小学数学金钥匙丛书

解竞赛题的钥匙

JIE JING SAI TI DE YAO SHI

朱刚 吴重振 王玉清 邱学华

中国少年儿童出版社

小学数学金钥匙丛书

解竞赛题的钥匙

JIE JING SAI TI DE YAO SHI

中国少年儿童出版社

目　录

一 算谜问题

——凑凑、估估、揭谜底

算谜问题是一类趣味性较强的数学游戏，它不仅加深对小学数学基本知识的理解，对于培养学生的观察能力、分析能力、推理判断能力非常有益。1958 年开始，心理学家以算谜为例子，研究人类解决问题的思维过程。由于算谜问题构思精巧，变化多端，并且具有不同的难度层次，所以经常被智力竞赛和数学竞赛所选用。

算谜问题，一般指那些含有未知数或待定的运算符号的算式。这种不完整的算式就像“谜”一样，要我们根据运算法则和逻辑推理方法进行推理、判断把算谜“猜”出来，使不完整的算式补充完整。

我们通过一些例子来讲述解答算谜问题的思考方法和技巧。

例 1 9○13○7＝100

14○2○5＝□

把＋、－、×、÷分别填在适当的圆圈中，并在长方形中填上适当的整数，可以使上面的两个等式都成立。这时长

方形中的数是几？

（1986 年第一届“华罗庚金杯赛”决赛试题）

解法：先考虑第一个等式，等式右边是 100 比 9、13、7 大得多，所以等式的圆圈里首先应考虑“＋”或“×”，但 $9\times13=117$ 比 100 大，所以得 $9+13\times7=100$。

第二个等式中，题意要求在长方形中填整数，而且只剩下减号和除号，所以得 $14\div2-5=2$。

即长方形中的数是 2。

例 2 在 15 个 8 之间添上＋、－、×、÷，使得下面的算式成立：

8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 ＝1986

（北京市第二届小学生“迎春杯”数学决赛题）

分析：这个式子数字很大，我们先凑出与 1986 较接近的数，如：$8888\div8+888=1999$。这个数比 1986 大 13，这样原问题就转化为：能否用剩下的七个 8 经适当的四则运算得出一个等于 13 的算式呢？还是用上面的想法：11 与 13 较接近，而 $88\div8=11$ 这样一来问题就转化为能否用剩下的四个 8 写出一个等于 2 的算式。而这是不难办到的。如：$8\div8+8\div8=2$。

解法：$8888\div8+888-88\div8-8\div8-8\div8=1986$

用上面类似的方法你能找到另外的解答吗？

以上二例是填写运算符号，例 1 是根据运算结果进行逆推，是解答算谜问题的常用方法。例 2 用逆推的方法比较麻烦，因此，我们先经过估算，凑出一个与结果较接近的数，然

后凑凑、算算，使算式成立。

下面我们来讲述填补等式或竖式的算谜问题。

例 3 将 0，1，2，3，4，5，6 这七个数字填在圆圈和方格内，每个数字恰好出现一次，组成只有一位数和两位数的整数算式。问填在方格内的数是几？

○×○=□=○÷○

（1986 年第一届“华罗庚金杯赛”复赛试题）

解法：要求用七个数字组成五个数，根据算式，应当三个数是一位数，两个二位数，二位数应是积和被除数。

0 和 1 不宜做一位数，一位数如果是 2，则会出现 $2\times6=12$（2 重复出现），$2\times5=10$（经试验不行），$2\times4=8$（7 个数中没有 8），$2\times3=6$（6 不能成为商），因此，2 也不能做一位数。

0、1 和 2 只能用来组成二位数，它可以组成 12 和 21，经验算，21 不能填在方框内，于是得到 $3\times4=12=60\div5$。

即填在方框内的数是 12。

例 4 下面的算式里，每个方框代表一个数字。问：这 6 个方框中的数字的总和是多少？

（1991 年第三届“华罗庚金杯赛”初赛试题）

$$\begin{array}{r} \square\square\square \\ +\ \square\square\square \\ \hline 1\ 9\ 9\ 1 \end{array}$$

