

Uncertainty Theory and Optimization Series

不确定理论与优化丛书

多属性决策的理论与方法

Multiple Attribute Decision
Making Theory and Methods

徐玖平 吴 巍 编著

Xu Jiuping Wu Wei

清华大学出版社

国家杰出青年基金项目

高等学校优秀青年教师教学科研奖励计划资助项目

多属性决策的理论与方法

Multiple Attribute Decision
Making Theory and Methods

徐玖平 吴 巍 编著

Xu Jiuping Wu Wei

清华大学出版社

北 京

内 容 简 介

多属性决策是多准则决策的重要组成部分,它与多目标决策一起构成了多准则决策体系,是运筹学与管理科学的重要分支.多属性决策着重研究关于离散的、有限个决策方案的决策问题.不确定多属性决策是在经典多属性决策理论上的延伸和发展.不确定多属性决策理论主要包括三部分内容,随机型、模糊型以及描述性决策理论与方法.本书面对关系结构更加复杂的多属性决策问题,分别从随机型多属性决策、模糊型多属性决策及描述性多属性决策三个不同的角度,就不确定决策问题的理论和方法进行研讨,主要介绍随机、模糊和粗糙三类多属性决策问题的模型和有关理论、求解方法以及应用推广.

本书可作为高等院校运筹学、管理科学、信息科学和系统工程等相关专业研究生和高年级本科学学生教材,也可作为相关专业的教师、科技工作者、工程技术人员以及企业管理者的参考书.

版权所有,翻印必究.举报电话:010-62782989 13501256678 13801310933

图书在版编目(CIP)数据

多属性决策的理论与方法/徐玖平,吴巍编著. —北京:清华大学出版社, 2006.8
(不确定理论与优化丛书)

ISBN 7-302-13273-9

I. 多… II. ①徐… ②吴… III. 多目标决策-研究 IV. C934

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第070702号

出 版 者:清华大学出版社 地 址:北京清华大学学研大厦

<http://www.tup.com.cn> 邮 编:100084

社 总 机:010-62770175 客户服务:010-62776969

组稿编辑:刘 颖

文稿编辑:王海燕

印 刷 者:北京四季青印刷厂

装 订 者:北京国马印刷厂

发 行 者:新华书店总店北京发行所

开 本:170×230 印张:24.75 字数:511千字

版 次:2006年8月第1版 2006年8月第1次印刷

书 号:ISBN 7-302-13273-9/O·556

印 数:1~3000

定 价:40.00元

不确定理论与优化丛书

在运筹学、管理科学、信息科学、工业工程、航天技术以及军事等众多领域都存在人为的或客观的不确定性,表现形式也多种多样,如随机性、模糊性、粗糙性以及多重不确定性.辩证地讲,不确定性是绝对的,确定性是相对的.不确定理论与优化不仅具有学术价值,而且具有广阔的应用前景.为了促进不确定理论、不确定规划、算法及应用的学术交流与发展,清华大学出版社决定出版《不确定理论与优化丛书》.本丛书将在编委会的指导下遴选书稿,指导思想是突出学术性、创新性、实用性,既出版有独到见解的学术专著,又出版实用案例分析和研究生教材.如您希望您的著作加入本丛书,请向编委会垂询. <http://orsc.edu.cn/use>

丛 书 编 委 会

刘宝碇(主编)

清华大学数学科学系

北京 100084

liu@tsinghua.edu.cn

刘 颖(责任编辑)

清华大学出版社

北京 100084

liuy@tup.tsinghua.edu.cn

蔡开元(北京航空航天大学)

曹炳元(汕头大学)

哈明虎(河北大学)

胡包钢(中国科学院)

李洪兴(北京师范大学)

李 军(东南大学)

李少远(上海交通大学)

李寿梅(北京工业大学)

刘 克(中国科学院)

刘彦奎(河北大学)

陆 玫(清华大学)

宋考平(大庆石油学院)

唐加福(东北大学)

唐万生(天津大学)

吴从炘(哈尔滨工业大学)

汪定伟(东北大学)

汪寿阳(中国科学院)

王熙照(河北大学)

谢金星(清华大学)

徐玖平(四川大学)

应明生(清华大学)

张汉勤(中国科学院)

张文修(西安交通大学)

张 强(北京理工大学)

不确定理论与优化丛书

Uncertainty Theory and Optimization Series

本丛书已出版书目:

