.2	核物质的相结构及其动力学背景	(84)
2.2.1	高温区核子有效质量多解与汽液相变	(84)
2.2.2	低温区的汽液相变与核子有效质量多解	(89)
2.2.3	核子狄拉克海激发对核物质热密性质的影响	(92)
2.2.4	低温和高温区汽液相变的动力学解释	(96)
§ 2.3	核物质研究中的 CJT 计算方法	(103)
2.3.1	CJT 理论基本框架	(104)
2.3.2	在有限温度下 $\lambda\phi^4$ 模型中的 CJT 方法	(106)
2.3.3	CJT 计算方法在 QHD - I 模型中的表述	(108)
§ 2.4	π 物质中的手征相变和玻色凝聚	(118)
2.4.1	线性 σ 模型中的手征对称性和真空自发破缺	(119)
2.4.2	π 物质中手征相变的热力学研究	(122)
2.4.3	π 物质中的玻色凝聚及其与手征相变的关系	(132)
§ 2.5	有限温度下非拓扑孤子模型和退禁闭相变	(136)
2.5.1	非拓扑孤子袋模型	(136)
2.5.2	有限温度和密度下 F - L 模型的有效势	(139)
2.5.3	全温度区的孤子解与退禁闭相变	(146)
2.5.4	高温下真空凝聚的解体	(149)
2.5.5	QGP 形成机制	(150)
	附录 F - L 模型的零温有效势与重整化	(153)
§ 2.6	有限温度和密度下的序参量自治方程和手征相变	(159)
2.6.1	模型	(159)
2.6.2	零温零化学势下的费米子凝聚和自治方程	(160)
2.6.3	有限温度和密度下的费米子凝聚和自治方程	(163)
2.6.4	有限温度和密度下系统的能量密度和比热	(167)
2.6.5	结果和讨论	(172)
	附录 两种等价形式的狄拉克方程	(172)
§ 2.7	有限温度和密度下的手征孤子和手征相变	(174)
2.7.1	手征孤子模型	(174)
2.7.2	有限温度下的手征孤子与手征相变	(175)
2.7.3	手征相变与退禁闭相变的关系	(180)
§ 2.8	高温高密条件下 ρ 介子的谱函数	(180)
2.8.1	工作背景	(180)

2.8.2 热密环境中的 ρ 介子谱函数	(181)
2.8.3 结论	(188)
第三章 有限温度下规范场论的热力学势	(191)
§ 3.1 热力学势的骨架图展开及重整化	(191)
3.1.1 场的热力学势及骨架图	(191)
3.1.2 重整化	(200)
§ 3.2 虚时温度场论中 QED 两圈热力学势	(205)
§ 3.3 实时温度场论中 QED 两圈热力学势	(215)
§ 3.4 基于硬热圈重求和理论的 QGP 热力学势计算	(219)
3.4.1 纯规范场的两圈有效热力学势	(219)
3.4.2 包含费米子的 QGP 有效两圈热力学势	(230)
§ 3.5 有限温度下的重整化群方程和 QCD 耦合常数	(236)
3.5.1 有限温度下的重整化群方程	(236)
3.5.2 QCD 耦合常数随温度的变化	(239)
第四章 QGP 的集体效应	(245)
§ 4.1 导数展开法	(246)
§ 4.2 QGP 中的非线性本征频移	(248)
4.2.1 动力论方程和多时标展开的物理含义	(248)
4.2.2 一级近似和二级近似	(249)
4.2.3 非线性本征频移	(251)
§ 4.3 QGP 中的非线性朗道阻尼	(254)
4.3.1 QGP 动力论方程的多时标展开	(254)
4.3.2 线性近似和三波过程	(256)
4.3.3 非线性朗道阻尼	(259)
§ 4.4 非线性空间阻尼	(266)
§ 4.5 QGP 中的次带头阶德拜屏蔽	(272)
§ 4.6 QGP 中快速粒子衰减率的自治计算	(276)
§ 4.7 QGP 热力学势中的屏蔽和阻尼效应	(280)
第五章 夸克物质中的输运过程	(289)
§ 5.1 在有限密度热 QED 粘滞系数的动力论计算	(289)
5.1.1 计算方法	(289)
5.1.2 切向粘滞系数	(293)
§ 5.2 热密 QED 切向粘滞系数的场论计算	(300)
5.2.1 基本公式	(300)

