研究生教学用书　湖南省教育厅推荐

研究生数学基础课程系列教材

钱祥征　戴斌祥　刘开宇　编著

非线性常微分方程
理论　方法　应用

Feixianxing Changweifen Fangcheng
Lilun Fangfa Yingyong

Feixianxing Changweifen Fangcheng
Lilun Fangfa Yingyong

湖南大學出版社

研究生教学用书　湖南省教育厅推荐

研究生数学基础课程系列教材

非线性常微分方程
理论 方法 应用

钱祥征　戴斌祥　刘开宇　　编　著

湖南大学出版社

2006年·长沙

内 容 简 介

全书分为两大部分，第一至第四章为第一篇非线性系统的平面定性理论及分支，讲述奇点的局部结构、极限环、平面系统的全局结构、平面系统的结构稳定性与分支问题；第五至第八章为第二篇非线性系统的稳定性理论及其应用，讲述 Liapunov 稳定性的基本概念与基本定理、线性系统及其扰动系统的稳定性、Liapunov 直接法和稳定性概念的拓广、Liapunov 函数的构造和应用实例. 除第八章外，各章配有习题、补充与问题及参考文献.

本书可作为高等院校数学专业常微分方程方向的硕士研究生学位基础课程教材，也可作为数学与应用数学专业本科高年级选修课教材使用，同时也可供相关理工科教师和研究人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

非线性常微分方程理论 方法 应用/钱祥征，戴斌祥，刘开宇编著.
—长沙：湖南大学出版社，2006.6
ISBN 7-81113-064-5
Ⅰ.非…　Ⅱ.①钱…②戴…③刘…
Ⅲ.非线性—常微分方程—研究　Ⅳ.O175.14
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 072060 号

非线性常微分方程理论 方法 应用
Feixianxing Changweifen Fangcheng Lilun　Fangfa　Yingyong

作　　者：钱祥征　戴斌祥　刘开宇　编著
责任编辑：厉　亚
封面设计：张　毅
出版发行：湖南大学出版社
社　　址：湖南·长沙·岳麓山　　邮　　编：410082
电　　话：0731-8821691(发行部)，8821142(编辑室)，8821006(出版部)
传　　真：0731-8649312(发行部)，8822264(总编室)
电子邮箱：pressliy@hnu.cn
网　　址：http://press.hnu.cn
印　　装：长沙瑞和印务有限公司
开本：787×1092　16 开　印张：19.75　字数：344 千
版次：2006 年 8 月第 1 版　印次：2006 年 8 月第 1 次印刷　印数：1～3 000 册
书号：ISBN 7-81113-064-5/O·65
定价：38.00 元

前　言

本书主要为数学专业常微分方程方向硕士研究生编写的学位基础课教材.编写中我们遵循了以下原则：

1. 与专著不同，作为方向基础课程的教材，要考虑便于教与学：取材不宜过多、过广、过深，文字通顺易读、适当简洁，注意基础性，注重原始思想与先进性的结合.

2. 本书主要涵盖常微定性理论和稳定性理论两大部分的基础内容，这是考虑到近年来不少院校学制、学时有所压缩，课程门数有所增加，把这两部分写在一本书中便于在一个学期中完成原来两门课程的内容，同时在教学上也可灵活处理，有利于突出两者的相互联系与区别.

3. 考虑到知识的适度扩充，我们在每一章末尾写了一小段“补充与问题”，以指导读者在学习该章基础内容后，去阅读相关专著与文献，了解、思考一些尚未解决的相关问题.

全书分为两篇共8章.第一篇非线性系统的平面定性理论及分支，为第一章至第四章，重点讲述二维动力系统的相平面分析和分支理论.第一章较全面、详细地讨论了平面奇点的局部结构，重点放在 Frömmer 方法及中心-焦点判定问题.第二章讲述了极限环的存在性、唯一性及不存在的判定，重次及稳定性等基本内容和旋转向量场理论；作为它的理论基础的 Poincaré-Bendixson 理论和奇点的指数也在这一章中讲述；值得一提的是，Poincaré-Lindstedt 小参数法和 Колмогоров-боголюбов 平均方法，作为计算极限环(周期解)的渐近方法也写进了这一章后的“补充与问题”之中.第三章讲述了无穷远奇点的讨论方法，研究平面系统全局结构的步骤和若干实现的例子；我们还在第三节中列出两个如何全面应用相平面分析的例子，包括模型的建立、定性分析过程和结论返回到实际的解释.第四章讲述了结构稳定性理论，并且系统而简洁地介绍了平面动力系统的分支理论.