分析：解决这样的问题，我们需要认真审题，抓住式中的某些特点，寻找突破口。

这个题目的突破口在百位上，由于十位至多向百位进 1，

且百位上两个□内数字之和加上十位向百位的进位等于 19，可以推出百位上两个□内数字均填 9，且十位向百位进 1；同理，由于十位上两个□内数字之和加上个位向十位的进位等于 19，可以推出十位上两个□内数字均填 9，且个位向十位进 1；由此推出个位上两个□内数字之和等于 11。

解法：由于两个加数的十位和百位数字均为 9，两个加数的个位数字之和为 11，因此所有□内数字之和为

$$9\times4+11=47。$$

例 5 右式的每个□内填入“0，1，2，3，4，5，6，7，8，9”中的某一个数字，使得该除式成立。

```
        1 □
     ┌──────
□ □  ) 1 □ 2
       1 □
     ──────
         3 □
         □ □
     ──────
           0
```

（上海市 1988 年小学数学竞赛试题）

分析：根据除式条件，首先可知除数的十位数字是 1，第一次相除后，余数是 32，由此推出商数的个位数字只能是 2，除数的个位数字也只能是 6。

解法：

```
        1 2
     ┌──────
1 6  ) 1 9 2
       1 6
     ──────
         3 2
         3 2
     ──────
           0
```

例 6 在□中填上适当的数字，使算式成立。

```
                 □ □
        ┌──────────
6 □ □  ) □ □ □ 1
         □ □ 7         ……第一行
        ──────────
         □ □ □ 1       ……第二行
         □ □ 6 □       ……第三行
        ──────────
               0
```

分析：因为除数是三位数，并且百位数为 6，它和商的首位的乘积也是三位数，所以商的首位是 1；

因为第一行的个位数是 7，所以除数的个位数也是 7；

因为第二行的个位为 1，所以商的个位为 3。因为 $3\times7=21$，必须向十位进 2，所以根据十位上的 6，推知除数的十位是 8。商与除数确定后，其他数字都易于确定。

解法：

$$\begin{array}{r}
13\\
687\overline{)\,8931}\\
\underline{687}\\
2061\\
\underline{2061}\\
0
\end{array}$$

例 7　$\overline{ABCD}$表示一个四位数，$\overline{EFG}$表示一个三位数，A、B、C、D、E、F、G 代表 1～9 中的不同的数字。已知$\overline{ABCD}+\overline{EFG}=1993$，问：乘积$\overline{ABCD}\times\overline{EFG}$的最大值与最小值差多少？

（1993 年第三届“华罗庚金杯赛”决赛第一试试题）

分析：这是一道数字谜的最值问题，要选择好“突破口”通常从首位或末位数字入手。

解法：由已知条件

$$\begin{array}{r}
A\ B\ C\ D\\
+\quad E\ F\ G\\
\hline
1\ 9\ 9\ 3
\end{array}$$

首先确定 $A=1$，然后再看被加数与加数的个位数字之和：D

$+G=3$ 或 13，由题意 A、D、G 代表不同的数字，于是 $D+G\geqslant 2+3=5$，因此有 $D+G=13$。同理，被加数与加数的十位数字之和：$C+F\leqslant 8+9=17$。这样可以断定 $C+F=8$，最后可以推知，被加数与加数的百位数字之和 $B+E=9$，下面考虑乘法算式

