全日制普通高级中学教科书（必修）同步辅导

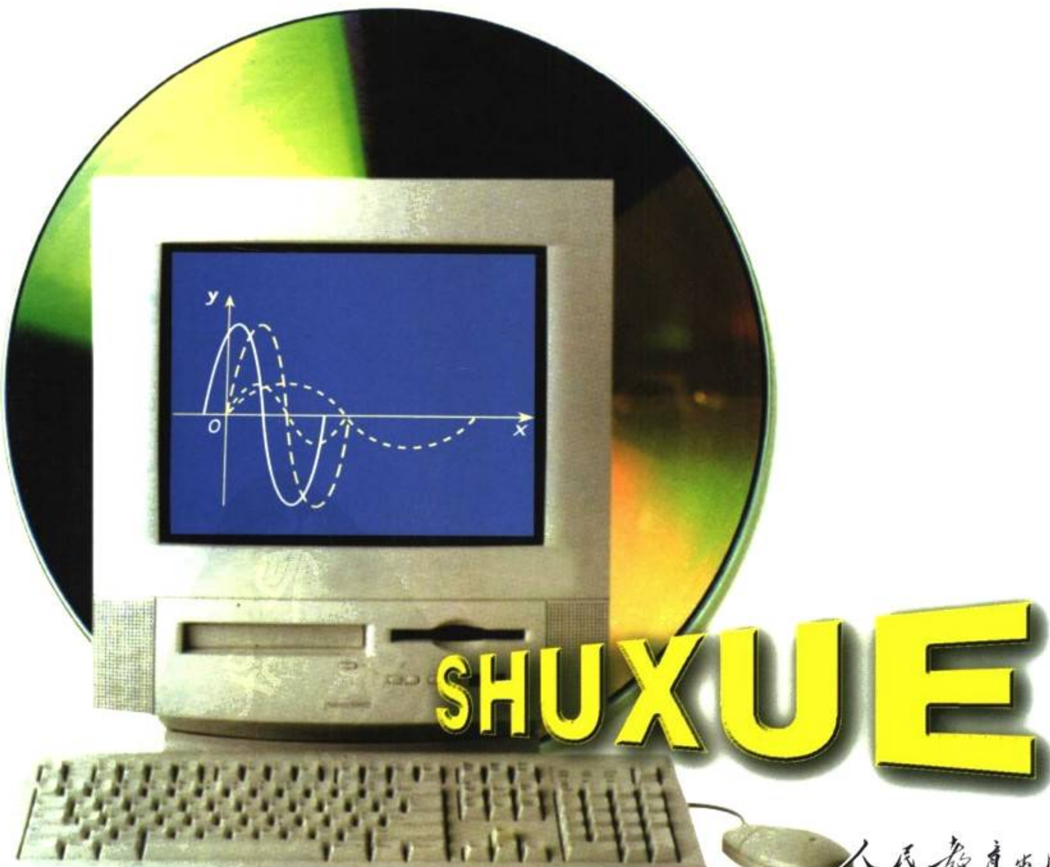
能力培养与测试

修订版

高一数学

第一册（下）

人民教育出版社　组编



人民教育出版社

ISBN 7-107-19032-6

9 787107 190322 >

ISBN7-107-19032-6
G · 12122（课） 定价：13.10元

全日制普通高级中学教科书（必修）同步辅导

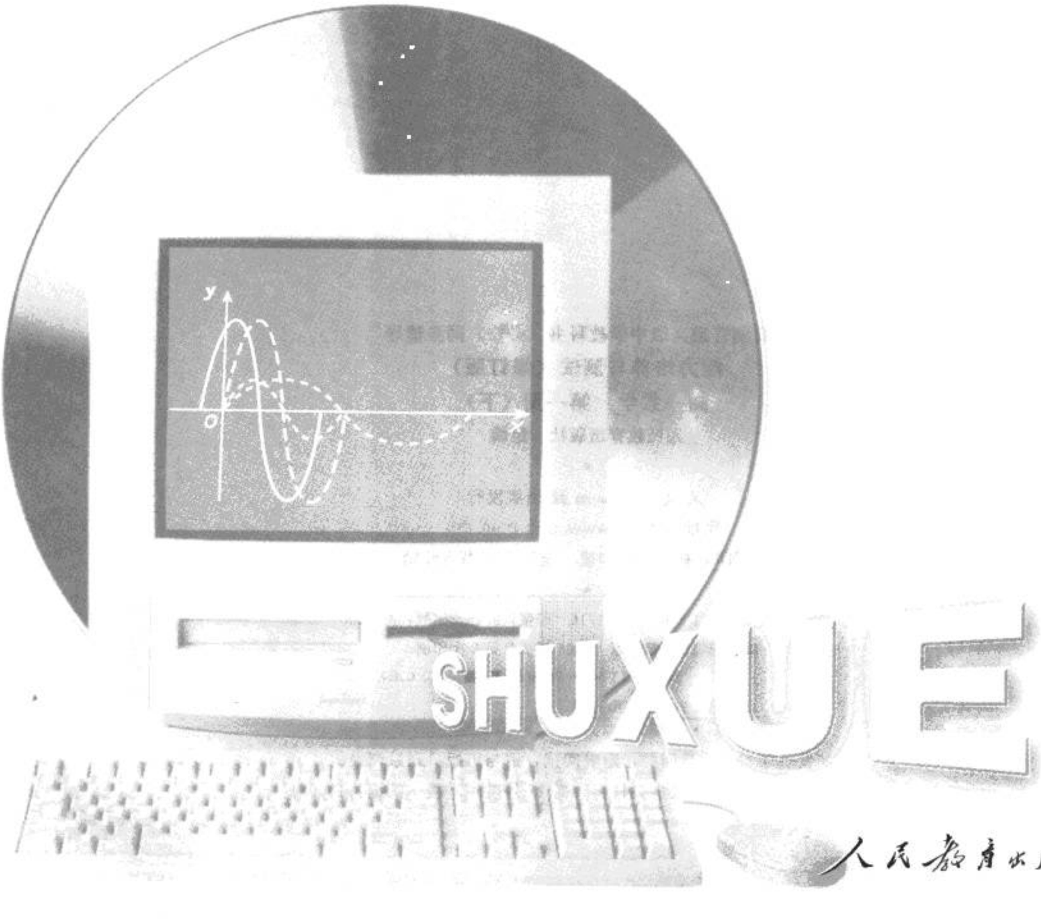
能力培养与测试

修订版

高一数学

第一册（下）

人民教育出版社　组编



人民教育出版社

全日制普通高级中学教科书（必修）同步辅导
能力培养与测试（修订版）
高一数学　第一册（下）
人民教育出版社　组编
*
人民教育出版社 出版发行
网址：http://www.pep.com.cn
益利印刷有限公司印装　全国新华书店经销
*
开本：890 毫米×1 240 毫米　1/16　印张：9.25　字数：357 000
2005 年 12 月第 1 版　2006 年 2 月第 2 次印刷
印数：73 501～76 500 册
ISBN 7-107-19032-6
G·12122（课）　定价：13.10 元

编写说明

1996 年，原国家教委基础教育司制订并印发了《全日制普通高级中学课程计划(试验)》和供试验用的全日制普通高级中学语文、数学、外语(英、日、俄)、物理、化学、生物、历史、地理、政治等 9 个学科的教学大纲。同年，人民教育出版社接受原国家教委的委托，根据各学科教学大纲，编写了全日制普通高级中学试验教材。这套教材于 1997 年出版并开始在江西、山西、天津进行试验。经过试验，这套课程方案和教材受到了专家的肯定和广泛的好评。2000 年，人民教育出版社又根据教育部修订后的各科教学大纲对这套教材进行了修订。同时，为了更好地配合这套教材的推广使用，人民教育出版社约请了国内部分一线教师，组织编写了一套与人教版各科全日制普通高级中学教科书(试验修订本)配套的同步辅导读物。2002 年，全日制普通高级中学语文、数学、物理、化学、生物、历史、地理等学科教学大纲经再一次修订后正式印发。人民教育出版社组编的《能力培养与测试》这套丛书也根据各科教学大纲的变化和教材的修订不断地进行着调整和修订。经过几年的使用，根据使用中的反馈意见和课程改革的发展情况，2005 年，人民教育出版社再次组织力量对这套丛书进行了修订，希望这套丛书更加贴近学生的实际需要，能够有效提高学生自主学习的能力和运用所学知识分析问题、解决问题的能力。