第二篇非线性系统的稳定性理论及其应用，含第五章至第八章，主要介绍 n 维非线性系统稳定性理论和方法，重点是 Liapunov 稳定性与直接法.第五章介绍 Liapunov 意义下的稳定性概念和基本定理，是这一篇的主要基础.第六章讨论当系统是线性时所出现的一些特殊情况与性质：一些等价概念和等

价定理,稳定性的代数判据,扰动理论和相关的周期系数线性系统的稳定性问题等.第七章讲述在Liapunov开创性工作之后,直接法和稳定性概念两个方面的拓广.方法拓广方面主要介绍了Lassalle不变原理、比较原理,以及直接法功能的扩展——系统的有界性、耗散性;第四节介绍了Liapunov稳定性以外的多种稳定性概念及结果.第八章较系统地介绍了Liapunov函数作法的多种思路和应用稳定性理论和方法解决实际问题的几个例子.

讲授完本书全部内容需72~80学时,如果为了锻炼研究生阅读、理解、表达能力,把部分内容分给他们,以学生报告、讨论,老师最后总结的方式进行,则学时要相应增加,甚至可延为两学期来完成.在减缩部分内容和定理的证明下,本书也可作为高等院校数学与应用数学本科高年级学生选修课教材用.

本书的正文曾以讲义的形式于2002年秋在湖南大学内部印刷,初稿经王志成教授、庾建设教授、黄立宏教授、李志祥教授、周展教授和袁朝晖副教授等审阅或试用过,他们对初稿提出了许多宝贵的意见,作者对他们热情的帮助表示衷心的感谢.湖南大学出版社为本书的出版给予了大力支持,特别是厉亚责任编辑为本书高质量的出版付出了辛勤的劳动,我们的博士研究生张娜、胡海军等为本书的校对作出了贡献,作者在此也向他们表示感谢.

本书初稿印本自2002年秋以来虽经多次在硕士研究生和数学专业本科高年级选修课中试用,并作了多次修改,但由于我们水平所限,加之这种写法也是初次尝试,不足和错误之处在所难免,恳请同行和读者批评指正.

编著者

2006年6月

目　次

绪论 …… 1

第一篇　非线性系统的平面定性理论及分支

第一章　奇点的局部结构 …… 7
　第一节　双曲奇点的局部结构 …… 7
　第二节　Frömmer 方法 …… 16
　第三节　中心-焦点判定 …… 33
　第四节　Liapunov 型奇点 …… 44
　习题一 …… 51
　补充与问题 …… 54
　参考文献 …… 57
第二章　极限环 …… 59
　第一节　平面动力系统的 P-B 理论 …… 59
　第二节　极限环的存在性 …… 67
　第三节　Liénard 方程周期解的存在唯一性 …… 76
　第四节　奇点的指数和它在极限环存在性位置中的应用 …… 92
　第五节　极限环的重次与稳定性 …… 95
　第六节　旋转向量场中的极限环 …… 100
　习题二 …… 110
　补充与问题 …… 112
　参考文献 …… 117
第三章　平面系统的全局结构 …… 121
　第一节　无穷远奇点 …… 121
　第二节　全局结构的例子 …… 128
　第三节　几个应用实例 …… 135
　习题三 …… 142
　补充与问题 …… 143
　参考文献 …… 145

第四章 平面系统的结构稳定性与分支问题 ······ 146
第一节 结构稳定性 ······ 146
第二节 分支的基本概念与分类 ······ 154
第三节 多重奇点分支 ······ 158
第四节 Hopf 分支 ······ 162
第五节 多重极限环分支和 Poincaré 分支 ······ 171
第六节 同宿环分支与 Bogdanov-Takens 分支 ······ 175
补充与问题 ······ 178
参考文献 ······ 180

