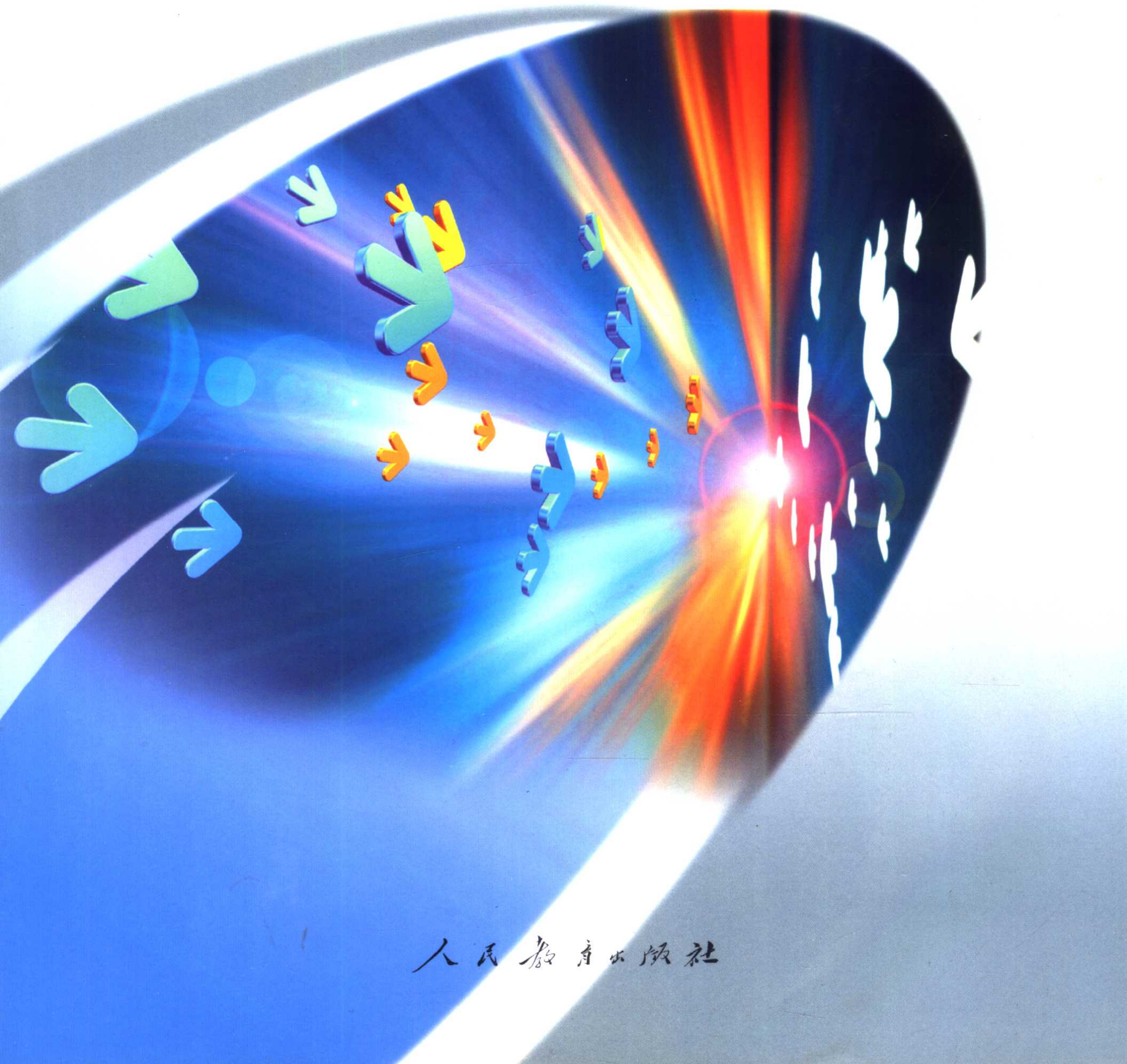
高等师范院校选修课教材

小学数学竞赛指导

课程教材研究所
数学课程教材研究开发中心　编



人民教育出版社

高等师范院校选修课教材

小学数学竞赛指导

课程教材研究所
数学课程教材研究开发中心 编

人民教育出版社

高等师范院校选修课教材

小学数学竞赛指导

课　程　教　材　研　究　所
中学数学课程教材研究开发中心　编

*

人民教育出版社　出版发行

网址：http：//www.pep.com.cn

北京四季青印刷厂印装　全国新华书店经销

*

开本：787 毫米×1 092 毫米　1/16　印张：21　字数：450 000

2005 年 8 月第 1 版　　2005 年 12 月第 1 次印刷

印数：0 001～3 000 册

ISBN 7-107-19058-X / G・12148（课）　定价：22.50 元

如发现印、装质量问题，影响阅读，请与出版科联系调换。

（联系地址：北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼　邮编：100081）

人民教育出版社　课程教材研究所
高等师范院校小学教育专业数学教材编写委员会

总主编：王　元

编　委：（以姓氏笔画为序）

马　凯	方明一	王长沛	王　蕾	田宏忠	邓映蒲
刘凤翥	刘京莉	刘思清	刘效丽	刘意竹	孙玉宝
孙　圻	江汉勋	李同贤	纪运如	宋　兵	陈　耘
张　艾	林奇青	林炳生	金成梁	郇中丹	胡永建
周　辉	章建跃	高　荆	唐京伟	陶晓永	曹　磊
黄世立	黄浪波	曾文艺	曾庆黎	梅全雄	舒振文
梁楚材	董丽波	傅耀良	蔡俊亮	颜其鹏	魏　纶

策　划：颜其鹏

本册主编：金成梁

编写人员：金成梁　刘久成　廖家瑞　刘效丽
刘长虹　田一鹏　刘明祥

特约审稿：刘凤翥

责任编辑：林立军

总　　序