编者

2005 年 7 月

目录

第四章
三角函数

4.1　角的概念的推广

学海导航

本节内容在高考中多与其他节的内容一起以选择题或填空题形式出现，且多数属于中低难度．要学好本节内容，首先要正确理解正角、负角、零角的概念，由定义可知关键是抓住终边的旋转方向是逆时针、顺时针、还是没有转动，要用运动的观点来理解．对于象限角的概念，一定要掌握书上关于坐标系是怎样建立的叙述，关键是看角的顶点是否与坐标原点重合，且角的始边是否与 x 轴的非负半轴重合，这是判断象限角的两个前提条件，二者缺一不可．

精彩视点

1. 对于终边相同角的集合 $\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot360°;k\in\mathbf{Z}\}$，要注意三个方面的问题：

(1)α 是任意角；

(2)$k\cdot360°$ 与 α 之间是"＋"号，$k\cdot360°-\alpha$ 可理解为 $k\cdot360°+(-\alpha)$；

(3)$k\in\mathbf{Z}$ 这个条件不可少．

角的概念推广后，应正确理解象限角、区间角的区别．如第一象限角、锐角、小于 90°的角、0°～90°的角，若他们分别记为 A、B、C、D，则 $A=\{\alpha|k\cdot360°<\alpha<k\cdot360°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{\alpha|0°<\alpha<90°\}$，$C=\{\alpha|\alpha<90°\}$，$D=\{\alpha|0°\leqslant\alpha<90°\}$，则 $B\subsetneqq C$，$B\subsetneqq D$，$D\subsetneqq C$．

例　下列命题中正确的是(　　)

A. 终边相同的角都相等

B. 第一象限的角比第二象限的角小

C. 第一象限的角都是锐角

D. 锐角都是第一象限的角

错解：A、B、C

正确答案：D

错解分析：错选 A 是因为对终边相同的角的概念理解不透彻，任何一个角 α 的终边旋转 360°的整数倍以后，还与它终边相同，但它们相差 360°的整数倍；错选 B 的是对象限角的概念不清，象限角只反映角的终边位置，而不反映角的大小．某个象限的角有无数个，其中有正角，也有负角，所以第一象限的角不一定比第二象限的角小；错选 C 的是对象限角与锐角的概念的理解不清．

2. 在讨论角的终边所在的象限时，一方面要注意必须是 360°的整数倍加上一个角，另一方面要特别注意不能忽略终边在坐标轴上的情况．

典例精析

1. 学科综合　思维激活

例 1　(1)钟表经过 10 分钟，时针转了________度，分钟转了________度．

(2)若将钟表拨慢了 10 分钟，则时针转了________度．分针转了________度．

解析：(1)$-10\times\dfrac{360°}{12\times60}=-5°$．

$-10\times\dfrac{360°}{60}=-60°$．

(2)$10\times\dfrac{360°}{60\times12}=5°$．

$10\times\dfrac{360°}{60}=60°$．

温馨提示：(1)注意角的旋转方向．(2)注意角的正负．

例 2　(1)写出与 15°角终边相同的角的集合；

(2)在(1)的集合中，求出适合不等式 $-1\,080°<\alpha<360°$ 的元素 α 来．

解：(1)与 15°角终边相同的角集合是

$M=\{\alpha|\alpha=k\cdot360°+15°,k\in\mathbf{Z}\}$．

(2)在 M 中适合 $-1\,080°<\alpha<360°$ 的元素是

取 $k=-3$ 时，$-3\times360°+15°=-1\,065°$．

取 $k=-2$ 时，$-2\times360°+15°=-705°$．

取 $k=-1$ 时，$-1\times360°+15°=-345°$．

取 $k=0$ 时，$0\times360°+15°=15°$．

即元素 $-1\,065°$，$-705°$，$-345°$，15°为所求．

温馨提示：对于(1)可利用终边相同角的公式写出．对于(2)可在(1)的基础上，利用满足约束条件的不等式，对其中的 k 值采用赋值法求解．

2. 创新应用　思维激活

例 3　如图 4-1-1 所示，分别写出适合下列条件的角的集合：

(1)终边落在射线 OM 上；

(2)终边落在直线 OM 上；

(3)终边落在阴影区域内(含边界)．

解：(1)终边落在射线 OM 上的角的集合 $A=\{\alpha|\alpha=45°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$．

(2)终边落在射线 OM 上的角的集合为 $A=\{\alpha|\alpha=$

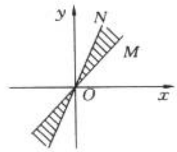


图 4-1-1

$45°+k\cdot 360°,k\in \mathbf{Z}\}$，终边落在射线 OM 反向延长线上的角的集合为：

$B=\{\alpha|\alpha=225°+k\cdot 360°,k\in \mathbf{Z}\}$，

∴ 终边落在直线 OM 上的角的集合为：

$A\cup B=\{\alpha|\alpha=45°+k\cdot 360°,k\in \mathbf{Z}\}\cup\{\alpha|\alpha=225°+k\cdot 360°,k\in \mathbf{Z}\}$

$=\{\alpha|\alpha=45°+2k\cdot 180°,k\in \mathbf{Z}\}\cup\{\alpha|\alpha=45°+(2k+1)\cdot 180°,k\in \mathbf{Z}\}$

$=\{\alpha|\alpha=45°+180°$的偶数倍$\}\cup\{\alpha|\alpha=45°+180°$的奇数倍$\}$

$=\{\alpha|\alpha=45°+180°$的整数倍$\}$

$=\{\alpha|\alpha=45°+n\cdot 180°,n\in \mathbf{Z}\}$.

(3)终边落在直线 ON 上的角的集合为$\{\beta|\beta=60°+n\cdot 180°,n\in \mathbf{Z}\}$，

∴ 终边落在阴影区域内(含边界)的角的集合为：

$\{\alpha|45°+n\cdot 180°\leqslant\alpha\leqslant 60°+n\cdot 180°,n\in \mathbf{Z}\}$.

温馨提示：这是有关终边相同的角的问题及终边在同一直线上的角的集合的合并问题，正确表示终边相同的角的集合是解决问题的关键，另外要注意任意角的旋转方向.

3. 诱思探究　思维激活

例 4　(2005 年济南期中测试)在直角坐标系中，α 的顶点在坐标原点，始边在 x 轴的正半轴上，若 α 的终边过函数 $y=-2^x$ 与 $y=-\log_{\frac{1}{2}}(-x)$ 的两图象的交点，求满足条件 α 的集合.

解：由题设可知函数 $y=-2^x$ 与 $y=-\log_{\frac{1}{2}}(-x)$ 的图象的交点在 α 的终边上，设此交点的坐标为 $P(x,y)$，则 $y<0,x<0$(∵ $-x>0$)，∴ α 为第三象限的角.

又 $y=-\log_{\frac{1}{2}}(-x)=\log_2(-x)$，$y=-2^x$ 在$(-\infty,+\infty)$上是减函数，于是存在反函数 $f^{-1}(x)=\log_2(-x)$.

∴ $y=-2^x$ 与 $y=-\log_{\frac{1}{2}}(-x)$ 互为反函数，它们的图象关于直线 $y=x$ 对称，故它们的交点 P 必在直线 $y=x$ 上，又 P 在第三象限，∴ $\alpha=k\cdot 360°+225°(k\in \mathbf{Z})$，即 α 的集合是$\{\alpha|\alpha=k\cdot 360°+225°,k\in \mathbf{Z}\}$.

温馨提示：这是一道探究性的学习问题，要把函数与角结合在一起放在坐标系中进行讨论.

例 5　已知集合 $A=\{\alpha|\alpha=k\cdot 120°+30°,k\in \mathbf{Z}\}$，$B=\{\beta|k\cdot 360°-120°<\beta<k\cdot 360°+60°,k\in \mathbf{Z}\}$，求：$A\cap B$.

解：∵ $\alpha=k\cdot 120°+30°,k\in \mathbf{Z}$，

∴ 当 $k=3n(n\in \mathbf{Z})$时，$\alpha=n\cdot 360°+30°$；

当 $k=3n+1(n\in \mathbf{Z})$时，$\alpha=n\cdot 360°+150°$；

当 $k=3n+2(n\in \mathbf{Z})$时，$\alpha=n\cdot 360+270°$；

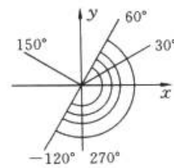


图 4-1-2

由条件作图(4-1-2)阴影部分为集合 B 表示的区域.

∴ 集合 A 与集合 B 的公共部分是与 30°，270°终边相同的角的集合.

即 $A\cap B=\{\alpha|\alpha=k\cdot 360°+30°$或$\alpha=k\cdot 360°+270°,k\in \mathbf{Z}\}$.

温馨提示：数形结合，$k=3n,k=3n+1,k=3n+2(n\in \mathbf{Z})$这种分类方法要用心体会.