第二篇 非线性系统的稳定性理论及其应用

第五章 Liapunov 稳定性的基本概念与基本定理 ······ 182
第一节 Liapunov 意义下的稳定性概念 ······ 182
第二节 Liapunov 稳定性基本定理 ······ 187
习题五 ······ 202
补充与问题 ······ 204
参考文献 ······ 207
第六章 线性系统及其扰动系统的稳定性 ······ 208
第一节 线性系统稳定性的等价定理 ······ 208
第二节 常系数线性系统稳定性的代数判据 ······ 211
第三节 线性系统的扰动理论 ······ 218
第四节 周期系数线性系统的稳定性 ······ 222
习题六 ······ 228
补充与问题 ······ 229
参考文献 ······ 233
第七章 Liapunov 直接法和稳定性概念的拓广 ······ 234
第一节 Lassalle 不变原理 ······ 234
第二节 比较原理 ······ 241
第三节 系统的有界性和耗散性 ······ 249
第四节 稳定性概念的拓广 ······ 257

习题七 …… 270
补充与问题 …… 272
参考文献 …… 274
第八章　Liapunov 函数的构造和应用实例 …… 275
第一节　Liapunov 函数的某些作法 …… 275
第二节　几个应用实例 …… 292
补充与问题 …… 303
参考文献 …… 305

绪　论

人们熟知，常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}=f\left(t,x,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\cdots,\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}\right),$$

或微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x}),$$

$\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$，在 f 或 $\boldsymbol{F}$ 对变元连续的条件下，它们的解是存在的，但要确切地找出解的有限形式的表达式常常是不可能的，特别是对非线性常微分方程（组），这种可能性更是极小（即使 $n=1$ 时）. 1841 年 Liouville 严格证明了看来极其简单的 Riccati 方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=P(x)y^2+Q(x)y+R(x)$$

一般不可解以后，更促使人们去寻找新的途径、新的方法，从给定微分方程（组）本身可提供的信息来研究其解的性质，而不依赖于几乎求不出的解的表达式.

一、H. Poincaré 开创的常微分方程定性理论

1881～1886 年，H. Poincaré 接连以"**微分方程所定义的积分曲线**"为题发表了四篇论文[3]，系统地建立了"作出由微分方程所定义的曲线族"的方法，在分析与几何工具的帮助下从微分方程（组）本身所提供的信息，几何地全面反映了解曲线的性质，这就是人们通常所说的微分方程定性理论或几何理论.

1. 相平面与轨线

Poincaré 所创立的作出全部解曲线的方法要基于几何中的 **Jordan 定理**：任何 $\mathbf{R}^2$ 的单闭曲线 L 将 $\mathbf{R}^2$ 分为 D_1 和 D_2 两部分，自 D_1 内任何一点到 D_2 内任何一点的连续路径必定与 L 相交. 同时，该方法也要基于解曲线的不相交性. 基于这两点，定性理论着重讨论的是平面自治系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=X(x,y),\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=Y(x,y)\tag{0.1}$$

在相平面 $x-y$ 上全部轨线的分布状态.

系统(0.1)在**相平面** $x-y$ 上定义了一个**向量场**,$(x(t),y(t))$是向量场中的一个运动着的点,它的轨迹称为系统(0.1)的**轨线**. 我们要研究、作出系统(0.1)的全部轨线,因为它们能很好地描述出系统(0.1)对应的微分方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Y(x,y)}{X(x,y)},$$

或二阶方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}=f(x,\frac{dx}{dt})$$

的积分曲线族的一切性质. 这种对应关系我们也可从简单的例子:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y,\\ \dfrac{dy}{dt}=-\omega^2x-2ny,\end{cases}\qquad \text{在相平面 } x-y \text{ 上的轨线}$$

与

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\omega^2x+2ny}{y}\qquad \text{在平面 } x-y \text{ 上的积分曲线}$$

或

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2n\frac{dx}{dt}+\omega^2x=0\quad \text{在平面 } t-x \text{ 上的积分曲线}$$

(其中 $n\geqslant0,\omega>0$)三者之间的关系来体会.