我国小学教师的职前培养，现在面临两个重大转变. 第一，面临师范教育结构调整. 小学教师的合格学历将由中等师范学校毕业提高到大专以上水平. 根据《高等教育法》有关规定，招收高中阶段毕业生，实行三年专科教育和四年本科教育，是我国培养专科以上学历小学教师的主要形式. 第二，基础教育，包括小学教育，正处于重大改革的初期. 2001 年教育部颁发了《基础教育课程改革纲要（试行）》，大力推进基础教育课程改革，调整和改革基础教育的课程体系、结构、内容，构建符合素质教育要求的新基础教育课程体系，课程改革引发了教育观念、教学方法的变革. 教育改革的新形势向小学教师的职前培养提出了全新的要求.

在这样的背景之下，2003 年 1 月，教育部师范教育司制订的《三年制小学教育专业课程方案（试行）》正式颁布，针对教师专业化的国际趋向和小学教师的培养特点，提出了一整套培养高中起点三年制大专学历小学教师的课程设计方案，并着手组织编写小学教育专业教材.

长期以来一直承担着师范教育课程教材研究、开发和编写任务的人民教育出版社、课程教材研究所，根据我国高师小学教育专业课程教材改革的需要，组织了“高师小学教育专业数学课程设置与教材建设”课题组，邀请了中国科学院、北京大学、北京师范大学、首都师范大学、北京教科院、北京教育学院、华中师范大学等单位的专家学者和全国各地的资深师范教育专家和教师参加. 本课题组对我国高等师范教育的新兴门类——小学教育专业的数学课程设置和数学教材建设进行了大量的调查研究，对新世纪国际小学教师培养中数学课程体系的发展趋势进行了探讨，并总结了我国十多年来各地高师小教大专数学课程、教材和教学改革试验的成功经验，从而构建了能反映我国小学教师培养体制改革的时代要求、建立小学教师合理数学知识结构和教育素养的数学课程教材体系，其中有些科目如现代数学概论、数学实践、常用数学软件、数学建模和数学文化等还填补了我国高师小学教育专业数学教材的空白. 在此基础上编写了这套高等师范小学教育专业数学教科书.

