21世纪高职高专数学系列教材

高等数学学习指导

第二册（第2版）

康希祁 倪曼 主编

GAO DENG SHU XUE XUE XI ZHI DAO

华中科技大学出版社

湖北省精品课程教材

21世纪高职高专数学系列教材

高等数学学习指导

第二册

（第2版）

主编　康希祁　倪　曼

主审　安志鹏　郭文秀

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导·第二册(第2版)/康希祁 倪曼 主编
武汉:华中科技大学出版社,2004年9月
ISBN 7-5609-3245-2

Ⅰ.高…
Ⅱ.①康… ②倪…
Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料
Ⅳ.O13

高等数学学习指导·第二册(第2版)　康希祁　倪曼　主编

责任编辑:徐正达　柯　贝　封面设计:刘　卉
责任校对:朱　霞　责任监印:熊庆玉

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87557437

录　　排:武汉皇荣文化发展有限责任公司
印　　刷:武汉中远印务有限公司

开本:850×1168　1/32　印张:6.5　字数:153 000
版次:2004年9月第2版　印次:2006年9月第4次印刷　定价:9.80元
ISBN 7-5609-3245-2/O·328

内 容 简 介

本书是“21世纪高职高专数学系列教材”之一，第2版在第1版基础上进行了全面修订. 内容与《高等数学(第二册)》同步，包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数和微分方程等五章，每章按内容提要、疑难解析、范例讲评、习题选解、综合练习五部分编写，书末附有三套综合测试题供选用. 综合练习和综合测试题均附有答案.

本书可作为高职高专学生学习高等数学的辅导书，也可作为“专升本”的应试指导书，还可以作为工科大学生，成人高校学生及自学者学习和教师教学的参考书.

21世纪高职高专数学系列教材
编审委员会

序

在"21世纪高职高专数学系列教材"即将出版之际,我谈几点意见,作为这套系列教材的序.

高等职业教育的出现是我国高等教育改革发展中的大事. 高职应该办好,办出特色,真正培养出高素质的综合型、应用型人才. 近来报纸上有很多讨论有关问题的文章,其中提到在发达国家高级技工的比例占到40%,而我国只有百分之几. 这一现象已经严重地影响了国民经济的发展. 高职院校虽然不是培养高级技工的场所,但它培养的各类技术人才,将会弥补这个不足,使"高学历"人才与"应用型"人才的比例趋向合理. 目前有一种追求"高学历"教育的倾向,用一句话来概括,就是中国的高等教育重心偏高. 有一种流传很广的成见,认为"高学历等于高质量",实践证明这是不对的. 过分强调高学历,反而会造成有限教育资源的极大浪费.

近年来,人们又开始讨论所谓高等教育大众化的问题. 高等教育由以前的"精英教育"向"大众化教育"转变,这是高等教育发展的必然结果. 这样一来,不免使人怀疑,便有了这是不是以数量换质量的说法. 由于进入高等学校的学生越来越多,录取分数线一定会下降,这也会引起人们的疑惑:入学分数较低的学生的质量是不是一定就差? 这种误解与"高学历等于高质量"的性质是相同的. 教育的功能在于,能用有限的资源把更多的学生提高到

更高的水平．因此，我提出这样一个问题：怎样根据高职教育的性质与实际可能将高等职业教育搞得更好、更有特色？怎样利用我们的有限的资源，培养出更多的合格人才？做到了这一点就是高质量的教育．正是从这点出发，我在多种场合中提到了“必需、够用”和“易教易学”两个标准．对于这一点，如果说在微积分基础方面比较容易做到的话，那么要在以后较高层次的专业数学方面做到就难多了．如果前面基础课的内容讲得很少，似乎皆大欢喜，但到后来学习专业数学，知识就不够用了．反之，对前面的基础课程提出了不合理的过高的要求，学生们接受不了，也就谈不上再学习后续内容了．所以，还是重申那两句话：“必需、够用”与“易教易学”．我知道，这是很不容易达到的标准．如果说我这些年来从事教学工作还有一些体会的话，那就是办教育不能说空话．许多事，说起来容易，但做起来就难了，只有经过多年的实践才知道其艰辛．正因如此，我愿对这套系列教材的作者们孜孜不倦的努力，对他们编出“精品”教材、为培养21世纪的高素质人才做贡献的精神，表示我的敬意．也希望他们继续努力，做得更好．