我们设系统(0.1)中的 $X(x,y)$、$Y(x,y)$在讨论的区域内连续,且满足解的唯一性条件. 以

$$x=x(t;t_0,x_0,y_0),\quad y=y(t;t_0,x_0,y_0)\tag{0.2}$$

表示初始条件 $x(t_0)=x_0,y(t_0)=y_0$ 的解,则容易证明系统(0.1)的轨线有下列三条性质:

性质 1(对时间 t 的平移性) 对任意常数 τ,$x=x(t+\tau;t_0,x_0,y_0)$,$y=y(t+\tau;t_0,x_0,y_0)$都是系统(0.1)的解,它们对相平面 $x-y$ 上的投影是同一条轨线,因此式(0.2)也是相平面 $x-y$ 上过(x_0,y_0)轨线的参数表达式. 当只考虑 $t\geqslant t_0$($t\leqslant t_0$)那一半时,式(0.2)代表的是过(x_0,y_0)的**正半轨 L^+**(**负半轨 L^-**).

性质 2(唯一性) 过相平面 $x-y$ 中的每一点(x_0,y_0),系统(0.1)有且只有一条轨线.

性质 3(对时间 t 的可加性) 设 $t=0$ 时自点(x_0,y_0)出发的解在 $t=t_1$ 时到达点(x_1,y_1),又 $t=0$ 时自点(x_1,y_1)出发的解在 $t=t_2$ 时到达点(x_2,y_2),则 $t=0$ 时自点(x_0,y_0)出发的解在 $t=t_1+t_2$ 时也到达点(x_2,y_2),即

$$x(t_2;0,x(t_1;0,x_0,y_0),y(t_1;0,x_0,y_0)) = x(t_1+t_2;0,x_0,y_0),$$
$$y(t_2;0,x(t_1;0,x_0,y_0),y(t_1;0,x_0,y_0)) = y(t_1+t_2;0,x_0,y_0).$$

对轨线而言,这个性质可简述为:自(x_0,y_0)出发的轨线,若经 t_1 到达(x_1,y_1),又经 t_2 到达(x_2,y_2),则自(x_0,y_0)出发的轨线经 t_1+t_2 也到达(x_2,y_2).

使系统(0.1)中

$$X(x^*,y^*) = Y(x^*,y^*) = 0 \tag{0.3}$$

的点(x^*,y^*),称为系统(0.1)的**奇点**,也称**静止点**、**平衡点**.这样的点是相平面上特殊的点,是由一个点构成的轨线(点轨线),任何其他的轨线不可能在有限时间内到达奇点(x^*,y^*).

以上关于轨线的性质可以推广到相空间 $\mathbf{R}^n$ 上去.

2. 常点邻域的平直性

若点 $P_0(x_0,y_0)$是系统(0.1)的**常点**,即

$$X^2(x_0,y_0)+Y^2(x_0,y_0)\neq 0,$$

则我们有下面的描述任何常点邻域中轨线共性的"**局部平直性**"定理.

定理 设系统(0.1)满足 $X(x,y),Y(x,y)\in C^r(D)$,$r\geqslant 1$,区域 $D\subset\mathbf{R}^2$;$P_0\in D$ 是常点,则存在 P_0 的一个曲四边形邻域 U 及定义在 $\overline{U}$ 上的一个 C^r 拓扑变换 T,它使 $T\overline{U}=\overline{R}$ 为矩形,且将 U 中系统(0.1)的轨线族变为 R 中的平行直线族.

证明 先经非奇异线性变换将坐标原点移到常点 P_0 上,且使纵轴与点 P_0 处的方向场重合,这样若延用原记号,则有 $X(0,0)=0$,$Y(0,0)\neq 0$.由 X,Y 的连续性,存在 $O(0,0)$的邻域 $S(0,\varepsilon)$,使 $Y(x,y)\neq 0$,对 $\forall\,(x,y)\in S(0,\varepsilon)$成立.从而在 $S(0,\varepsilon)$中,系统(0.1)等价于方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{X(x,y)}{Y(x,y)}. \tag{0.4}$$

由定理的假设知,方程(0.4)满足初值问题解的存在唯一条件且解对初值可微 r 次.因此,它的解可表示为

$$x = x(y,a),\quad x(0,a) = a,$$

再在 $S(0,\varepsilon)$中取一个矩形 $ABCD$,在其上定义变换

$$F:(a,y)\to(x(y,a),y),$$

它将矩形 $ABCD$ 映为 $S(0,\varepsilon)$中的曲四边形 $A'B'C'D'$,把前者中的平行直线族 $x=a$ 映为后者中对应的积分曲线族 $x=x(y,a)$,显然,这个 $F\in C^{r+1,r}(a,y)$,如图 0-1 所示.