这套教科书充分吸收了以往培养小学教师各级各类专用数学教材的优点，努力突出数学课程教材的时代性和前瞻性，贴近国际教育改革和我国基础教育课程改革的前沿，体现新的教育理念；力求体现高等小学教育的基础性、专业性和师范性，促进小学教师专业化水平的提高；既注重数学素养的提高，又注意体现人文精神，还具有可读性和可操作性；同时延续了中等师范教育教材注重教学技能和创新能力培养的良好传统.

这套小学教育专业数学教科书包括：必修课《大学数学》《高等数学基础（上、下）》《现代数学概论》《数学实践》《小学数学教学与研究》；选修课《数学文化》《初等数论》《常用数学软件》《数学建模基础教程》《小学数学竞赛指导》《离散数学》和《数学思想方法》等十二科十三册教材，供高师小学教育专业学生和小学教师继续教育学员使用.

本套书在研究、编写过程中得到了全国高等师范院校数学教育研究会小教培养工委的指导和帮助，还得到了大量一线教师的帮助和支持.

王　元

2003 年 7 月 14 日

前　言

1956 年，在我国老一辈数学家华罗庚等人的倡导和直接参与下，举办了全国四大城市的高中数学竞赛，得到了全国广大数学教师和学生的热烈欢迎. 几十年来，数学竞赛在我国的发展道路并不平坦，几起几落，前景莫测. 但广大师生和家长却对此一往情深，执着追求. 经过三十多年的艰苦奋斗. 终于在二十世纪八十年代铸成了我国作为“国际数学奥林匹克”强国的地位.

为了巩固我国作为国际数学竞赛强国的地位，不断提高高中数学竞赛选手的培训水平，必须有小学和初中数学竞赛水平的不断提高作为基础. 为此，需要有一支相当数量的、通晓数学竞赛的理论和历史、有较强的解题能力和数学教学技艺的小学和初中数学竞赛教练员.

本书作为小学教师培养院校的数学选修课的试用教材，阐述了数学竞赛的教育价值、竞赛题的特点以及常见的一些小学数学竞赛题的分类研究，特别是突出了解答竞赛题的思想和方法.

20 世纪 80 年代以来，数学方法论的研究和普及风行一时. 数学教学的重点从结论转向过程，数学问题的解决从解答本身转向解答的探索以及所用的思想、方法. 事实上，数学方法论包括了科学方法论的所有重要内容，并且体现了数学学科的精密性、符号化以及抽象与直观的结合. 数学竞赛题由于其本身的特征，为各种方法的运用提供了异乎寻常的广阔平台. 竞赛选手通过培训，不论是否获奖，其思维能力和方法论水平都会得到提高，这一点是人人都能感受到的. 由于数学方法论还没有学术界公认的体系，因此，如何将数学竞赛题的解答中运用的方法条理化和系统化尚无定论. 我们编写本书时力求对此作出初步的尝试. 本书将解答小学数学竞赛题所用的方法大致分为以下三类：

· 逻辑的方法（包括演绎法、归纳法、类比法、递推法、逆推法、分析法与综合法等）；

· 学科的方法（包括代数法、几何法、集合论方法、组合论方法、概率论方法等）；

· 构造的方法（包括平移法、旋转法、对称法、染色法等）.

并且结合事例说明这些方法的特征、适用范围、注意事项以及用于数学问题解决时体现出来的特点.

本书在某种意义上，可以说是高师数学教育研究会小学教师培养工作委员会举办“小学数学竞赛等级教练员”考试六年来的经验总结和资料积累. 2000～2005 年的等级教练

员考试试卷作为附录载于书末，不少试题已作为例题用于本书的正文中.

参加本书编写的有金成梁（扬州教育学院，§1—1～§1—4，§2—1～§2—12）、刘久成（扬州大学，§3—1～§3—5）、廖家瑞（成都教育学院，§3—6～§3—9）、刘效丽（首都师范大学，§3—10～§3—12，§3—14）、刘长虹（首都师范大学，§3—13，§3—15）、田一鹏（北京市朝阳区教育学院，§2—10和§2—12的部分内容，§3—16，§3—17）和刘明祥（扬州教育学院，§3—18～§3—21）. 本书由金成梁、刘效丽、刘明祥统稿，刘凤翥审阅.