齐民友

2002年5月5日
于武汉大学

前　言

数学是研究数量关系与空间形式的科学，是科学技术人才科技素质的重要组成部分. 随着计算机技术等高科技的普及和发展，数学的重要性日益显现. 为了提高学生的数学素质，结合高职高专学生的特点，针对高职高专教育的目标——培养高层次、复合型、实用型人才，湖北省高职高专数学研究会与华中科技大学出版社联合组织出版了这套“21 世纪高职高专数学系列教材”，第一批推出的有《高等数学(第一册)》、《高等数学(第二册)》、《线性代数》、《积分变换》、《概率与统计》、《高等数学学习指导(第一册)》、《高等数学学习指导(第二册)》等七本. 本系列教材保持传统体系，简略理论推导，强调实际应用，渗透建模思想，突出思路分析，强化综合训练；在叙述中注重文字简练，概念准确，由浅入深，引人入胜；力求使学生掌握所学知识，提高应用数学知识的能力，为将来的激烈竞争插上“坚强的翅膀”.

本书内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数和微分方程等五章. 每章按内容提要、疑难解析、范例讲评、习题选解和综合练习等五个部分编写，书后附有三套综合测试题，便于读者练习.

本书由康希祁、倪曼担任主编，安志鹏、郭文秀担任主审，李学银、兰向春、朱玉明担任副主编. 参加编写的还有龚友运、熊嗣斌、刘昌喜、山军、王启学、李延松等. 全书

由康希祁、朱永银统稿.

武汉大学前校长、全国著名数学家齐民友教授欣然作序,为本系列教材增色不少;武汉大学费浦生教授审阅了本系列教材的部分内容,提出了许多宝贵意见. 本系列教材还参考吸收了有关教材及著作的成果. 在此一并致谢.

荆门职业技术学院、武汉职业技术学院、武汉电力职业技术学院、长江工程职业技术学院、咸宁职业技术学院、仙桃职业学院、武汉软件职业学院、武汉工交职业技术学院、武汉警官职业技术学院、沙洋师范高等专科学校、十堰职业技术学院、华中师范大学职业技术学院、襄樊职业技术学院、宜昌职业技术学院等学校为本系列教材的出版发行给予了积极的支持,在此表示由衷的感谢.

由于编者水平有限,本书难免存在疏漏之处,敬请广大读者提出批评建议.

编　者

2004 年 6 月

目　　录

第六章　向量代数与空间解析几何

向量的概念是从现实生活中抽象出来的，很多实际问题都可用向量这个工具来解决.空间解析几何是平面解析几何的拓广，是学习多元函数微积分的基础.

内 容 提 要

一、空间直角坐标系

1. 空间直角坐标系的建立

2. 空间两点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2(x_2,y_2,z_2)$ 间的距离公式

$$d=|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

二、向量代数

1. 向量定义

既有大小又有方向的量称为向量.

2. 向量的线性运算及其运算律

1）向量加法满足

交换律　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

结合律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

2）数乘向量满足

结合律　$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$　（λ,μ 为实数）.

分配律　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$，　$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

3. 向量的坐标表示

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}=\{a_x,a_y,a_z\},$$

其中$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$为直角坐标系中的基本单位向量.

4. 向量的方向余弦

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

满足
$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

5. 向量的数量积

1）数量积定义

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b}).$$

2）向量的数量积满足的运算律

交换律　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.

结合律　$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$　（λ为实数）.

分配律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

3）两向量垂直的充要条件

$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0.$$

6. 向量的向量积

1）向量积定义

两向量的向量积记为$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，且

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b}).$$

它的方向与$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$都垂直，并且按$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$这个顺序构成右手系.

2）向量的向量积满足的运算律

反交换律　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$.

结合律　$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$　（λ为实数）.

分配律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$.

3）两向量平行的充要条件

$$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}.$$

三、平面与平面方程

1. 平面方程

1）点法式方程　$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$，其中 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$ 为平面的法向量.

2）一般方程　$Ax+By+Cz+D=0$.

3）截距式方程　$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$（$a,b,c$ 为平面在坐标轴上的截距）.

2. 平面之间的关系

设有两平面

$$\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\quad(\boldsymbol{n}_1=\{A_1,B_1,C_1\}),$$

$$\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\quad(\boldsymbol{n}_2=\{A_2,B_2,C_2\}).$$

若 $\boldsymbol{n}_1/\!/\boldsymbol{n}_2$，即

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\quad(\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\boldsymbol{0}),$$

则 $\pi_1/\!/\pi_2$.

若 $\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2$，即

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0\quad(\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0),$$

则 $\pi_1\perp\pi_2$.