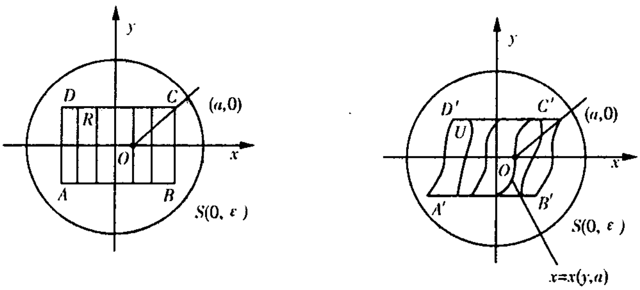

图 0－1

以下证明这样定义的 F,其逆变换 F^{-1}存在,也是一对一的,且 $F^{-1}\in C^r$,因 $x=x(y,a)$是方程(0.4)的解,故

$$\frac{\mathrm{d}x(y,a)}{\mathrm{d}y}=\frac{X(x(y,a),y)}{Y(x(y,a),y)}.$$

又由解对初值可微公式,可得

$$\frac{\partial x}{\partial a}=\exp\left(\int_0^y\frac{Y\dfrac{\partial X}{\partial x}-X\dfrac{\partial Y}{x}}{Y^2}\mathrm{d}y\right)>0.$$

故可在曲四边形 $A'B'C'D'$中,由 $x=x(y,a)$解出反函数

$$a=a(x,y),$$

它满足 $a(a,0)=a,a(x(y,a),y)\equiv a$,我们定义

$$T=F^{-1}:\quad (x,y)\mapsto(a(x,y),y),$$

显然变换 $T\in C^r(x,y)$是一对一的,由 $a(x(y,a),y)\equiv a$ 知,它将曲四边形 $A'B'C'D'$中的积分曲线 $x=x(y,a)$[满足 $x(0,a)=a$]映为矩形 $ABCD$ 的平行直线 $x=a$. 取曲四边形 $A'B'C'D'$的闭包为 P_0 的闭邻域 $\overline{U}$,矩形 $ABCD$ 的闭包为矩形 $\overline{R}$,则 T 即为所求之拓扑变换. 证毕.

3. **本书定性理论篇内容的框架结构**

研究并作出系统(0.1)的全部轨线的分布状态及扰动下的变化,是本书第一篇平面定性理论及分支问题的主要内容,我们是按由小范围到大范围,再谈“变化”的框架来叙述的:

(1)轨线的局部分布:奇点邻域中轨线的各种分布结构与判定方法.

(2)轨线的大范围分布:闭轨线和极限环的存在、唯一性、位置、稳定性等与判定方法.

(3)轨线的全局结构：无穷远奇点邻域的结构，轨线的分隔与联接，全局结构图.

(4)当系统含有可变参数时，在参数微小变化下轨线的分布结构是否稳定(结构稳定性)；参数在达到或通过某个值时，结构会发生突变吗？——分支问题，动力系统的分支问题是近30年来发展起来的重要研究课题，近代科技的许多领域，甚至包括经济、医学、生物生态的研究中均出现分支现象，有待我们去研究解决.

二、A. M. Liapunov 创立的常微分方程稳定性理论

对高维系统，上面的许多讨论就行不通了，因而无法再通过作出系统的全部轨线来弄清解的一切性质. 于是，人们把目标转向对一般的 n 维系统

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x}), \tag{0.5}$$

$\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$，去探求任一个特定的解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)$(一般求不出来)所具有的某种重要的性质.