由于竞赛题的复杂性和编写程序方面的原因，特别是限于作者的水平和时间的仓促，书中的缺点或错误在所难免，敬请使用本书的师范院校的师生及其他读者不吝赐教（联系电话：金成梁　0514-4969700，刘效丽　010-63950227，刘明祥　0514-4965403）.

编　者

二〇〇五年六月

目　录

第一章 数学竞赛概述

第一节 数学竞赛的教育价值

一、数学竞赛的由来和发展

数学竞赛是一种数学教育活动，它的出现虽然只有一百多年的历史，但在国内外掀起的热潮却风起云涌，方兴未艾.

1886 年，法国举行了最早的一次数学解题竞赛. 以后，这种竞赛也相继在匈牙利、罗马尼亚、挪威等国举行. 1959 年，罗马尼亚数理学会首先发出倡议，在布加勒斯特举行第一届“国际数学奥林匹克”（International Mathematical Olympics），简称 IMO，这就是“国际中学生数学奥林匹克”. 以后，每年举行一次. 由于这种国际性的竞赛活动为各国表现本民族的聪明才智提供了舞台，所以得到了越来越多的国家的重视. 1959 年第一届 IMO 只有东欧七国的 54 名选手参加，到 2003 年在东京举行的第 44 届 IMO 时，参加的国家或地区的代表队增加到 82 支，参赛选手达 457 人.

为什么这种“数学解题竞赛”被称为“数学奥林匹克”呢?

Olympics 是希腊的一个地名，古希腊人常在这里举行体育竞技. 1894 年国际体育大会决定：把世界性的综合性运动会叫做“奥林匹克运动会”. 这是力量、灵活与美的竞赛. 数学是“思维的体操”，数学竞赛与体育比赛在精神上有着相通之处，因而解数学难题的竞赛被称之为“数学奥林匹克”.

我国的数学竞赛活动开始于 1956 年，当时，在国家提出“向科学进军”的背景下，在华罗庚等最有威望的数学家的倡导下，经过上级批准，在北京、上海、天津、武汉四大城市开始举办省、市一级的高中三年级学生的数学竞赛. 在这次活动中，华罗庚等老一辈数学家亲自参加科普讲演和命题工作，社会影响巨大. 对于提高青少年学习数学的兴趣，立志献身数学研究或其他科学技术，产生了深远的影响. 这样的数学竞赛和科普活动，在 1962 年又举行了一次.

经过十多年的停顿，1978 年，在彻底否定文化大革命、拨乱反正、正本清源的背景下，开始举办全国性高中学生的数学竞赛，1983 年开始举行全国性初中数学竞赛. 1986 年为纪念华罗庚教授逝世一周年，举行了首届“华罗庚金杯”少年数学邀请赛，全国有 150 多万小学生参加了预赛，2 万多学生参加了复赛，69 人参加了决赛. 由此拉开了我国

小学数学竞赛的序幕.

1989 年，在第 30 届 IMO 上，我国选手取得了总分第一的好成绩，极大地激发了我国人民的民族自豪感和广大中小学生学习数学和参加数学竞赛的兴趣. 为了协调好小学、初中、高中这三个层次的数学竞赛的关系，中国数学会普及工作委员会决定：从 1991 年开始每年举办一次“全国小学数学奥林匹克”. 并且规定：要把它办成“大众化”、“普及型”的活动. 试题“不超前、不超纲”，并且都有小学生能看懂的算术解法. 这样，就使我国的小学数学竞赛得以纳入规范化的轨道.