$\overline{1BCD}\times\overline{EFG}$。

为了使乘积最大，显然乘数的首位数字 E 应该尽可能大，而 $B+E=9$，于是 B 应该尽可能小，这样可以断定取 $B=2$，$E=9$，根据同样理由，可以确定乘数的十位数字 F 应该取 5，因为这时 C 的最小值可取 3；最后确定 $G=9$，$D=4$，所以乘积 $\overline{ABCD}\times\overline{EFG}$ 的最大值是

$$1234\times 759=936606。$$

类似地，为了使乘积最小，可以依次确定 $B=7$，$E=2$，$C=5$，$F=3$，$D=9$，$G=4$，所以乘积 $\overline{ABCD}\times\overline{EFG}$ 的最小值是

$$1759\times 234=411606。$$

$$936606-411606=525000。$$

所以，乘积 $\overline{ABCD}\times\overline{EFG}$ 的最大值与最小值差 525000。

例 8 在右边的算式中 A、B 代表不同的数字，若算式成立，求出 A、B。

$$\begin{array}{r}
A\ B \\
\times\quad B\ A \\
\hline
1\ 1\ 4 \\
3\ 0\ 4\ \\
\hline
3\ 1\ 5\ 4
\end{array}$$

（1980 美国长岛小学数学奥林匹克竞赛试题）

解法：算式中，$AB\times A=114$ 将 114 分解因式，$114=2\times$

3×19，然后将 114 写成一个二位数与一个一位数的积。

114＝52×2＝38×3＝19×6，显然 38×3 符合要求，所以 $A=3$，$B=8$。

例 9 右边乘法算式中的“来参加数学邀请赛”八个字各代表一个不同的数字，其中**赛**代表 9，**来**代表______，**参**代表______，**加**代表______，**数**代表______，**学**代表______，**邀**代表______，**请**代表______。

$$\begin{array}{r} \text{来参加数学邀请赛} \\ \times\qquad\qquad\qquad \text{赛} \\ \hline \text{来来来来来来来来来} \end{array}$$

（1986 年“小学生数学报”数学邀请赛试题）

解法：已知**赛**代表 9，**赛**×**赛**＝9×9＝81，所以**来**代表 1，即乘积为 111111111。根据积÷一个因数＝另一个因数，可以求得被乘数 111111111÷9＝123456789。从而得出：**参**代表 2，**加**代表 3，**数**代表 4，**学**代表 5，**邀**代表 6，**请**代表 7。

例 10 下面乘式中的“趣味数学”四个字各代表一个互不相同的数字，每个方框中可以填 0 至 9 任何一个数字，但最高位不能填 0，试确定算式中的每一个数字。

$$\begin{array}{cccccccccl} & & & & \text{趣} & \text{味} & \text{数} & \text{学} & & \\ & & \times & & \text{趣} & \text{味} & \text{数} & \text{学} & & \\ \cline{3-8} & & & & \square & \square & \square & \square & \cdots\cdots & \text{第一行} \\ & & \square & \square & \square & \square & & & \cdots\cdots & \text{第二行} \\ & \square & \square & \square & \square & & & & \cdots\cdots & \text{第三行} \\ \cline{1-8} \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \cdots\cdots & \text{第四行} \end{array}$$

解法：为叙述方便，把每行中的数字从上到下称为第一行，第二行，……

从第二行看，“数”代表 0。

从第三行看，“趣”代表的数自乘后仍是一位数，所以这个数必须小于等于 3。而且当“趣”代表 3 时，“味”必须小于等于 2。

从第四行看，第三行的第一个数字必须是 9，因此“趣”代表 3。

又因“数”代表 0，如果“味”代表 1，那么第二行的第一个数“3”与第三行的第二个数“3”相加就没法进行。所以，“味”必须是 2。于是“趣”、“味”、“数”分别为“3”、“2”、“0”。