1892年俄国数学家 **A. M. Ляпунов(Liapunov)** 发表了“**运动稳定性的一般问题**”的杰出论文[5]，创立了 Liapunov 稳定性理论. 他首次提出了，当初始条件$(t_0,\boldsymbol{x}_0)$受到微小扰动时，在此后的任何时候都能保持解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)$受到的影响极小的“稳定性”概念(后人称之为 Liapunov 意义下的稳定性)，同时创造了“Liapunov 函数”$V(t,x)$这一判定解的稳定性的强有力的分析工具. 这个理论与方法在工程控制中有着广泛的应用，意义极其重要. 在其后的几十年中，随着科学技术的发展和理论研究的不断深入，人们一方面进一步完善了 Liapunov 稳定性的基础理论体系，另一方面，在稳定性概念的拓广和 V 函数这一工具应用领域的开拓这两条主线上不断延伸、发展稳定性领域的丰富成果，人们建立了许多新的稳定性概念，大大地发展了 V 函数的应用方式与应用领域，将它用于研究解的有界性、收敛性、耗散性及周期解等. 本书的稳定性理论篇就是按照上述思路来分章叙述的.

参考文献

[1] 秦元勋. 微分方程所定义的积分曲线(上册). 北京：科学出版社，1959

[2] Немыцкий В. В，Степанов В. В，Качественная Теория дифференциальных Уавнений，М. —Л. ，гостехизцаТ，1949(中译本：涅梅茨基，斯捷巴诺夫. 微分方程定性理论(上、下

册)北京:科学出版社,1956,1959.)

[3] Poincaré H. Surles Courbes définies par des équations différentielles, J. Math. Pures et Appl. ,(3),7(1881),375～422;Ibid 8(1882),251～296;Ibid(4),1(1885),167～244;Ibid 2(1886),151～217

[4] 秦元勋. 运动稳定性的一般问题讲义. 北京:科学出版社,1958

[5] Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения, Гостехиздат ,1950

第一篇　非线性系统的平面定性理论及分支

第一章　奇点的局部结构

在研究平面系统的局部结构时，奇点邻域中轨线结构的判定占有首要的位置. 本章除了介绍常用的初等奇点 $p-q$ 参数判定法和 Perron 定理外，重点讲述了通用的 Frömmer 判定法. 我们还较详细地介绍了重要的中心-焦点判定问题的两种经典的方法，引入了“焦点判定量”这一重要概念.

第一节　双曲奇点的局部结构

在区域 $D\subset\mathbf{R}^2$ 中给定平面自治系统

$$\dot{x} = X(x,y), \quad \dot{y} = Y(x,y), \tag{1.1}$$

在 D 内 X,Y 连续且保证解的存在唯一性. 若

$$X^2(x_0,y_0) + Y^2(x_0,y_0) = 0$$

成立，则称点 $P_0(x_0,y_0)$ 是系统(1.1)的**奇点**(静止点、平衡点)；否则，点 P_0 为系统(1.1)的**常点**.

一、常系数线性系统的奇点

这时系统(1.1)具有形式

$$\dot{x} = ax + by, \quad \dot{y} = cx + dy, \tag{1.2}$$

其中 a,b,c,d 都是实常数，我们以 $\mathbf{A}$ 表示它的**系数矩阵**，即

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \det\mathbf{A} \equiv ad - bc.$$

以下分 $\det\mathbf{A}\neq 0$ 和 $\det\mathbf{A}=0$ 两种情形来讨论.

1. $\det\mathbf{A}\equiv ad-bc\neq 0$

这时原点 $O(0,0)$ 是系统(1.2)唯一的(孤立)奇点. $\mathbf{A}$ 的[也称系统(1.2)对应的]**特征方程**

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}) \equiv \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

的根，若是实的就以 λ,μ 来记；若是复的（必然共轭），则记为 $\lambda=\alpha+\mathrm{i}\beta$，$\mu=\alpha-\mathrm{i}\beta(\beta\neq 0)$. 由化实矩阵为若当标准型的定理知，必存在非奇异线性变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{T}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

将系统(1.2)化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = (\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T})\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \equiv \boldsymbol{J}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

其中 $\boldsymbol{J}$ 为下列五种标准型之一：

(ⅰ) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$，$\lambda\neq\mu$，　(ⅱ) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$，　(ⅲ) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$，

(ⅳ) $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$，$\alpha\neq 0$，$\beta\neq 0$，　(ⅴ) $\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$，$\beta\neq 0$.