由于一批热心于数学普及和数学竞赛活动的数学工作者和广大数学教师的共同努力，我国各级数学竞赛的水平迅速提高；参加 IMO 的代表队取得的成绩越来越令世人瞩目. 1985 年我国首次派代表参加了第 26 届 IMO. 1986 年在第 27 届 IMO 上，我国代表队取得了总分第四的好成绩. 在 1989 年第 30 届 IMO 上，我国代表队获总分第一，至今一直名列前茅. 这些辉煌成果的取得，首功应归广大中、小学教师，以及一些有志于数学普及工作的同志. 他们不计个人得失，乐于奉献，主动工作，不怕艰苦的物质条件，坚持长期努力，使我国的数学奥林匹克事业跨入了世界强国的行列.

我国在国际数学奥林匹克（IMO）中取得的成绩

届	年	总　分	名　次	金牌	银牌	铜牌	备　　注
26	1985		32	0	0	1	
27	1986	177.5	4	3	1	1	美国、前苏联总分 203
28	1987	200	8	2	2	2	罗马尼亚总分 250
29	1988	201	2	2	4	0	前苏联总分 217
30	1989	237	1	4	2	0	罗马尼亚第二
31	1990	228	1	5	1	0	前苏联第二
32	1991	232	2	4	2	0	前苏联第一
33	1992	240	1	6	0	0	美国第二
34	1993	215	1	6	0	0	德国第二
35	1994	229	2	3	3	0	美国第一
36	1995	236	1	4	2	0	罗马尼亚第二
37	1996	160	6	3	2	1	罗马尼亚第一、美国第二
38	1997	223	1	6	0	0	匈牙利第二
39	1998	中国未参加					伊朗第一、保加利亚第二
40	1999	182	1	4	2	0	俄罗斯并列第一
41	2000	218	1	6	0	0	俄罗斯第二、美国第三
42	2001	225	1	6	0	0	俄罗斯、美国并列第二
43	2002	212	1	6	0	0	俄罗斯第二、美国第三
44	2003	211	2	5	1	0	保加利亚第一
45	2004	220	1	6	0	0	美国第二、俄罗斯第三
46	2005	235	1	5	1	0	美国第二、俄罗斯第三

为了使数学竞赛活动健康地发展和进一步规范化，在 1990 年 11 月召开的“中国数学会第六次普及工作会议”上提出了“继往开来，长盛不衰”的奋斗目标，制定了“数学竞赛大纲（草案）”.

1992 年 3 月召开的“中国数学会第七次普及工作会议”通过了制定的“数学竞赛大纲”. 大纲认为：在我国已经成为世界数学奥林匹克强国的形势下，要着眼于普及，着眼于提高大多数学生学习数学的兴趣，使学有余力的学生能更好地发展他们的运算能力、逻辑思维能力、空间想象能力、分析问题和解决问题的能力、独立思考和自学的能力. 逐步学会分析、综合、归纳、演绎、抽象、概括、类比等数学思想方法，成为一代有探索和创新精神的科学人才.

二、数学竞赛的教育价值

实践证明：作为一种数学教育活动的数学竞赛，对于推进教学改革和提高教学质量，有着多方面的重要意义和其他学科教学难以替代的作用. 主要有以下几点：

1. 强化数学教育功能，突出能力培养的教学导向.

数学竞赛活动能巩固和扩大学生所学的知识；拓宽解题思路，促进思维能力的发展，培养探索精神和创造才能；促使更多的学生爱好数学，从而促进数学教学质量的提高.

例如，在学科教学中，有关四则运算的习题，大多是根据相应的法则就能算出得数的题目. 但数学竞赛中的这类题就不是单纯按法则操作就能解决的. 有的需要先找到题目里隐含的某些简便计算的窍门；有的需要巧妙地综合题目提供的各种信息进行逻辑推理. 虽然也需要运用计算法则，但解决问题主要不是靠法则的运用.

例 1 计算：$0.625\times\left(1\frac{2}{3}+3\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{6}\div1\frac{3}{5}-\frac{5}{8}$.

【分析】 用简便方法计算这道题，需要先发现加、减的几个数中都含有因数$\frac{5}{8}$，即 0.625.