最后看第一行“学”不能大于 3，否则第一行将是五位数，又因为四个数字表示互不相同的数，所以学只能是“1”。

通过上面例题分析，解答算谜问题要注意：

1. 首先要注意算式中的各个文字、字母、符号都只能取 0 至 9 中的某一个数字。

2. 要认真分析已知算式中给出的各种数量关系，根据这些数量关系，选择“突破口”。

3. 突破口的选择往往从确定一个数（乘数，被乘数，除数或商）的个位、首位或其他数位上的数字入手。

4. 必要时要采用枚举和筛选相结合的方法，淘汰那些不合题意的解，寻找正确答案。

5. 运用估算的方法，缩小枚举和试验范围以减少试验次数。

习 题 一

1. 在1199之间填上适合的运算符号，使等式成立。

$$1\ 1\ 9\ 9=10$$

（天津市第一届小学生"我爱数学"邀请赛试题）

2. 填上合适的符号，使等式成立。

$$4\ 4\ 4\ 4=1$$

$$4\ 4\ 4\ 4=2$$

$$4\ 4\ 4\ 4=3$$

$$4\ 4\ 4\ 4=4$$

$$4\ 4\ 4\ 4=5$$

（天津市第二届小学生"我爱数学"预赛试题）

3. 在下面式中填上算术运算符号、括号，使式子成立：

（1）1　2　3=1；

（2）1　2　3　4=1；

（3）1　2　3　4　5=1；

（4）1　2　3　4　5　6=1；

（5）1　2　3　4　5　6　7=1。

（1984年重庆市小学数学竞赛试题）

4. 填上适当的运算符号，使下式成立：

$$1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5=100$$

（1983年《小学生报》数学邀请赛）

5. 在下面十五个9之间添上+、-、×、÷、（ ）使下面算式成立：

9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 ＝2000

6. 在被除数小于 100 的情况下，在右图□内填上适当的数：

$$\square \div \begin{cases} \square = 4\cdots\cdots 4 \\ \square = 5\cdots\cdots 5 \\ \square = 6\cdots\cdots 6 \end{cases}$$

(1983 年《小学生报》数学邀请赛试题)

7. 在下面的□中，分别填上 1、2、3、4、5、6、7、8、9 中的一个数字（每个只许填一次）使得带分数算式（每式只要一个填法）：

(1) $\square\square\frac{\square}{\square} - \square\square\frac{\square}{\square}$的值最大；

(2) $\square\square\frac{\square}{\square} + \square\square\frac{\square}{\square}$的值最小。

(上海第一届“从小爱数学”邀请赛试题)

8. 在下面乘法竖式的□内各填上适合的数字，使算式成立：

(1)
$$\begin{array}{rcccc} & & & 6 & \square \\ \times & & & 3 & 5 \\ \hline & & 3 & 3 & \square \\ & 1 & \square & 8 & \\ \hline & \square & \square & \square & \square \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{rcccc} & & 2 & 5 & 8 \\ \times & & & \square & \square \\ \hline & 1 & \square & 2 & \square \\ & \square & \square & \square & \\ \hline & \square & 9 & \square & \square \end{array}$$

9. 在下面的方框中填上适当的数字，使算式成立：

(1)
$$\begin{array}{r} \square\,\square \\ \square\,7 \overline{)\,1\,9\,\square\,\square} \\ \underline{\square\,\square\,5} \\ \square\,\square \\ \underline{\square\,4} \\ 0 \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{r} 2\,\square \\ \square\,\square \overline{)\,1\,\square\,6\,\square} \\ \underline{1\,6\,\square} \\ 8\,\square \\ \underline{8\,\square} \\ 0 \end{array}$$

10. 关于下面的算式，只知道一个数字 8，你能确定其他数字吗？

$$\begin{array}{rcccccc}
 & & & & \square & 8 & \square \\ \cline{2-7}
\square\square\square\big) & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\
 & \square & \square & \square & \square & & \\ \cline{2-7}
 & & & \square & \square & \square & \square \\
 & & & \square & \square & \square & \square \\ \cline{4-7}
 & & & & & & \square
\end{array}$$

11. 把下面除法算式中的 * 号填出来，成为一完整的算式。

$$\begin{array}{rcccccc}
 & & & \ast & 8 & \ast & 7 \\ \cline{2-7}
\ast\ \ast\big) & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast \\
 & \ast & \ast & \ast & & & \\ \cline{2-7}
 & & & \ast & \ast & & \\
 & & & \ast & \ast & & \\ \cline{4-7}
 & & & & & \ast & \ast \\
 & & & & & \ast & \ast \\ \cline{6-7}
 & & & & & & 0
\end{array}$$