4. 高考经典　思维激活

例 6　(1993 年全国)设集合 $M+\{x|x=k\cdot 90°+45°,k\in \mathbf{Z}\}$，$N=\{x|x=k\cdot 45°+90°,k\in \mathbf{Z}\}$，则必有(　　)

A. $M=N$　　　B. $M\subsetneqq N$

C. $M\subsetneqq N$　　　D. $M\cap N=\varnothing$

解析：解法 1：$M=\{x|x=k\cdot 90°+45°,k\in \mathbf{Z}\}=\{x|x=(2k+1)\cdot 45°,k\in \mathbf{Z}\}$，$N=\{x|x=(k+2)\cdot 45°,k\in \mathbf{Z}\}$，

而 $2k+1$ 为奇数，$k+2$ 为整数. ∴ $M\subsetneqq N$，故选 C.

解法 2：在集合 M 中，对 k 讨论.

当 $k=4n,n\in \mathbf{Z}$ 时，$x=n\cdot 360°+45°,n\in \mathbf{Z}$；

当 $k=4n+1,n\in \mathbf{Z}$ 时，$x=n\cdot 360°+135°,n\in \mathbf{Z}$；

当 $k=4n+2,n\in \mathbf{Z}$ 时，$x=n\cdot 360°+225°,n\in \mathbf{Z}$；

当 $k=4n+3,n\in \mathbf{Z}$ 时，$x=n\cdot 360°+315°,n\in \mathbf{Z}$.

故集合 M 表示终边在四个象限角平分线上的角的集合. 同理，对于集合 N 中的 $k=8n,8n+1,\cdots,8n+7,n\in \mathbf{Z}$ 讨论可知，集合 N 表示终边在坐标轴上或四个象限角平分线上的角的集合，故 $M\subsetneqq N$，选 C.

温馨提示：这是把终边相同的角与集合运算结合起来的问题，弄清每个集合中元素的属性是解决此题的关键.

例 7　(2000 年全国)已知 $\sin\alpha>\sin\beta$ 那么下列命题成立的是(　　)

A. 若 α、β 是第一象限的角，则 $\cos\alpha>\cos\beta$

B. 若 α、β 是第二象限的角，则 $\tan\alpha>\tan\beta$

C. 若 α、β 是第三象限的角，则 $\cos\alpha>\cos\beta$

D. 若 α、β 是第四象限的角，则 $\tan\alpha>\tan\beta$

解析：选 D.　若 α、β 是第一象限的角，则 $\cos\beta>\cos\alpha$，故 A 错；若 α、β 为第二象限的角，则 $\tan\alpha<\tan\beta$，故 B 错；若 α、β 是第三象限的角，则 $\cos\alpha<\cos\beta$，故 C 错.

温馨提示：明确象限的概念，此题便迎刃而解.

方法平台

利用终边相同的角的表示，可以由角 α 所在象限，判断 $\frac{\alpha}{2}$ 所在的象限.

方法一(范围限定法)：将 α 的范围用式子表示出来，

然后求出$\frac{\alpha}{2}$的范围，根据此范围进行判断，此时需要进行分类讨论.

方法二（图示法）：把直角坐标系中的各个象限进行二等分，从x轴右上方开始按逆时针将各区域依次标上1，2，3，4；1，2，3，4. 若α是第几象限角就找数字几，其对应的位置就是$\frac{\alpha}{2}$所在象限. 如图4-1-3.

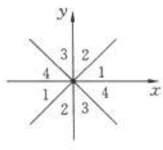


图 4-1-3

说明：①方法一是基本方法，用此法不但可以判定$\frac{\alpha}{2}$所在的象限，还可以判断$\frac{\alpha}{3}$、2α等所在的象限.

②方法二较简捷，使用起来非常方便. 用类似的方法也可以判断$\frac{\alpha}{3}$的位置（把各象限三等分）.

例　已知角α为第四象限角，判断$\frac{\alpha}{2}$是第几象限角.

解：方法一：∵　α是第四象限角，

∴　$k\cdot360^\circ-90^\circ<\alpha<k\cdot360^\circ, k\in\mathbf{Z}$.

∴　$k\cdot180^\circ-45^\circ<\frac{\alpha}{2}<k\cdot180^\circ, k\in\mathbf{Z}$.

①当k为偶数，即$k=2n, n\in\mathbf{Z}$时，

则$n\cdot360^\circ-45^\circ<\frac{\alpha}{2}<n\cdot360^\circ$，

此时角$\frac{\alpha}{2}$是第四象限角.

②当k为奇数时，即$k=2n+1, n\in\mathbf{Z}$时，

则$n\cdot360^\circ+135^\circ<\frac{\alpha}{2}<n\cdot360^\circ+180^\circ$，

此时$\frac{\alpha}{2}$是第二象限角.

故$\frac{\alpha}{2}$是第二或第四象限角.

方法二：由图（4-1-3）可知$\frac{\alpha}{2}$是第二或第四象限角.

问题探究

六种角的区别与写法

(1)终边相同的角

终边相同的角是指具有同一条终边的角的集合. 其写法是在这条终边找出一个角，然后再加上360°或2π的整数倍. 注意前后两项的单位必须保持一致. 例如：与$\frac{\pi}{3}$终边相同的角的集合为：$\left\{\beta\,\middle|\,\beta=k\cdot2\pi+\frac{\pi}{3}, k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(2)终边共线的角

这种角的写法有二：一是分别写出每条终边所代表的角的集合，再取并集；二是在其中一条终边上找出一个角，然后再加上180°或π的整数倍. 例如：终边落在第一、三象限角平分线上的角的集合可写作：$\{\beta|\beta=k\cdot180^\circ+45^\circ, k\in\mathbf{Z}\}$.

(3)轴线角

轴线角是指角的终边落在坐标轴上的角的集合. 其写法与“终边共线的角”的写法相同. 例如：终边落在y轴上的角的集合为：$\{\alpha|\alpha=k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\}$；终边落在坐标轴上所有的角的集合为$\{\alpha|\alpha=\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\}$.

(4)区间角

介于两个角之间的角的集合叫区间角. 例如：$60^\circ\leqslant x\leqslant150^\circ$，$-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}$.

(5)区域角

介于某两条终边间的角的集合叫区域角. 显然区域角是无数个区间角的集合. 其写法是：首先依逆时针方向由小到大找到一个区间角，然后再在两端加$2k\pi$或$k\cdot360^\circ$ $(k\in\mathbf{Z})$. 例如：$2k\pi-\frac{\pi}{3}<\alpha<2k\pi+\frac{\pi}{3}, k\in\mathbf{Z}$.

(6)象限角

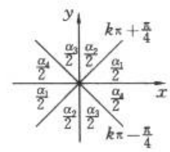


图 4-1-4

象限角是由终边的位置落在第几象限而得名的. 它是特殊的区域角. 如果用α_1，α_2，α_3，α_4表示第一、二、三、四象限角，则$\frac{\alpha_1}{2}$，$\frac{\alpha_2}{2}$，$\frac{\alpha_3}{2}$，$\frac{\alpha_4}{2}$分布如图4-1-4.

潜能开发

轻松学习　夯实基础

一、选择题

1. 若α是第一象限角，则下列各角中为第四象限的角是(　　)
   A. $90^\circ-\alpha$　　B. $90^\circ+\alpha$
   C. $360^\circ-\alpha$　　D. $180^\circ+\alpha$
2. (2005年烟台期末)与-457°角终边相同的角的集合是(　　)
   A. $\{\alpha|\alpha=k\cdot360^\circ+457^\circ, k\in\mathbf{Z}\}$
   B. $\{\alpha|\alpha=k\cdot360^\circ+97^\circ, k\in\mathbf{Z}\}$
   C. $\{\alpha|\alpha=k\cdot360^\circ+236^\circ, k\in\mathbf{Z}\}$
   D. $\{\alpha|\alpha=k\cdot360^\circ+263^\circ, k\in\mathbf{Z}\}$
3. 若α是第一象限角，则$-\frac{\alpha}{2}$是(　　)
   A. 第一象限角　　B. 第一或第四象限角
   C. 第二象限角　　D. 第二或第四象限角
4. 若角α与β的终边互为反向延长线，则有(　　)
   A. $\alpha=\beta$
   B. $\alpha=(2k+1)\cdot180^\circ-\beta, k\in\mathbf{Z}$
   C. $\alpha=-\beta$
   D. $\alpha=(2k+1)\cdot180^\circ+\beta, k\in\mathbf{Z}$

5. 若角 α 与 β 的终边垂直，则 α 与 β 的关系是(　　)

A. $\beta=\alpha+90°$

B. $\beta=\alpha\pm90°$

C. $\beta=\alpha+90°+k\cdot360°, k\in\mathbf{Z}$

D. $\beta=\alpha\pm90°+k\cdot360°, k\in\mathbf{Z}$

6. (2005 年上海模拟)下列说法中，正确的是(　　)

①始边相同，顶点相同，终边也相同的角一定相等

②两等角的始边相同，顶点相同，则终边一定相同

③若 θ 是第一象限角，则 $\frac{\theta}{2}$ 有可能是第三象限的角

④若 θ 的终边不在第一、二象限，则它在第三、四象限

A. ②　　　　B. ①②

C. ②③　　　　D. ②④

二、填空题

7. 与 $-496°$ 终边相同的角是______；它是第______象限的角；它们中的最小正角是________；最大负角是________.