系统(1.4)在 $\xi-\eta$ 平面上点 O 邻域内的相图是容易画出的，即图 1-1，这在常微分方程基础课程中已讲过，不再赘述，回到 $x-y$ 平面上时，图形相当于施行了(1.3)的逆变换

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \boldsymbol{T}^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

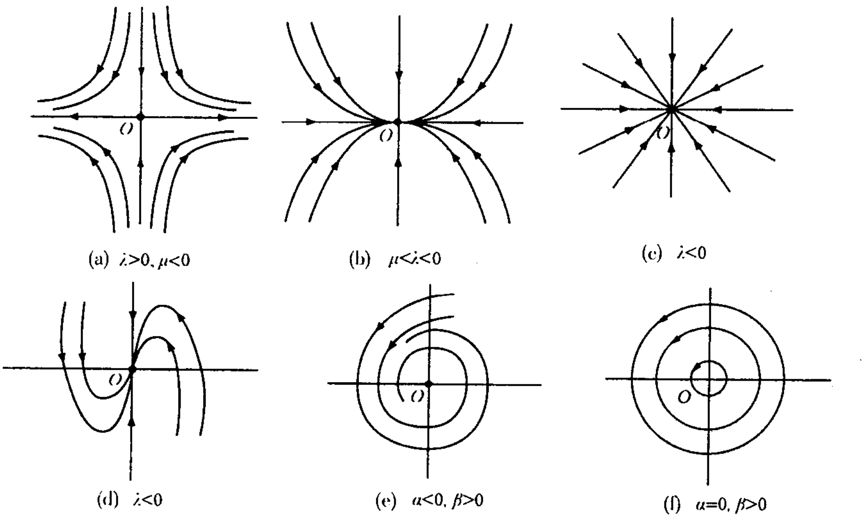

图 1-1　轨线相图

其结果只是使图 1-1 在固定点 O，ξ，η 轴被挤压成为 $x-y$ 平面上两条斜交于 O 的直线，而其他轨线之间及轨线与这两条斜线之间的相互结构没有改变(见例 1.2)，这样的相图与图 1-1 对应的相图是**“拓扑等价的”**，在定性结构本质上是一样的，我们通常就用图 1-1 中所示的相图代表了系统(1.2)在相应条件下 $x-y$ 平面上 O 邻域中的**轨线相图**.

如果我们注意到 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程可写成

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} \equiv \lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc \equiv \lambda^2+p\lambda+q=0,$$

又注意到三个参数

$$p\equiv-(a+d),\quad q\equiv\det\boldsymbol{A}\equiv ad-bc,\quad \Delta\equiv p^2-4q$$

与特征根及五种若当标准型之间的对应关系时，我们可得到下面的，以参数 p,q,Δ 来判定系统(1.2)奇点 O 类型的分类表(见表 1-1).

表 1-1　分类表

<table>
<tr><th></th><th></th><th>特征根</th><th colspan="2">奇点 O 的类型</th></tr>
<tr><td>$q<0$</td><td></td><td>不等异号</td><td colspan="2">鞍点[图 1-1(a)]</td></tr>
<tr><td rowspan="5">$q>0$</td><td>$\Delta>0$</td><td>不等同号</td><td>结点</td><td>$p>0$ 时稳定[图 1-1(b)]
$p<0$ 时不稳定</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\Delta=0$</td><td>相等 $b^2+c^2=0$</td><td>临界结点</td><td>$p>0$ 稳定[图 1-1(c)]
$p<0$ 时不稳定</td></tr>
<tr><td>相等 $b^2+c^2\neq0$</td><td>退化结点</td><td>$p>0$ 时稳定[图 1-1(d)]</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\Delta<0$</td><td>复根 $\lambda=\alpha\pm i\beta$</td><td>焦点</td><td>$p>0$ 时稳定[图 1-1(e)]
$p<0$ 时不稳定</td></tr>
<tr><td>纯虚根 $\lambda=\pm i\beta$</td><td colspan="2">中心[$p=0$，图 1-1(f)]</td></tr>
</table>

如果进一步把这种分类记录在 $p-q$ 参数平面上，我们将发现，系统(1.2)的系数对应的 p,q,Δ 三个数决定的点(p,q)落在该平面的不同位置立即决定了奇点 O 的类型，我们称它为 $p-q$ **参数判定法**. $p-q$ 图(见图 1-2)十分有利于对上述判定法的理解、记忆和应用，我们应熟记在心.