【解】 原式$=\frac{5}{8}\times\left(1\frac{2}{3}+3\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{6}\times\frac{5}{8}-\frac{5}{8}$

$$=\frac{5}{8}\times\left(1\frac{2}{3}+3\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-1\right)$$

$$=\frac{5}{8}\times4$$

$$=2\frac{1}{2}.$$

例 2 将下列算式中的汉字换成数字，要求相同的汉字换成相同的数字，不同的汉字换成不同的数字，并且等式成立.

$$\begin{array}{r} 青山绿水 \\ \times\qquad 9 \\ \hline 水绿山青 \end{array}$$

【解】(1) ∵ “青”≥1， ∴ “水”≥9. 只能是“水”=9，“青”=1.

$$
\begin{array}{r}
1\text{山绿}9 \\
\times\quad 9 \\
\hline
9\text{绿山}1
\end{array}
$$

(2) ∵ “山”×9 不进位，∴ “山”≤1，∵ “青”=1 ∴ “山”=0 ∴ “绿”=8. 结果是

$$
\begin{array}{r}
1089 \\
\times\quad 9 \\
\hline
9801
\end{array}
$$

在这里，不但要考察被乘数各位上的数与乘数相乘的情况，而且要考察向相邻高位的进位，并且一般从最高位或最低位的考察入手.

例 3 设 O 代表 2，S 代表 3，并且相同的字母代表相同的数字，不同的字母代表不同的数字. 那么，在下面的算式中，其他字母各代表什么数字？

$$
\begin{array}{r}
\text{CROSS} \\
+\ \text{ROADS} \\
\hline
\text{DANGER}
\end{array}
$$

（十字路口）

（危险）

【分析】处理这道加法题，同样要从最高位或最低位入手，研究每一位上的运算和相邻数位间的进位关系，逐步由已知推出未知. 难点是如何确定 A 代表的数字.

参照下面的程序框图（图 1-1），即可依次确定算式中的各个字母所代表的数字.

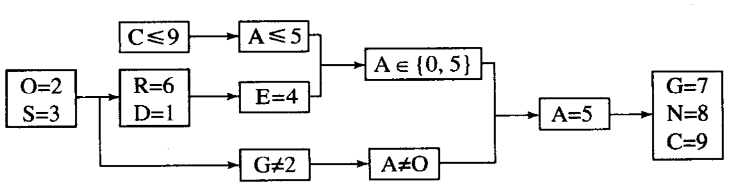


图 1-1

2. 促进教师的知识更新，推动数学教育改革.

数学竞赛活动的广泛开展，使教师逐步明确：什么样的数学教育才被认为是高水平的. 从而促进数学方法论的研究，推动课程、教材、教法改革的探索.

许多竞赛题涉及数论、图论、向量、矩阵、多项式、函数方程以及组合数学等，来源于高等数学的思想，但它的解法完全是初等的. 有些竞赛题表面上看不像“数学题”，用不了多少数学知识和工具，但解答它需要敏锐的数学思考、深刻的数学分析和独特的数学构思.

例 4 证明：在任何六个人中，总可以找出这样的三个人，他们相互认识，或者相互都不认识.

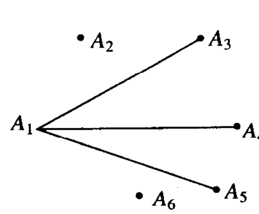


图 1-2

【分析】这道题的背景就是图论中的拉姆赛定理. 解题时，先构造这个问题的数学模型，再用染色法推出求证的结论.（参看本

书 P. 230 例 6 的证明）

有些地区将“小学数学竞赛”发展为“小学生探索与应用能力竞赛”. 试题设计力求有更深刻的数学背景，更丰富的现实原型和更浓厚的人文色彩. 增强试题的操作性、实践性和开放性，以全面推进素质教育.

3. 早期发现和重点培养有潜力的青少年，实行因材施教和智力的早期开发.

数学竞赛是一项建立在兴趣与爱好基础上的课外活动，是因材施教的一种方式，让喜欢科学、喜欢钻研的学生参加这项活动，有助于他们掌握正确的思想方法，提高研究能力、知识水平、心理素质和合作精神，从而终身受益. 科学史表明：大科学家往往在青少年时期就崭露头角，其重要标志之一就是具有优异的数学才能，而数学才能又是其他许多专业才能的基础.