8. 终边在直线 $y=x$ 上的角的集合是________.

9. 以下四个命题：

①小于 $90°$ 的角是锐角

②钝角是第二象限角

③第一象限角一定不是负角

④第二象限角不大于第一象限角

其中正确的序号是________.

10. 如图 4-1-5，写出终边落在阴影部分(含边界)的角的集合为________.

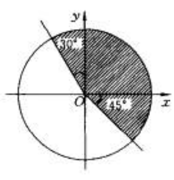


图 4-1-5

快乐延伸　提升能力

1. (教材变型题)若角 α 的终边所在的直线经过点 $(1,1)$，试写出与角 α 的终边相同的角的集合 A.

2. (多解题)集合 $M=\{\alpha\,|\,\alpha=k\cdot90°+135°, k\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{\theta\,|\,\theta=k\cdot45°+90°, k\in\mathbf{Z}\}$，则下列关系中正确的是(　　)

A. $M=N$　　　　B. $M\supsetneqq N$

C. $M\subsetneqq N$　　　　D. $M\cap N=\varnothing$

3. (多变题)如果角 α 与角 β 的终边重合，求 α 与 β 的关系.

(1)(一变)如果角 α 与角 β 的终边关于 x 轴对称，求 α 与 β 的关系.

(2)(二变)如果角 α 与角 β 的终边关于 y 轴对称，求 α 与 β 的关系.

(3)(三变)如果角 α 与角 β 的终边关于原点对称，求 α 与 β 的关系.

(4)(四变)如果角 α 与角 $x+45°$ 的终边重合，角 β 与角 $x-45°$ 的终边重合，求 $\alpha-\beta$.

4. (新解法题)已知 α 是第二象限角，试判断 $\frac{\alpha}{2}$ 是第几象限角，$\frac{\alpha}{3}$ 是第几象限角？

5. (新情境题)2003 年 10 月 15 日上午 9 时，中国航天员杨利伟乘坐的"神舟"五号载人飞船，在酒泉卫星发射中心用"长征二号 F"型运载火箭发射升空. 按预定轨道环绕地球十四圈，在太空飞行 21 小时 18 分，16 日 6 时 23 分，在我国内蒙古自治区中部地区着陆成功，中国首次载人航天飞行任务获得圆满成功. 若飞船在距地面 343 公里的太空中绕地球作匀速圆周运动，90 分钟绕地球一圈，地球的平均半径为 6 738 公里，试计算：

(1)飞船绕地球 14 周共转过的角度是多少？

(2)在太空中，杨利伟与家人进行了一场特别的通话，通话时间为 4 分 50 秒，在这段时间里，飞船转过的角度是多少？飞船走了多少公里(学完下节内容可做)？

6. (易错题)若角 α、β 满足 $-90°<\alpha<\beta<190°$，求 $2\beta-\alpha$ 的范围.

思维拓展　综合创新

1. (探究题)在角的集合 $\{\alpha\,|\,\alpha=k\cdot90°+60°, k\in\mathbf{Z}\}$ 中，(1)有多少种终边不相同的角？写出其中是第四象限的角的一般表示；(2)属于区间 $(-720°, -360°)$ 的角.

2. (开放题)如图 4-1-6,阴影表示角 α 的终边所在位置,写出角 α 的集合.

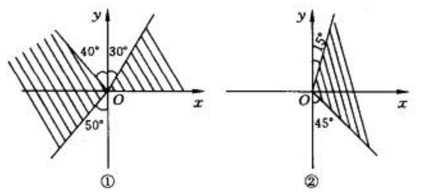


图 4-1-6

3. (竞赛题)已知集合 $A=\{\alpha \mid 30^\circ+k\cdot180^\circ<\alpha<90^\circ+k\cdot180^\circ, k\in\mathbf{Z}\}$,集合 $B=\{\beta \mid -45^\circ+k\cdot360^\circ<\beta<45^\circ+k\cdot360^\circ, k\in\mathbf{Z}\}$,求 $A\cap B$.

4.2　弧度制

学海导航

弧度制作为一种度量角的制度,一种单位、一种工具,可以与其他的度量制度类比着去学习,比如度量长度的米,温度的℃等,都是先定义单位量的大小.因此,用弧度制去度量角,就应该先定义 1 弧度的角,这是学好本节的基础.从近十年高考来看,凡是考查三角函数内容的,大多数用弧度制来表示角,用角度制的很少.

精彩视点

1. 在同一个式子中,两种单位不能混用.

例　写出与 30°角终边相同的角的集合.

错解:与 30°角终边相同的集合为 $\{\alpha \mid \alpha=2k\pi+30^\circ, k\in\mathbf{Z}\}$.

正解:$\left\{\alpha \,\middle|\, \alpha=2k\pi+\frac{\pi}{6}, k\in\mathbf{Z}\right\}$ 或 $\{\alpha \mid \alpha=k\cdot360^\circ+30^\circ, k\in\mathbf{Z}\}$.

错解分析:在同一个题中,单位要统一.

2. 在书写角时,"弧度"两个字常省略不写,但用角度表示时,"度"(或"°")不能省略.如 sin 1 与 sin 1°的区别,sin 1表示"1 弧度"角的正弦,而 sin 1°表示"1 度"角的正弦.

3. 弧长公式与扇形面积公式

(1)在角制度中,弧长公式为:$l=\frac{\pi r}{180}\cdot n$.

扇形面积公式为:$S=\frac{\pi}{360}nr^2$.

(其中 n 为圆心角的度数)

(2)在弧度制中,弧长公式为:$l=\alpha r$.

扇形面积公式为:$S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}\alpha r^2$.

(其中 α 为圆心角的弧度数,$0\leqslant\alpha\leqslant2\pi$)

从以上形式来看,使用弧度制后,弧长公式及扇形面积公式形式特别简单,因而使用起来更为方便.

例　一个扇形的面积是 1 cm^2,它的周长是 4 cm,求圆心角的弧度数.设扇形的半径为 r,圆心角为 α.则弧长 $l=\alpha\cdot r$.

由题意可知:

$$\begin{cases}\alpha r+2r=4,\\ \frac{1}{2}\alpha r^2=1,\end{cases}\quad 解得\begin{cases}\alpha=2,\\ r=1.\end{cases}$$

∴　扇形的圆心角为 2 rad.

点评:本例把弧长公式、扇形面积公式结合起来,最后统一成 α、r 的方程组使问题得以解决.这便是方程思想的运用.

典例精析

1. 学科综合　思维激活

例 1　(1)把时钟拨慢了 20 分钟,分针所转过的角的弧度数为________.

(2)时钟转过 2 小时 15 分,分针转过的角的弧度数为________.

解析:(1)因为经过 1 小时,分钟转 -360° 即 -2π rad,所以拨慢 20 分钟,分针转过的弧度数为 $\frac{20}{60}\times(2\pi)=\frac{2\pi}{3}$(rad).

(2)经过 2 小时 15 分,分针转过的角的弧度数为:

$\left(2+\frac{15}{60}\right)\times(-2\pi)=-\frac{9}{2}\pi$(rad).

温馨提示:(1)要分清角的正负;(2)要熟悉特殊角的弧度数.

例 2　把下列各角写成 $2k\pi+\alpha(0\leqslant\alpha<2\pi, k\in\mathbf{Z})$ 的形式,并指出是第几象限的角.

(1)$\frac{23\pi}{6}$;　(2)$-1\ 500^\circ$.

解:(1)$\frac{23}{6}\pi=2\pi+\frac{11}{6}\pi$,是第四象限角.

∴　$\frac{23}{6}\pi$ 是第四象限角.

(2)$-1\ 500^\circ=-1\ 500\times\frac{\pi}{180}=-\frac{25}{3}\pi=-10\pi+\frac{5\pi}{3}$,

∵　$\frac{5\pi}{3}$是第四象限角.

∴　$-1\ 500^\circ$是第四象限角.