12. 下式中不同的字母代表不同的数字，相同的字母代表相同的数字，求出这些字母各代表什么数字，算式才能成立：

(1)

$$\begin{array}{rcc}
 & H & E \\
 & H & E \\
 & H & E \\
+ & H & E \\ \hline
 & A & H
\end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{rccccc}
 & & A & B & C & D \\
+ & & D & C & B & A \\ \hline
 & A & B & C & D & 0
\end{array}$$

(3)

$$\begin{array}{r} AA880 \\ -\quad BCBA \\ \hline ABCB \end{array}$$

(4)

$$\begin{array}{r} CDEBC \\ -\quad ABCD \\ \hline ACAC \end{array}$$

13. 将下面式中的字母用数字代替，使算式成立。

$$\begin{array}{r} \text{赛竞学数年少匙钥金} \\ +\ 864197532 \\ \hline \text{金钥匙少年数学竞赛} \end{array}$$

（1984 年上海“金钥匙”数学竞赛题）

14. 下面算式中每一个字代表一个数字，不同的字代表不同的数字，当算式成立时，求每个字所代表的数字。

$$\begin{array}{r} \text{努力学习} \\ \text{向上} \\ \hline \text{我们天天向上} \end{array}$$

（1986 年北京奥林匹克学校入学试题）

15. 在下面的算式中“三”、“好”、“学”、“生”四个汉字各代表一个阿拉伯数字，其中“三”代表____，“好”代表____，“学”代表____，“生”代表____。

$$\begin{array}{r} \text{学生} \\ \text{好学生} \\ \text{三好学生} \\ \hline 1989 \end{array}$$

（1988 年《小学生数学》报小学生数学邀请赛初赛试

题）

16. 在象棋算式里，不同的棋子代表不同的数字，请你想一想棋子各代表哪些数字。

$$
\begin{array}{r}
\text{兵 砲 马 卒} \\
+\ \text{兵 砲 车 卒} \\
\hline
\text{车 卒 马 兵 卒}
\end{array}
$$

17. 下列各题的每一个汉字代表一个数字，不同的汉字代表不同的数字，试求出下列各算式。

(1)

$$
\begin{array}{r}
\text{从 小 爱 数 学} \\
\times\quad 4 \\
\hline
\text{学 数 学 小 从}
\end{array}
$$

(2)

$$
\begin{array}{r}
1\ \text{红 花 映 绿 叶} \\
\times\quad 3 \\
\hline
\text{红 花 映 绿 叶}\ 1
\end{array}
$$

(3)

$$
\begin{array}{r}
\text{蜜 蜜 蜜} \\
\times\ \text{蜜 蜜 蜜} \\
\hline
\text{蜜 蜂 酿 蜂 蜜}
\end{array}
$$

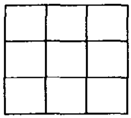
(4)优优优优优优÷学＝学习再学习

二 填数问题

——从“九宫算”谈起

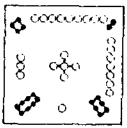
在填数问题中，小学生常常采用“凑”的方法，通过几次试验来寻找解答。如果我们深挖其中的道理，就会找到一些解题规律，使认识进一步深化。在这个意义上讲，填数问题是一种很好的“锻炼思维的体操”。

我国古代人民对数学的发展作出过许多杰出贡献，著名的“九宫算”就是其中之一，最早提出的问题是：



将 1 至 9 这九个数字填在右图中九个方格里使每一横行、每一纵列和两个对角线上的数之和相等。

这种图形填数，我国古代称为“九宫算”、“纵横图”，国外叫做幻方。“九宫图”就是将 1 至 9 的九个数填在 3×3 的小格内，它是一个三阶幻方。传说大禹治水的时候，洛水中



洛书

4	9	2
3	5	7
8	1	6

洛书今释
（三阶幻方）