4. 题型新颖，是高等数学的深刻思想与初等数学的高度技巧相结合的产物，有助于提高学生敏锐的数学直觉、洞察力和解题技巧.

数学竞赛中的不少试题接近数学研究工作的前沿. 中国数学会普及工作委员会在 1983 年研究全国高中数学联赛的命题方向时，确定了“在普及的基础上不断提高”的方针. 并规定“联赛的命题范围不超出现行教学大纲”. 1988 年决定：全国高中联赛一试的试题应该是“高考”水平的. 但决赛试题不能不以 IMO 的试题为准，在 1998 年召开的第十次全国数学普及工作会议商定：根据全面实施素质教育、减轻学生过重负担的要求，全国高中数学联赛一试的试卷包括 6 道选择题、6 道填空题和 3 道解答题. 满分 150 分. 其中考查“双基”的、较容易的试题占 60 分，考查综合运用能力的、中等难度的试题占 60 分，考查灵活运用能力的、较难的试题占 30 分. 二试自愿参加，试卷包括 3 道解答题，其中有一道平面几何试题，满分 150 分.

例 5 已知：正整数 a，b 能使 $ab+1$ 整除 a^2+b^2.

求证：$\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}=k$ 是某个正整数的平方.

【证明】（1）∵ $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}=k\Rightarrow a^2+b^2=kab+k$，

∴ “正整数 a，b 能使 $ab+1$ 整除 a^2+b^2，除得的商是正整数 k”就是“方程 $x^2+y^2=kxy+k$ 有正整数解 a，b，其中 k 是正整数”.

（2）其次证明：如果方程 $x^2+y^2=kxy+k$ 有正整数解 a，b，那么

$$\begin{cases} a_1=a, \\ b_1=ka-b \end{cases} \quad \text{以及} \quad \begin{cases} a_2=kb-a, \\ b_2=b \end{cases}$$

也是这个方程的（非负）整数解.

事实上，根据“$a^2+b^2=kab+k$”可以推出：

$$\begin{aligned} {a_1}^2+{b_1}^2 &= a^2+(ka-b)^2 \\ &= (a^2+b^2)+k^2a^2-2kab \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=kab+k+k^2a^2-2kab\\
&=k^2a^2-kab+k\\
&=ka(ka-b)+k\\
&=ka_1b_1+k.\\
{a_2}^2+{b_2}^2&=(kb-a)^2+b^2\\
&=(a^2+b^2)+k^2b^2-2kab\\
&=kab+k+k^2b^2-2kab\\
&=k^2b^2-kab+k\\
&=kb(kb-a)+k\\
&=ka_2b_2+k.
\end{aligned}
$$

(3) 用反证法证明 “$b_1<b$ 或 $a_2<a$”，即 “$ka-b<b$ 或 $kb-a<a$”. 假设 “$ka-b\geqslant b$ 并且 $kb-a\geqslant a$”，则

$$
\left.\begin{array}{l}
ka-b\geqslant b \Rightarrow ka\geqslant 2b \Rightarrow \dfrac{k}{2}\geqslant\dfrac{b}{a}\\[2ex]
kb-a\geqslant a \Rightarrow kb\geqslant 2a \Rightarrow \dfrac{k}{2}\geqslant\dfrac{a}{b}
\end{array}\right\}\Rightarrow k\geqslant\frac{b}{a}+\frac{a}{b},
$$

而另一方面，

$$
\begin{aligned}
\frac{a^2+b^2}{ab+1}=k &\Rightarrow a^2+b^2=kab+k\\
&\Rightarrow kab<a^2+b^2\\
&\Rightarrow k<\frac{b}{a}+\frac{a}{b},
\end{aligned}
$$

矛盾.