温馨提示:不要把 $\frac{23}{6}\pi$ 化成 $3\pi+\frac{5\pi}{6}$,从而得出 $\frac{23}{6}\pi$ 是第二象限角的错误结果.判定一个角是第几象限角,应把这个角表示成 π 的偶数倍与角 α 的和的形式(其中 $0\leqslant\alpha<2\pi$),再去判定.

2. 创新应用　思维激活

例 3　扇形的周长为 20 cm,当扇形的圆心角为何值时,它的面积最大?并求出最大面积.

解:方法一:设扇形的圆心角为 α,半径为 r,面积为 S,则弧长为 $l=20-2r$.

∴ $20-2r=r\cdot\alpha$, ∴ $r=\dfrac{20}{2+\alpha}$.

∴ $S=\dfrac{1}{2}lr=\dfrac{1}{2}r^2\alpha=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{20}{2+\alpha}\right)^2\cdot\alpha$.

可化为 $S\alpha^2+4(S-50)\alpha+4S=0$.

∵ $\alpha\in\mathbf{R}$. ∴ $\Delta=16(S-50)^2-16S^2\geqslant0$.

解得 $S\leqslant25$, ∴ $S_{最大}=25$.

此时 $\dfrac{200\alpha^2}{(2+\alpha)^2}=25$,得 $\alpha=2$.

方法二:$S=\dfrac{1}{2}lr=\dfrac{1}{2}(20-2r)\cdot r=-r^2+10r=-(r-5)^2+25$.

∴ 当 $r=5$ 时,$S_{最大}=25$.

此时 $l=20-2\times5=10$,$\alpha=\dfrac{l}{r}=\dfrac{10}{5}=2$.

温馨提示:解这类题目要弄清弧长 l、圆的半径 r、圆心角的弧度数 α 与扇形面积 S 之间的关系,即掌握弧长公式 $l=\alpha r$ 及扇形面积公式 $S_{扇形}=\dfrac{1}{2}lr=\dfrac{1}{2}\alpha r^2$.

例 4 解答下列各题:

(1)已知扇形的周长为 10 cm,面积为 4 cm²,求扇形圆心角的弧度数;

(2)已知一扇形的圆心角是 72°,半径等于 20 cm,求扇形的面积;

(3)已知一扇形的周长为 40 cm,当它的半径和圆心角取什么值时,才能使扇形的面积最大?最大面积是多少?

解:(1)设扇形圆心角的弧度数为 $\theta(0<\theta<2\pi)$,弧长为 l,半径为 r.

由题意得 $\begin{cases}l+2r=10,\\ \dfrac{1}{2}lr=4,\end{cases}$ 解得 $r_1=1$,$r_2=4$.

当 $r=1$ 时,$l=8$(cm),此时 $\theta=8>2\pi$(舍),

当 $r=4$ 时,$l=2$(cm),此时 $\theta=\dfrac{1}{2}$.

∴ 扇形圆心角的弧度数是 $\dfrac{1}{2}$.

(2)设扇形弧长为 l.

∵ $72^\circ=72\times\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{2\pi}{5}$,

∴ $l=\alpha r=\dfrac{2\pi}{5}\times20=8\pi$(cm),

∴ $S=\dfrac{1}{2}lr=\dfrac{1}{2}\times8\pi\times20=80\pi$(cm²).

∴ 扇形的面积为 80π cm².

(3)设扇形的圆心角为 θ,半径为 r,弧长为 l,面积为 S,则 $l+2r=40$,$l=40-2r$.

∴ $S=\dfrac{1}{2}lr=\dfrac{1}{2}(40-2r)r=20r-r^2=-(r-10)^2+100$.

当 $r=10$ cm 时,扇形的面积最大,这个最大值是 100 cm²,此时 $\theta=\dfrac{l}{r}=\dfrac{40-2\times10}{10}=2$.

∴ 当它的半径和圆心角分别取 10 cm 和 2 弧度时,才能使扇形的面积最大,最大面积为 100 cm².

温馨提示:从圆心角、弧长、半径、扇形面积之间的联系下手.

3. 诱思探索 思维激活

例 5 设半径为 12 cm、弧长为 8π cm 的弧所对圆心角为 α,α 在 $0\sim2\pi$ 间,求出与角 α 终边相同的角的集合 A,并判断 A 是否为 $B=\{\theta|\theta=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}\}$ 的真子集.

解:设半径为 12 cm、弧长为 8 cm 的弧所对圆心角为 α,∵α 在 $0\sim2\pi$ 间,∴$\alpha=\dfrac{2}{3}\pi$,与角 α 终边相同的角的集合 $A=\{\alpha|\alpha=2k\pi+\dfrac{2\pi}{3},k\in\mathbf{Z}\}$.

∵ $B=\{\theta|\theta=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}\}$,

∴ 令 $k=4n+1(n\in\mathbf{Z})$,则

$\theta=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6}=2n\pi+\dfrac{2\pi}{3}(n\in\mathbf{Z})$,

∴ $A\subseteq B$.

又∵ $\dfrac{\pi}{6}\in B$ 而 $\dfrac{\pi}{6}\notin A$,∴ $A\subsetneqq B$.

温馨提示:利用求角的弧度数公式 $|\alpha|=\dfrac{l}{r}$,求出 α,然后写出与角 α 终边相同的角的集合,再与集合 B 比较而得出 A 与 B 的关系.

例 6 设 $0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$,求 $\alpha-\beta$ 的范围.

解析:$\left.\begin{array}{l}0<\beta<\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow-\dfrac{\pi}{2}<-\beta<0\\ 又\ 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow-\dfrac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\dfrac{\pi}{2}\\ 又\ \alpha<\beta\Rightarrow\alpha-\beta<0\end{array}\right\}\Rightarrow-\dfrac{\pi}{2}<\alpha-\beta<0$.

温馨提示:注意题中所给的条件或隐含条件,否则可能会出现∵ $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$,∴ $-\dfrac{\pi}{2}<-\beta<0$,又∵ $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$,∴ $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\dfrac{\pi}{2}$ 的错误.

4. 高考经典 思维激活

例 7 (2002,北京春招)若 α 满足$(\sin2\alpha)<0$,$\cos\alpha-\sin\alpha<0$,则 α 在( )

A. 第一象限 B. 第二象限

C. 第三象限 D. 第四象限

解析:B.

温馨提示:由 $\sin2\alpha<0$,得 $2k\pi<2\alpha<2k\pi+2\pi$,即 $k\pi+\dfrac{\pi}{2}<\alpha<k\pi+\pi$,$\alpha$ 在第二或第四象限,又因为 $\cos\alpha-\sin\alpha<0$,可知 α 在第二象限.

例 8 (2005 年高考模拟)已知集合 $M=\left\{x|x=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$,$P=\left\{x|x=\dfrac{k\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$,则( )

A. $M=P$ B. $M\supsetneqq P$

C. $M\subsetneqq P$ D. $M\cap P=\varnothing$

解析:首先研究集合 $M=\left\{x \mid x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}, k\in \mathbf{Z}\right\}$.

∵　由第一节我们知道角 $x=\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 的终边落在坐标轴上,

∴　角 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$ 的终边落在直线 $y=\pm x$ 上.

下面研究集合 $P=\left\{x \mid x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\right\}$:

1) 当 $k=4n(n\in\mathbf{Z})$ 时,

$x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=\frac{4n\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=n\pi+\frac{\pi}{2}$,它的终边落在 y 轴上;

2) 当 $k=4n+1(n\in\mathbf{Z})$ 时,

$x=\frac{kn}{4}+\frac{\pi}{2}=\frac{(4n+1)\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=n\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$,它的终边落在 $y=-x$ 上;

3) 当 $k=4n+2(n\in\mathbf{Z})$ 时,

$x=\frac{kn}{4}+\frac{\pi}{2}=\frac{(4n+2)\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=n\pi+\pi$,它的终边落在 x 轴上;

4) 当 $k=4x+3,(n\in\mathbf{Z})$ 时,

$x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=\frac{(4n+3)\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=n\pi+\pi+\frac{\pi}{4}$,它的终边落在 $y=x$ 上.

综合上面几种情况可得 $M\subsetneqq P$.

∴　应选 C.

温馨提示:适时地进行逻辑划分、分类讨论,是解好这类问题的关键一环.

方法平台

弧度制在生活实际中的应用

随着素质教育的进一步推进,要求学生应用所学知识解决实际问题的趋势日益明显.增强学生数学社会化功能的意识,培养学生的应用意识和创新精神,掌握解决实际问题的基本方法,具有十分重要的意义.

1. 时钟长、短针的夹角

例 1　当 12 点过 $\frac{1}{4}$ 小时的时候,时钟长、短针的夹角是多少弧度?