5.2.2 玻色子的贡献	(302)
5.2.3 费米子的贡献	(307)
5.2.4 结果与讨论	(309)
§ 5.3 非阿贝尔 Kubo 公式	(310)
5.3.1 广义的 Kubo 公式	(310)
5.3.2 从动力论推导非阿贝尔的广义 Kubo 公式	(313)
§ 5.4 色扩散和非线性色导率	(316)
5.4.1 色扩散和色弛豫方程	(316)
5.4.2 非线性色导率	(320)
§ 5.5 高温 QGP 输运系数中的化学势效应	(323)
5.5.1 有限化学势下 QGP 中的色输运问题	(323)
5.5.2 衰减率和化学势效应对 QGP 中切向粘滞系数 的影响	(326)
§ 5.6 奇异夸克物质的体粘滞与奇异星	(330)
5.6.1 一种统计模型	(331)
5.6.2 SQM 的体粘滞系数	(334)
5.6.3 奇异星的极限旋转	(340)
第六章 强作用物质的介电性质和 QGP 对外流的响应	(343)
§ 6.1 核物质的介电函数公式	(343)
§ 6.2 有限密度条件下 $\omega_N N$ 相互作用导致的核物质介电性质	(348)
§ 6.3 由 ρ 介子极化引起的核物质的介电函数	(354)
§ 6.4 核物质介电函数中的混合极化效应	(365)
6.4.1 混合极化对核子极化流的影响	(365)
6.4.2 混合极化对介电函数的影响	(367)
§ 6.5 QGP 的非线性介电性质	(370)
6.5.1 湍动 QGP 的动力论基础	(370)
6.5.2 线性介电函数	(373)
6.5.3 非线性介电函数	(375)
6.5.4 长波极限	(379)
§ 6.6 QGP 介质对外流的响应	(381)
6.6.1 QGP 对外流的响应方程	(381)
6.6.2 湍动加速现象	(385)
参考文献	(391)

第一章 夸克物质的理论基础

夸克物质的理论基础是有限温度规范场论和 QGP 动力论.

有限温度场论是关于场的统计热力学理论.它起始于 20 世纪 50 年代,当时松源等人把正则量子场论中的格林函数方法引入到了统计物理,讨论了非理想的普通玻色子系统和费米子系统的有关热力学问题.不过,当时对有温度场论的理解还是狭义的,主要指的是统计物理中的场论方法,而不是场的热力学.近三十多年来,随着在夸克层次上对基本相互作用动力学研究的深入,暴露出一些基础性的物理问题需要从场的热力学方面进行考察,于是提出了建立场的统计热力学的任务,特别是规范场论的统计热力学.从而发展出作为一门学科的有限温度下的规范场论^[6,7].温度场论按其在时间复平面上编时路径的选择不同分为虚时、实时和闭时三种表述形式;按场量子化方案的不同,又有泛函积分形式和正则形式.

现在的温度场论本质上是描述系统在热力学平衡态的理论,尽管也可以通过 Kubo 公式描述非平衡过程中的输运现象.描述非平衡现象的基础理论是多粒子系统动力论.QGP 动力论是近二十年发展起来的理论.

§ 1.1 温度场论的虚时形式

统计物理讨论的是由大量粒子构成的系统的宏观性质.统计物理的场论方法告诉我们,一个由全同粒子构成的多粒子系统可以看成是一个相应的量子化的场,讨论这个多粒子系统的热力学问题可以归结为讨论相应的量子场的热力学问题.并且根据统计系综理论,只要知道了场的哈密顿,就可给出其配分函数,进而分析其热力学性质.在这一节将介绍几种常见的场的配分函数,给出它们的泛函积分形式.