在以下的证明中，假设 $k\neq 1$，即 $k\geqslant 2$. 因为 $k=1$ 时，$k=1=1^2$，本题求证的结论自然成立.

$$
\left.\begin{array}{l}
k\geqslant 2\\[1ex]
k<\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}
\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{b}{a}+\frac{a}{b}>2 \Rightarrow a\neq b \Rightarrow a<b \text{ 或 } a>b.
$$

(4) 证明：“当 $a<b$ 时，$ka-b\geqslant 0$”；“当 $a>b$ 时，$kb-a\geqslant 0$”.

①当 $a<b$ 时：$\because$ $k\geqslant 2$，

$\therefore$

$$
\left.\begin{array}{r}
kb-a\geqslant 2b-a>2b-b=b\geqslant a\\
kb-a<a \text{ 或 } ka-b<b
\end{array}\right\}\Rightarrow ka-b<b.
$$

$\because$

$$
\left.\begin{array}{l}
\dfrac{b}{a}\leqslant b\\[2ex]
\dfrac{a}{b}\leqslant a
\end{array}\right\}\Rightarrow k<\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\leqslant a+b\leqslant a^2+b,
$$

$$
\Rightarrow a^2+b-k>0,
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore \qquad (ka-b+1)b &= kab-b^2+b \\
&= \underset{\sim\sim\sim\sim}{kab+k}-k-b^2+b \\
&= \underset{\sim\sim\sim\sim}{a^2+b^2}-k-b^2+b \\
&\left.\begin{aligned} &= a^2-k+b>0 \\ &\qquad\qquad \underset{\sim\sim}{b\geqslant 0} \end{aligned}\right\} \Rightarrow ka-b+1>0, \\
&\qquad\qquad\qquad\quad \Rightarrow ka-b+1\geqslant 1, \\
&\qquad\qquad\qquad\quad \Rightarrow ka-b\geqslant 0.
\end{aligned}
$$

②同样可证：当 $a>b$ 时，$kb-a\geqslant 0$.

（5）以上证明了：当正整数 a，b 是方程

$$x^2+y^2=kxy+k \qquad (k\in \mathbf{N},\ k\geqslant 2)$$

的解时，如果 $a<b$，则

$$\begin{cases} a_1=a, \\ b_1=ka-b \qquad (0\leqslant ka-b<b) \end{cases}$$

也是这个方程的非负整数解；如果 $a>b$，则

$$\begin{cases} a_2=kb-a, \qquad (0\leqslant kb-a<a) \\ b_2=b \end{cases}$$

也是这个方程的非负整数解．这就是说，我们可以将 a，b 中较小的数不变，将较大的数换成另一个比它小的非负整数，使它们仍然是这个方程的解．

将一个非负整数换成另一个比它小的非负整数，经过若干次这样的变换，必然得出数 0，即

$$\frac{{a_n}^2+{b_n}^2}{1+a_n b_n}=k$$

中的 a_n，b_n 有一个为零，所以 k 是自然数的平方．证完．

这道出现在 1988 年第 29 届 IMO 中的竞赛题是以往各届 IMO 中最难的一道题．当时，澳大利亚 4 位水平最高的数论专家，花了一整天仍然没有解决这道题．但 268 名选手中有 11 人解出了这道题，包括我国获得满分的选手何宏宇．据说，没有哪一届 IMO 的哪一道题难倒过所有的选手，但却难倒了许多数学家和教练．

有些数学竞赛试题是数学家近期研究成果的副产品，难度大，并富于新意．由于竞赛题的命题人刻意创新，所以多数题的解答没有常规的思维模式可套，没有现成的解题思路可循，因而需要整体上的洞察力、敏锐的直觉、灵活的数学机智和独创的解题技巧．要求人们探索、研究、发现和发挥高度的创造性．参赛选手在解答某些试题中表现出来的机智甚至超出了命题人的预料．

例 6 在一个圆周上有 10 个 ◦ 和 •，把圆周分成 10 段互不包含的弧．规定：两端都是 ◦ 的弧标上 4；两端都是 • 的弧标上 $\frac{1}{4}$；一端为 ◦、另一端为 • 的弧标上 1．（图 1-3(1)）