解析:从 12 点开始,过 $\frac{1}{4}$ 小时后,即过 15 分钟,分针转过的弧度数为 $\frac{\pi}{2}$,同时,时针转过的弧度数为 $\frac{\pi}{24}$,则时针长、短针的夹角是 $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{24}\pi=\frac{11}{24}\pi(\mathrm{rad})$.

2. 质点运动的角度

例 2　如图所示,半径为 1 的圆的圆心位于坐标原点,点 P 从 A 点出发以逆时针方向等速沿单位圆周旋转,已知 P 在 1 秒内转动的角度为 $\theta(0<\theta<\pi)$,经过两秒钟达到第三象限,经过 14 秒后又恰好回到出发点 A,求 θ.

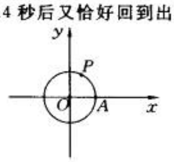


图 4-2-1

解析:质点 P 重回 A 点的数学语言即 14θ 的终边与 x 正半轴重合,利用 $0<\theta<\pi$ 的范围,寻找角 θ.

∵　$0<\theta<\pi$,且

$2k\pi+\pi<2\theta<2k\pi+\frac{3\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,

则必有 $k=0$,于是 $\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3\pi}{4}$.

又∵　$14\theta=2n\pi(n\in\mathbf{Z})$,

∴　$\theta=\frac{n\pi}{7}$,从而 $\frac{\pi}{2}<\frac{n\pi}{7}<\frac{3\pi}{4}$,$\frac{7}{2}<n<\frac{21}{4}$.

∴　$n=4$ 或 5,故 $\theta=\frac{4}{7}\pi$ 或 $\frac{5}{7}\pi$.

3. 扇形中心角与面积的最值

例 3　已知一扇形的周长为 $P(P>0)$,当扇形的中心角为多大时,它有最大的面积?

解:将扇形的面积表示成中心角的函数后,求该函数取得最大值时的中心角.

设扇形的半径为 R,中心角为 θ,扇形的面积为 S,则 $P=2R+R\theta$,于是 $R=\frac{P}{2+\theta}$.

$$\text{故 } S=\frac{1}{2}R^2\theta=\frac{1}{2}\left(\frac{P}{2+\theta}\right)^2\cdot\theta$$

$$=\frac{P^2}{2}\cdot\frac{\theta}{\theta^2+4\theta+4}.$$

令 $S'=\frac{\theta}{\theta^2+4\theta+4}$,现构造一元二次方程,用判别式求解,即得 $S'\theta^2+(4S'-1)\theta+4S'=0$.

∵　$\Delta=(4S'-1)^2-4S'\cdot 4S'\geqslant 0$,

∴　$S'\leqslant\frac{1}{8}$.

当 $S'=\frac{1}{8}$ 时,$\theta=2$,得 $S\leqslant\frac{P^2}{16}$,即当中心角 $\theta=2$ 时,扇形有最大的面积 $S_{\max}=\frac{P^2}{16}$.

4. 月球的公转与自转

例 4　若近似地认为月球绕地球公转与地球绕日公转的轨道在同一平面内,且均为正圆,又知这两种转动同向,如图所示,月相变化的周期为 29.5 天(图中是相继两次满月时月、地、日相对位置示意图).

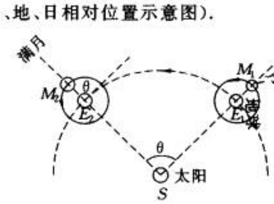


图 4-2-2

(1)求月球绕地球一周所用的时间 T(因月球总是一面朝向地球,故 T 恰好是月球的自转周期);

(2)地球绕日旋转一周约需 365.25 天,其间月球绕地球转动了多少圈?(精确到百分位)

解:设一个月相周期地球公转 θ 弧度,则月球转过了 $2\pi+\theta$ 弧度,故月球绕地球一周需 $\frac{2\pi}{2\pi+\theta}\times 29.5$ 天,故

$$T=\frac{2\pi\times 29.5}{2\pi+\frac{29.5}{365.25}\times 2\pi}\approx 27.3(\text{天}).$$

$\frac{365.25}{27.3}\approx 13.38$.

即月球自转周期为 27.3 天,一年中月球转了 13.38 圈.

问题探究

角的概念推广后,弧的概念自然也应加以推广,而弧度制的引入,使弧的概念自然就得到了推广,圆周长的 $\frac{1}{360}$ 的弧所对的圆心角叫做 1 度的角,此弧称为 1 度的弧.长度为圆的半径 r 的弧对的圆心角为 1 弧度(rad)的角,圆心角为 1 rad 的角所含的弧称为 1 弧度的弧.

弧度制使角的集合与实数集之间建立了一一对应的关系.因此,弧的集合也与实数集之间建立了一一对应,这只需弧与自己的弧度数相对应.角有正负之分,弧亦有正负之别.

弧度概念的建立,其实质为我们指出了还可以有其他的度量角的制度和度量弧的制度,军事上精确度量要求更高的角的密位度量制,它是把圆周分成 6 000 等份(有些国家分成 6 300、6 400 等份),每一等份弧所对的圆心角为 1 密位.1 密位的弧的长度约为圆半径的千分之一,故密位又称千分.

易知 6 000 密位 $=2\pi$ rad $=360°$.

弧度制与角度制及有关弧度的概念,在日常生活中都有广泛的应用,我们平时见到的时钟,以前戴过(现在还有)的机械手表的时针、分针的转动,实质都是反映角的变化.因此时间的度量时、分、秒,与角 2π rad、$\frac{\pi}{30}$ rad、$\frac{\pi}{1\,800}$ rad相对应,出于方便的原因才使用时、分、秒.下面的例题也反映了它们之间的联系.

例 在一般的时钟上,自零时刻到分针与时针第一次重合,分针所转过角的弧度数是多少?

解:自零时(此时时针与分针重合,均指向 12),到分针与时针第一次重合,设时针转过 x 弧度,则分针转过 $2\pi+x$ 弧度.

$\because$ 时针走 1 弧度相当于经过 $\frac{6}{\pi}$ 小时 $=\frac{360}{\pi}$ 分,分针走一弧度角相当于经过 $\frac{30}{\pi}$ 分,$\therefore$ $\frac{360}{\pi}x=\frac{30}{\pi}(2\pi+x)$,

$\therefore$ $x=\frac{2\pi}{11}$.

$\because$ 时钟指针是顺时针转动,$\therefore$ 到分针与时针第一次重合,分针转过角的弧度数是 $\frac{2\pi}{11}+2\pi=\frac{24\pi}{11}$.

潜能开发

轻松学习 夯实基础

一、选择题

1. 将分针拨慢 10 分钟,则分针转过的弧度是(　　)
   A. $\frac{\pi}{3}$　B. $-\frac{\pi}{3}$　C. $\frac{\pi}{6}$　D. $-\frac{\pi}{6}$
2. (2005 年日照模拟)集合 $A=\{x \mid x=k\pi+(-1)^k\cdot\frac{\pi}{2},k\in \mathbf{Z}\}$,$B=\{x \mid 2=2kx+\frac{\pi}{2},k\in \mathbf{Z}\}$,则 A、B 的关系为(　　)
   A. $A\subsetneqq B$　B. $A\supsetneqq B$
   C. $A=B$　D. $A\cap B=\varnothing$
3. 若 $\alpha=6$,则 α 是(　　)
   A. 第一象限角　B. 第二象限角
   C. 第三象限角　D. 第四象限角
4. 半径为 3 m 的圆中,有一条弧长的长度是 $\frac{\pi}{2}$ m,此弧所对的圆周角是(　　)
   A. 30°　B. 15°　C. 40°　D. 120°
5. 集合 $A=\{\alpha \mid \alpha=\frac{k\pi}{3},k\in \mathbf{Z}\}$,$B=\{\alpha \mid -\pi\leqslant\alpha<\pi\}$,则 $A\cap B$ 等于(　　)
   A. $\left\{0,\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\pi,\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right\}$
   B. $\left\{\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\pi,\frac{4\pi}{3}\right\}$
   C. $\left\{-\pi,-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{3},0,\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right\}$
   D. $\left\{-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{3},0,\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right\}$
6. (2005 年天津模拟)下列各组角中,终边相同的是(　　)
   A. $(2k+1)\pi$ 与 $(4k\pm1)\pi$,$k\in \mathbf{Z}$
   B. $\frac{k\pi}{2}$ 与 $k\pi+\frac{\pi}{2}$,$k\in \mathbf{Z}$
   C. $k\pi+\frac{\pi}{6}$ 与 $2k\pi\pm\frac{\pi}{6}$,$k\in \mathbf{Z}$
   D. $k\pi+\frac{\pi}{6}$ 与 $\frac{k\pi}{3}$,$k\in \mathbf{Z}$

二、填空题

7. 半径为 2 的圆中,$\frac{\pi}{3}$ 弧度圆周角所对的弧长是________,长为 2 的弧所对的圆心角的弧度是________.
8. 若三角形三内角之比为 3∶5∶7,则三内角的弧度数分别是________.
9. 一钟表的分针长 5 cm,经过 40 分钟,分针端点所转过的弧长是________.
10. 在直径为 10 cm 的轮上有一长 6 cm 的弦,P 是弦的中点,轮子以每秒 5 弧度的角速度旋转,则经过 5 秒钟后,点 P 转过的弧长是________.