标量场的配分函数 最简单的场是自由标量场,它用以描述自旋为零的粒子.自由标量场的热力学对应于统计物理中的高斯模型.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi(x) \partial^\mu \varphi(x) - \frac{m^2}{2} \varphi^2(x). \quad (1.1.1)$$

$\varphi(x)$ 是场的正则坐标,相应的正则动量为

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}(x)} = \dot{\varphi}(x), \quad (1.1.2)$$

量子化后, $\varphi(x)$ 和 $\pi(x)$ 成为算符,以大写字母 $\Phi(x)$ 和 $\Pi(x)$ 表示,它们满足等时对易关系

$$\begin{aligned} [\Phi(\mathbf{x}, t), \Phi(\mathbf{x}', t)] &= [\Pi(\mathbf{x}, t), \Pi(\mathbf{x}', t)] = 0, \\ [\Phi(\mathbf{x}, t), \Pi(\mathbf{x}', t)] &= i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

场的哈密顿算符为

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \int d^3 \mathbf{x} \mathcal{H} = \int d^3 \mathbf{x} (\Pi \Phi - \mathcal{L}) \\ &= \frac{1}{2} \int [\Pi^2 + (\nabla \Phi)^2 + m^2 \Phi^2] d^3 \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

知道 $\hat{H}$ 后,立刻可以看出场的正则系综的配分函数

$$\begin{aligned} Z &= \text{tr} e^{-\beta \hat{H}} \\ &= \int d\varphi \langle \varphi | e^{-\beta \hat{H}} | \varphi \rangle. \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

式中, $|\varphi\rangle$ 是在薛定谔绘景中场算符 Φ 的本征态, φ 为相应的本征值,即经典场量.

(1.1.5)式是配分函数的算符形式,本节的主要工作是把它写成泛函积分形式.已经知道,泛函积分可以看成是多元函数积分的连续极限.以下首先把(1.1.5)式写成多元函数的积分形式.为此,采用类似把时空分立化的方法,设想把 β 分成 n 等分,即令

$$\beta = N\epsilon, N = 0, 1, 2, \dots, n.$$

并记 Φ 的本征值相应为 $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ 和要求

$$\varphi_0 = \varphi_n = \varphi, \quad (1.1.6)$$

则(1.1.5)式可写成

$$\begin{aligned} Z &= \int d\varphi \langle \varphi | (e^{-\epsilon \hat{H}})^n | \varphi \rangle = \int d\varphi \langle \varphi | (e^{-\epsilon \hat{H}})^n | \varphi_0 \rangle \\ &= \int d\varphi \prod_{i=1}^{n-1} d\varphi_i \cdot \langle \varphi_n | e^{-\epsilon \hat{H}} | \varphi_{n-1} \rangle \langle \varphi_{n-1} | e^{-\epsilon \hat{H}} | \varphi_{n-2} \rangle \\ &\quad \cdots \langle \varphi_1 | e^{-\epsilon \hat{H}} | \varphi_0 \rangle \\ &= \int \prod_{i=1}^n d\varphi_i \langle \varphi_i | e^{-\epsilon \hat{H}} | \varphi_{i-1} \rangle. \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

这里利用了 Φ 的本征函数系的完备性条件

$$\int d\varphi | \varphi \rangle \langle \varphi | = 1,$$

以及由(1.1.6)式得到的 $d\varphi = d\varphi_n$.

为了进一步把(1.1.7)式写成明显的多元函数积分形式, 需要把矩阵元的算符设法换成相应的经典量. 利用完备性条件

$$\int d\pi |\pi\rangle\langle\pi| = 1,$$

可以有

$$\begin{aligned} & \langle\varphi_i| e^{-\epsilon\hat{H}} |\varphi_{i-1}\rangle \\ &= \int d\pi_i \langle\varphi_i| e^{-\epsilon\hat{H}} |\pi_i\rangle\langle\pi_i| \varphi_{i-1}\rangle \\ &= \int d\pi_i \langle\varphi_i| (1 - \epsilon\hat{H}) |\pi_i\rangle\langle\pi_i| \varphi_{i-1}\rangle. \end{aligned}$$