两平面的夹角公式

$$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}\quad\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

3. 点到平面的距离

$P_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ 的距离公式

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

四、空间直线与方程

1. 直线方程

1）对称式方程 $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$，其中 $\boldsymbol{s}=\{m,n,p\}$ 为直线的方向向量.

2）参数方程 $\begin{cases}x=x_0+mt,\\ y=y_0+nt,\\ z=z_0+pt\end{cases}$ $(-\infty<t<+\infty)$.

3）两点式方程 $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$.

4）一般方程 $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.\end{cases}$

2. 直线之间的关系

设两直线 $l_1:\frac{x-x_0}{m_1}=\frac{y-y_0}{n_1}=\frac{z-z_0}{p_1}\quad(\boldsymbol{s}_1=\{m_1,n_1,p_1\})$,

$l_2:\frac{x-x_0}{m_2}=\frac{y-y_0}{n_2}=\frac{z-z_0}{p_2}\quad(\boldsymbol{s}_2=\{m_2,n_2,p_2\})$,

若 $\boldsymbol{s}_1/\!/\boldsymbol{s}_2$，即 $\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}\quad(\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=0)$，则 $l_1/\!/l_2$；

若 $\boldsymbol{s}_1\perp\boldsymbol{s}_2$，即 $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0\quad(\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2=0)$，则 $l_1\perp l_2$.

两直线的夹角公式

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{|\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2|}{|\boldsymbol{s}_1||\boldsymbol{s}_2|}\\&=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}\quad\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

3. 直线与平面的关系

平面 π: $Ax+By+Cz+D=0\quad(\boldsymbol{n}=\{A,B,C\})$,

直线 l: $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}\quad(\boldsymbol{s}=\{m,n,p\})$,

若 $\boldsymbol{n}/\!/\boldsymbol{s}$，即 $\dfrac{A}{m}=\dfrac{B}{n}=\dfrac{C}{p}$ $(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{s}=\boldsymbol{0})$，则 $l\perp\pi$，

若 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{s}$，即 $Am+Bn+Cp=0$ $(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s}=0)$，则 $l/\!/\pi$.

直线与平面的夹角公式

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}\quad\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

五、曲面及其方程

1. 旋转曲面

yOz 面上的平面曲线 $\Gamma:\begin{cases}f(y,z)=0,\\x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转所得旋转曲面的方程是将 $f(y,z)=0$ 中的 y 换成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$，z 不变而得出，即

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0.$$

类似可得其他形式的旋转曲面方程.

2. 柱面方程

母线平行于坐标轴的柱面方程中缺与该坐标轴对应的变量，如方程 $f(x,y)=0$ 是母线平行于 z 轴的柱面方程.

3. 一些特殊的二次曲面

1）椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$，其中 a,b,c 中若有两个相等则为旋转椭球面；若 $a=b=c$，则为中心在原点的球面.

2）双曲面

i）单页双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$，当 $a=b$ 时为旋转单叶双曲面（z 轴为旋转轴）.

ii）双叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$，当 $a=b$ 时为旋转双叶双曲面.

3）抛物面

i）椭圆抛物面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2z$，当 $a=b$ 时为旋转抛物面.

ii）双曲抛物面　$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z.$

六、空间曲线及其方程

1）参数方程　$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\\ z=z(t).\end{cases}$

2）一般方程　$L:\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0.\end{cases}$

它是将空间曲线看做两个曲面$F(x,y,z)=0$和$G(x,y,z)=0$的交线.

3）空间曲线在坐标面上的投影

i）投影柱面方程　从空间曲线方程$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$中消去一个变量（例如$z$）得出的方程$H(x,y)=0$是曲线$L$关于$xOy$面的投影柱面方程. 类似可得到关于其他坐标面的投影柱面方程.

ii）空间曲线在坐标面上的投影曲线的方程　将L关于xOy面的投影柱面方程与xOy面的方程$z=0$联立,就得L在xOy面上的投影曲线方程$\begin{cases}H(x,y)=0,\\ z=0.\end{cases}$

疑难解析

一、向量运算

1. 数与向量的乘积

数与向量的乘积$\lambda \boldsymbol{a}$是与$\boldsymbol{a}$共线的一个向量,因此可得两向量$\boldsymbol{a}$（$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$）,$\boldsymbol{b}$共线的充要条件是存在数$\lambda$,使得$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$. 因为我们研究的是自由向量,这里所谓共线与平行是同义语.