快乐延伸 提升能力

1. (教材变型题)已知一个半径为 r 的扇形的周长等于弧所在的半圆的长,求扇形的圆心角和面积.

2. (多变题)若已知扇形的周长为 20 cm,当它的半径和圆心角各取什么值时,才能使扇形的面积最大?最大面积是多少?
(1)(一变)若已知 1 弧度的圆心角所对的弦长为 2,求这个圆心角所夹扇形的面积.
(2)(二变)若已知扇形的面积为 S,当扇形的中心角为多少弧度时,扇形的周长最小?并求出此最小值.

3. (新情境题)激光是一种新型的光源,有方向性高等特点,一束激光光束的发射角可以小到 $0.09'$,那么从地球上发射到38万公里以外的月球上的激光束,在月球上照出的光斑的直径如何?

4. (易错题)已知 $\pi<\alpha+\beta<\frac{4}{3}\pi$, $-\pi<\alpha-\beta<-\frac{\pi}{3}$,求 $2\alpha-\beta$ 的范围.

思维拓展　综合创新

1. (探究题)已知集合 $A=\{\alpha\mid k\pi<\alpha<(2k+1)\pi, k\in \mathbf{Z}\}$,集合 $B=\{\alpha\mid -4\leqslant\alpha\leqslant 4\}$,求 $A\cap B$ 及 $A\cup B$.

2. 如图,已知长为 $\sqrt{3}$ dm,宽为 1 dm 的长方形木块,在桌面上无滑动地翻滚,翻滚到第四次时被一小木板挡住,使木板底面与桌面成30°的角,问点 A 走过的路程及走过的弧度所在的扇形的总面积.

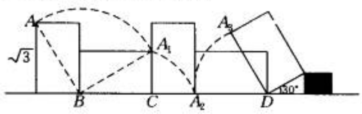


图 4-2-3

3. (趣味题)视力正常的人,能读远处文字的视角不小于 $5'$,试求:

(1)离人 10 cm 处所能阅读文字的大小如何?

(2)要看清长宽约为 5 m 的大字标语,人离开标语的最远距离为多少?

4. 某人在3时与4时之间,见表的时针与分针同位,求此刻时间.

4.3　任意角的三角函数

任意角三角函数的定义是学好本节内容的关键所在,在学习任意角三角函数的定义时,可以和初中学习的三角函数的定义类比学习,只不过这里把锐角三角函数中定义的三角函数放在了平面直角坐标系中,关于三角函数的定义域,及三角函数值在各象限的符号都可以根据定义得到.三角函数线体现了数形结合的数学思想方法,在解题时往往起到事半功倍的效果,在学习时要紧扣它是有向线段.

1. 终边相同的角的同一三角函数值相等,但三角函数相等的角终边不一定相同,如 $\sin 30°=\sin 150°=\frac{1}{2}$,但30°与150°的终边不相同.

2. 在确定角的范围时,不要忽略了终边在坐标轴上的角不在任何象限,如 $\cos\alpha<0$ 是 α 是第二或第三象限角的必要不充分条件.因为 $\cos\alpha=-1(\cos\alpha<0)$ 时,α 的终边在 x 轴的负半轴上.

3. 在已知角的终边上一点的坐标求各三角函数值时,若坐标是用字母给出的,应注意分类讨论.

例　已知角 α 的终边在直线 $y=-3x$ 上,求 $10\sin\alpha+3\sec\alpha$ 的值.

错解:在 $y=-3x$ 上取点 $(1,-3)$,则

$r=\sqrt{1+(-3)^2}=\sqrt{10}$, $x=1$, $y=-3$.

∴　$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{-3}{\sqrt{10}}=-\frac{3}{10}\sqrt{10}$, $\sec\alpha=\frac{r}{x}=\frac{\sqrt{10}}{1}=\sqrt{10}$.

∴　$10\sin\alpha+3\sec\alpha=10\cdot\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)+3\sqrt{10}=0$.

正确解法:设 α 终边上一点 P 的坐标为 $(k,-3k)(k\neq 0)$,则

$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{k^2+(-3k)^2}=\sqrt{10}|k|$.

当 $k>0$ 时,α 的终边在第四象限,$r=\sqrt{10}k$.

∴　$\sin\alpha=\frac{-3k}{\sqrt{10}k}=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\sec\alpha=\frac{\sqrt{10}k}{k}=\sqrt{10}$.

∴　$10\sin\alpha+3\sec\alpha=-3\sqrt{10}+3\sqrt{10}=0$.

当 $k<0$ 时,α 的终边在第二象限,$r=-\sqrt{10}k$.

∴　$\sin\alpha=\frac{-3k}{-\sqrt{10}k}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\sec\alpha=\frac{-\sqrt{10}k}{k}=-\sqrt{10}$.

∴　$10\sin\alpha+3\sec\alpha=3\sqrt{10}-3\sqrt{10}=0$.

综上,当 α 的终边在直线 $y=-3x$ 上时,$10\sin\alpha+3\sec\alpha=0$.

错解分析:尽管角的终边给定后,α 的三角函数值与 α 终边上点 P 的位置无关,但 α 的终边应落在射线上,而本

例是直线 $y=-3x$，故应就 P 点在原点两侧进行讨论，这是需要注意的地方.

1. 学科综合　思维激活

例 1　求函数 $y=\dfrac{\sin \alpha+\cos x}{\tan x}$ 的定义域.

解：要使函数有意义，需 $\tan x\neq 0$ 有意义，

$\therefore$　$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k\in \mathbf{Z}$ 且 $x\neq k\pi, k\in \mathbf{Z}$.

$\therefore$　$x\neq \dfrac{k}{2}\pi, k\in \mathbf{Z}$.

$\therefore$　函数的定义域是 $\{x \mid x\neq \dfrac{k}{2}\pi, k\in \mathbf{Z}\}$.

温馨提示：注意不要忽视三角函数本身的定义域.

例 2　化简下列各式.

(1) $a^2\sin(-1\ 350°)+b^2\tan 405°-(a-b)^2\cot 765°-2ab\cos(-1\ 080°)$；

(2) $\sin(-\dfrac{11}{6}\pi)+\cos\dfrac{12\pi}{5}\cdot\tan 4\pi-\sec\dfrac{13}{3}\pi$.

解：(1) 原式 $=a^2\sin(-4\times 360°+90°)+b^2\tan(360°+45°)-(a-b)^2\cot(2\times 360°+45°)-2ab\cos(-3\times 360°)$

$=a^2\sin 90°+b^2\tan 45°-(a-b)^2\cot 45°-2ab\cos 0°$

$=a^2+b^2-(a-b)^2-2ab=0$.

(2) 原式 $=\sin\left(-2\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)+\cos\dfrac{12\pi}{5}\cdot\tan 0-\sec\left(4\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\dfrac{\pi}{6}-\sec\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}-2=-\dfrac{3}{2}$.

温馨提示：先将任意三角函数化为 $0\sim 2\pi$(或 $0°\sim 360°$)内角的三角函数，要注意特殊角的三角函数值的使用.

2. 创新应用　思维激活

例 3　求函数 $y=\dfrac{\tan\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\sqrt{\sin x}}{\lg(2\cos x-1)}$ 的定义域.

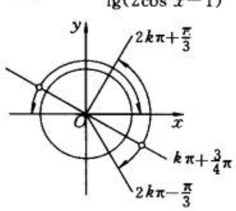


图 4-3-1

解析：只需满足条件 $\begin{cases} x-\dfrac{\pi}{4}\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z}), \\ \sin x\geqslant 0, \\ \lg(2\cos x-1)\neq 0. \end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases} x\neq k\pi+\dfrac{3}{4}\pi, \\ \sin x\geqslant 0, \\ 0<2\cos x-1\neq 1. \end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases} x\neq k\pi+\dfrac{3\pi}{4}(k\in\mathbf{Z}), \\ 2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi(k\in\mathbf{Z}), \\ 2k\pi-\dfrac{\pi}{3}<x<2k\pi+\dfrac{\pi}{3}(x\neq 2k\pi, 且\ k\in\mathbf{Z}). \end{cases}$

$\therefore$　函数的定义域为 $\left\{x \mid 2k\pi<x<2k\pi+\dfrac{\pi}{3}, k\in\mathbf{Z}\right\}$.