$\hat{H}$ 的形式已在(1.1.4)式给出, 把它代入上式, 并让其中的 Φ (对于实标量场 $\Phi = \Phi^\dagger$) 从左边作用到 $\langle\varphi_i|$ 上, 而 π 从右边作用到 $|\pi_i\rangle$ 上, 进而利用 Φ 和 π 的本征值方程, 而得到

$$\begin{aligned} & \langle\varphi_i| e^{-\epsilon\hat{H}} |\varphi_{i-1}\rangle \\ &= \int d\pi_i \langle\varphi_i| [1 - \epsilon\hat{H}(\varphi_i, \pi_i)] |\pi_i\rangle\langle\pi_i| \varphi_{i-1}\rangle \\ &= \int d\pi_i e^{-\epsilon H_i} \langle\varphi_i| \pi_i\rangle\langle\pi_i| \varphi_{i-1}\rangle, \\ &= \int \frac{d\pi_i}{2\pi} \exp[i\pi_i(\varphi_i - \varphi_{i-1}) - \epsilon H_i], \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

这里利用了

$$\langle\varphi|\pi\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} e^{i\varphi\pi}.$$

把已得到的矩阵元代入(1.1.7)式, 并注意到在坐标不连续的情况下应以 $\Pi_i \Delta V_i$ 替代 Π_i , 则有

$$Z = \int \prod_{i=1}^n d\varphi_i \frac{d\pi_i}{2\pi} \exp\left\{ \sum_{i=1}^n \left[\epsilon \sum_i \Delta V_i \left[i\pi_i \frac{\Delta\varphi_i}{\epsilon} - \mathcal{H}_i \right] \right] \right\}, \quad (1.1.9)$$

注意到(1.1.4)式, 可知 $\mathcal{H}_i$ 中含有 π_i^2 项, 因而上式中对 $d\pi_i$ 的积分可按下式完成

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2+by} dy = \sqrt{\pi/ae} e^{b^2/4a}.$$

对于(1.1.9)式中的一个因子, 有

$$\begin{aligned} & \int d\pi_i \exp\left[\epsilon \left(i\pi_i \frac{\Delta\varphi_i}{\epsilon} - \frac{1}{2} \pi_i^2 - \frac{1}{2} \nabla^2 \varphi_i - \frac{1}{2} m^2 \varphi_i^2 \right) \right] \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{\epsilon}} \exp\left\{ \frac{\epsilon}{2} \left[- \left(\frac{\Delta\varphi_i}{\epsilon} \right)^2 - \nabla^2 \varphi_i - m^2 \varphi_i^2 \right] \right\}. \end{aligned}$$

于是

$$Z = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}} \right)^n \int \prod_{i=1}^n d\varphi_i \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \epsilon \sum_i \Delta V_i \frac{1}{2} \left[- \left(\frac{\Delta \varphi_i}{\epsilon} \right)^2 - \nabla^2 \varphi_i - m^2 \varphi_i^2 \right] \right\}. \quad (1.1.10)$$

现在讨论上式的连续极限,注意到

$$\frac{\Delta \varphi_i}{\epsilon} \rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}, \quad \sum_{i=1}^n \epsilon \rightarrow \int_0^\beta d\tau, \quad \sum_i \Delta V_i \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} d^3 \mathbf{x},$$

则得标量场配分函数的泛函积分形式

$$\begin{aligned} Z &= N(\beta) \int [d\varphi] \exp \left\{ \int_0^\beta d\tau \int d^3 \mathbf{x} \frac{1}{2} \left[- \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} - \nabla^2 \varphi - m^2 \varphi \right] \right\} \\ &= N(\beta) \int [d\varphi] \exp \left\{ - \int_0^\beta d\tau \int d^3 \mathbf{x} \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi \partial_\mu \varphi + m^2 \varphi) \right\} \\ &= N(\beta) \int [d\varphi] e^{-S_E}. \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

$N(\beta)$ 为归一化因子,由于它依赖 ϵ 而与 β 有关,而

$$S_E = \int_0^\beta d\tau \int d^3 \mathbf{x} \mathcal{L}_E(\varphi, i\dot{\varphi}).$$

其中, $\dot{\varphi} = \partial \varphi / \partial \tau$, $\partial_\mu \partial_\mu = \partial^2 / \partial \tau^2 + \nabla^2$. 由于这里采用了虚时间和欧几里得度规,因而把

$$\mathcal{L}_E(\varphi, i\dot{\varphi}) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi \partial_\mu \varphi + m^2 \varphi), \quad (1.1.12)$$

称为标量场的欧氏拉格朗日密度,而 S_E 被称为欧氏作用量.

按照(1.1.6)式,标量场的配分函数写成(1.1.11)式的形式还应附加有周期条件

$$\varphi(\mathbf{x}, 0) = \varphi(\mathbf{x}, \beta), \quad (1.1.13)$$

(1.1.11)式和(1.1.13)式就是自由标量场的势力学基础. 自由标量场的配分函数可以明显地直接计算出严格的结果.

把(1.1.10)式写成

$$Z = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \prod_{i=1}^n \frac{d\varphi_i(\mathbf{x})}{\sqrt{2\pi\epsilon}} \exp \left\{ - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \epsilon \int d^3 \mathbf{x} \left[\left(\frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{\epsilon} \right)^2 + \nabla^2 \varphi_i + m^2 \varphi_i^2 \right] \right\}, \quad (1.1.14)$$

并对 $\varphi_i(\mathbf{x})$ 作关于变量 $\mathbf{x}$ 的傅里叶变换

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \varphi_i(\mathbf{k}) d^3 \mathbf{k},$$

于是(1.1.14)式成为

$$Z = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \prod_{i=1}^n \frac{d\varphi_i(\mathbf{k})}{\sqrt{2\pi\epsilon}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \epsilon \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \right. \\ \left. \cdot \left[\left(\frac{\varphi_i(\mathbf{k}) - \varphi_{i-1}(\mathbf{k})}{\epsilon} \right)^2 + \omega_k^2 \varphi_i^2(\mathbf{k}) \right] \right\}.$$

其中, $\omega_k^2 = k^2 + m^2$.

可以看出 Z 中每一个因子

$$Z_k = \int \frac{d\varphi_i(\mathbf{k})}{\sqrt{2\pi\epsilon}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \left[\left(\frac{\varphi_i(\mathbf{k}) - \varphi_{i-1}(\mathbf{k})}{\epsilon} \right)^2 + \omega_k^2 \varphi_i^2(\mathbf{k}) \right] \right\}$$

是动量空间中的谐振子配分函数. 在统计物理中已经知道

$$Z_k = \int d\varphi_n(\mathbf{k}) \left(\frac{\omega_k}{\sinh \beta \omega_k} \right)^{1/2} \\ \exp \left\{ \frac{-\omega_k}{\sinh \beta \omega_k} [(\varphi_n^2 + \varphi_0^2) \cosh \beta \omega_k - 2\varphi_n \varphi_0] \right\}.$$

这样

$$Z = \prod_k \int d\varphi_n(\mathbf{k}) \left(\frac{\omega_k}{\sinh \beta \omega_k} \right)^{1/2} \\ \exp \left[\frac{-2\omega_k \varphi_n^2}{\sinh \beta \omega_k} (\cosh \beta \omega_k - 1) \right]. \quad (1.1.15)$$

这里已利用了周期性条件 $\varphi_n = \varphi_0$, 在上式完成对 $d\varphi_n(\mathbf{k})$ 的积分, 并取对数, 得自由标量场的热力学势

$$\Omega = -\frac{1}{\beta} \ln Z = -\frac{1}{\beta} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \ln \left(\operatorname{csch} \frac{\beta \omega_k}{2} \right) \\ = -\frac{1}{\beta} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} [\beta \omega_k / 2 - \ln(1 - e^{-\beta \omega_k})]. \quad (1.1.16)$$

这正是理想玻色气体的热力学势, 这里多出来的 $\beta \omega_k / 2$ 是场的零点能.

费米场的配分函数 通常的费米场是狄拉克旋量场, 它描述自旋为 $\frac{1}{2}$ 的粒子, 自由旋量场的拉氏量密度为

$$\mathcal{L}(x) = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x), \quad (1.1.17)$$

旋量 $\psi(x)$ 的正则共轭动量为

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = i\psi^\dagger(x). \quad (1.1.18)$$

费米场的哈密顿为

$$H = \int d^3 \mathbf{x} (\pi \psi - \mathcal{L})$$