温馨提示：数形结合，利用图形可直观地找出不等式的解集.

例 4　已知 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，试比较 α、$\sin\alpha$、$\tan\alpha$ 的大小.

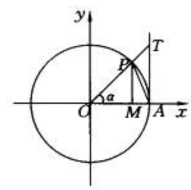


图 4-3-2

解：如图 4-3-2，设锐角 α 的终边交单位圆于点 P，过单位圆与 x 轴正半轴的交点 A 作圆的切线交 OP 延长线于 T，并过点 P 作 $PM\perp x$ 轴，则 $|MP|=\sin\alpha$，$|AT|=\tan\alpha$，$\overset{\frown}{AP}$ 的长为 α.

连结 PA.

$\because$　$S_{\triangle OAP}<S_{扇形OAP}<S_{\triangle OAT}$，

即 $\dfrac{1}{2}|OA|\cdot|MP|<\dfrac{1}{2}|OA|^2\cdot\alpha<\dfrac{1}{2}|OA|\cdot|AT|$.

$\therefore$　$|MP|<\alpha<|AT|$.

$\therefore$　$\sin\alpha<\alpha<\tan\alpha$.

温馨提示：利用三角函数线可使得代数中的三角函数和几何中的有向线段联系在一起.

3. 诱思探究　思维激活

例 5　设 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，求证：$\sin\alpha+\cos\alpha\leqslant\sqrt{2}$.

证法一：设 α 的终边上一点 $P(x,y)$，$x>0$，$y>0$，则 $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{x+y}{r}$(其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$).

$\because$　$(x+y)^2-(\sqrt{2}\cdot\sqrt{x^2+y^2})^2$

$=-(x-y)^2\leqslant 0$,

$\therefore$　$x+y\leqslant\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}$.

$\therefore$　$\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\leqslant\sqrt{2}$,

即 $\sin\alpha+\cos\alpha\leqslant\sqrt{2}$.

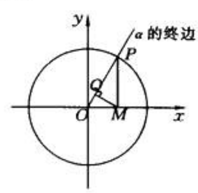


图 4-3-3

证法二：作出单位圆及相应的 α 的正弦线 MP，余弦线 OM(图 4-3-3)，即 $\sin\alpha=MP$，$\cos\alpha=OM$.

$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=(MP+OM)^2=MP^2+OM^2+2MP\cdot OM=1+2MP\cdot OM$,

过 M 作 $MQ\perp OP$ 于 Q 点，则 $MP\cdot OM=OP\cdot MQ=MQ$,

在 $\mathrm{Rt}\triangle OPM$ 中，$OP=1$,

$\therefore$　MQ 的最大值为 $\dfrac{1}{2}OP=\dfrac{1}{2}$,

$\therefore\ 1+2MP\cdot OM\leqslant 1+\frac{1}{2}\cdot 2=2$，即$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2\leqslant 2$，$\therefore\ \sin\alpha+\cos\alpha\leqslant\sqrt{2}$.

温馨提示：①利用三角函数的定义及要证的结论分析得证法一；

②建立坐标系，作出单位圆及正弦线、余弦线，根据图形得证法二.

例 6　设$0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$，试比较$\sin\alpha$与$\cos\alpha$的大小关系.

解：在单位圆中，$\sin\alpha=MP$，$\cos\alpha=OM$.

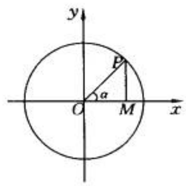


图 4-3-4

$\because\ 0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$，

$\therefore\ MP\geqslant 0, OM\geqslant 0$

（因$\sin\alpha\geqslant 0,\cos\alpha\geqslant 0$）.

$\therefore\ \sin\alpha=|MP|$，$\cos\alpha=|OM|$.

当$0<\alpha<\frac{\pi}{4}$时，$\frac{\pi}{4}<\angle OPM<\frac{\pi}{2}$，

$\therefore\ \angle OPM>\alpha$. $\therefore\ |OM|>|MP|$. $\therefore\ \cos\alpha>\sin\alpha$.

当$\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$时，$0<\angle OPM<\frac{\pi}{4}$，

$\therefore\ \alpha>\angle OPM$. $\therefore\ |MP|>|OM|$. $\therefore\ \sin\alpha>\cos\alpha$.

当$\alpha=0$时，$MP=|MP|=y=0$，$OM=|OM|=x=1$，

$\therefore\ \sin\alpha=0,\cos\alpha=1$. $\therefore\ \cos\alpha>\sin\alpha$.

当$\alpha=\frac{\pi}{4}$时，$\alpha=\angle OPM$，$\therefore\ |OM|=|MP|$.

$\therefore\ \sin\alpha=\cos\alpha$.

综上所述，当$0\leqslant\alpha<\frac{\pi}{4}$时，$\cos\alpha>\sin\alpha$；

当$\alpha=\frac{\pi}{4}$时，$\cos\alpha=\sin\alpha$；

当$\frac{\pi}{4}<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$时，$\sin\alpha>\cos\alpha$.

温馨提示：借助三角函数线.

4. 高考经典　思维激活

例 7　（1994年全国文、理）设θ是第二象限角，则必有（　　）

A. $\cot\frac{\theta}{2}>\tan\frac{\theta}{2}$　　B. $\tan\frac{\theta}{2}>\cot\frac{\theta}{2}$

C. $\sin\frac{\theta}{2}>\cos\frac{\theta}{2}$　　D. $\sin\frac{\theta}{2}<\cos\frac{\theta}{2}$

解析：θ是第二象限角，$\therefore\ 2k\pi+\frac{\pi}{2}<\theta<2k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}$.

$\therefore\ k\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$.

结合正切线可知$\tan\frac{\theta}{2}>1$，$\cot\frac{\theta}{2}<1$，$\therefore\ \tan\frac{\theta}{2}>\cot\frac{\theta}{2}$，故选 B.

温馨提示：利用θ的范围，可以求出$\frac{\theta}{2}$的范围，从而确定$\frac{\theta}{2}$所在的象限. 再结合正切线即可得到.

例 8　（1998年全国文、理）已知点$P(\sin\alpha-\cos\alpha,\tan\alpha)$在第一象限，则在$[0,2\pi]$内$\alpha$的取值范围是（　　）

A. $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3}{4}\pi\right)\cup\left(\pi,\frac{5\pi}{4}\right)$

B. $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\pi,\frac{5\pi}{4}\right)$

C. $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right)$

D. $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$

解析：点$P(\sin\alpha-\cos\alpha,\tan\alpha)$在第一象限，

$\therefore\ \sin\alpha-\cos\alpha>0,\tan\alpha>0$，$\therefore\ \sin\alpha>\cos\alpha$.

由$\tan\alpha>0$，知α在第一或第三象限，

结合$\sin\alpha>\cos\alpha$，由三角函数线可知选 B.

温馨提示：根据点P所在的象限，确定点的各坐标符号，进而确定出三角函数值的符号即可.

三角函数线的应用

（一）比较大小

例 1　如果$\theta\in\left(0,\frac{3}{4}\right)$那么（　　）

A. $\sin\theta<\cos\theta<\cot\theta$

B. $\cos\theta<\sin\theta<\cot\theta$

C. $\sin\theta<\cot\theta<\cos\theta$

D. $\cos\theta<\cot\theta<\sin\theta$

解析：如图作出单位图中的三角函数线

$\sin\theta=MP$，$\cos\theta=OM$，$\cot\theta=BS$

$\because\ MP<OM<BS$，$\therefore\ \sin\theta<\cos\theta<\cot\theta$

故选 A.

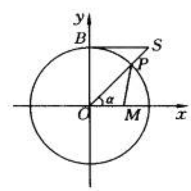


图 4-3-5

（二）解三角不等式

例 2　（2002年高考全国）在$(0,2\pi)$内，使$\sin x>\cos x$成立的x的取值范围是（　　）

A. $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\pi,\frac{5}{4}\pi\right)$

B. $\left(\frac{\pi}{4},\pi\right)$

C. $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5}{4}\pi\right)$

D. $\left(\frac{\pi}{4},\pi\right)\cup\left(\frac{5}{4}\pi,\frac{3}{2}\pi\right)$

解：在直角坐标系xoy中作第一、三象限角平分线，由阴影部分易知结果.

故选 C.

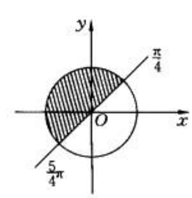


图 4-3-6

例 3　求函数$y=\lg(2\sin x-1)+\sqrt{1-2\cos x}$的定义域.

解析：由题意知