第1卷:《不确定规划及应用》 刘宝碇, 赵瑞清, 王纲

第2卷:《不确定多属性决策方法及应用》 徐泽水

第3卷:《实用马尔可夫决策过程》 刘克

第4卷:《多目标决策的理论与方法》 徐玖平, 李军

第5卷:《不确定理论教程》 刘宝碇, 彭锦

第6卷:《基于粗糙集的不确定决策》 张文修, 仇国芳

第7卷:《多属性决策的理论与方法》 徐玖平, 吴巍

前言

多准则决策 (multiple criteria decision making, MCDM) 的起源可以追溯到 1896 年 Pareto 提出的 Pareto 最优概念. 但直到 1951 年 Koopmans 才将有效点的概念引入决策领域^[223]. 同年, Kuhn 和 Tucker 引入了向量优化的概念^[237]. 多准则决策作为规范决策方法引入决策科学领域则是在 20 世纪 60 年代, 并以 Charnes 和 Cooper 在目标规划上的研究^[73] 和 Roy 提出的 ELECTRE 方法为代表^[325]. 1972 年 Cochrane 和 Zeleny 主持召开的多准则决策国际会议被普遍认为是多准则决策开始发展的标志^[84].

多准则决策是指在多个不能互相替代的准则存在下进行的决策, 它是由多目标决策 (multiple objective decision making, MODM) 和多属性决策 (multiple attribute decision making, MADM) 两个重要部分组成. 多准则决策问题在日常生活中随处可见, 其问题的形式千变万化. 通常认为决策对象是离散的有限数量的备选方案的多准则决策是多属性决策; 决策对象是连续的无限数量的备选方案的多准则决策则是多目标决策. 在实际运用中, 这样的分类能很好地适应解决问题的两个方面: 选择和评价问题使用多属性决策方法, 设计问题则使用多目标决策方法. 这种分类被广泛接受, 二者不同的特征如下表所示^[194].

	多属性决策	多目标决策
准则形式	属性	目标
准则特征	隐含的目标, 与方案不直接联系	明确的目标, 与决策变量直接联系
约束条件	不变动, 合并到属性中	变动, 以显式给出
方案特征	有限数目, 离散, 预定方案	无限数目, 连续, 产生方案
适用范围	选择/评价问题	设计问题

多目标决策与方案预先制定的问题无关, 而与设计问题密切相关. 在各种限制作用的约束下, 寻找最好的方案来达到一些数量化目标可以接受的程度, 从而更好地满足决策者要求. 有关多目标决策的理论与方法可以参考文献 [10], 其中有详尽的论述. 而多属性决策与多目标决策明显不同的特征是只含有限个预先制定的方案. 满意方案的最后选出与产生最后决策的属性满足程度有关, 最终方案的选择在属性

间和属性内进行价值比较与判断得以完成。

虽然多属性决策的研究仅有半个多世纪的历史,但作为决策科学的分支,多准则决策的研究有很长久和深厚的历史背景。早期研究者的工作涉及很多学科,如管理科学、经济学、心理学、市场学、应用统计学、决策学等^[194,386]。它们面对的是不同决策情形中的多准则决策问题,每个领域都有自己独特的使用方法,如:决策学中的最大最小法、先验概率、效用理论等;经济学中的 Pareto 优化、von Neumann-Morgenstern 效用、社会福利函数、成本效益分析等;统计学中的多元回归法、方差分析、因素分析等;心理测量学中的多维标度法、联合测量法等。这些方法的目的和动机主要是解释、合理化、理解或预测决策行为,而不是指导决策。如果从狭义上定义多属性决策方法为辅助决策者识别满意的方案,从而使决策者对于多个属性的满意程度为最大的决策方法,那么上述很多方法就不能直接包含在这个定义范围内,但这些方法确实构成了多属性决策发展的基础。

1957 年 Churchman, Ackoff 和 Arnoff 等人就开始使用简单加权法来处理多属性决策问题^[83]。1968 年 MacCrimmon 在总结多属性决策方法和运用时,才继续研究了许多潜在的有用概念和方法^[248]。1973 年他在文献 [244] 中加入了更多的方法,并且按方法的结构、补偿性、输入偏好等进行了划分^[250]。MacCrimmon 关于多属性决策理论与方法的综述并没引起太多研究者的注意。多属性决策的研究也仅是在 MCDM 中简单的对待^[287,388],绝大部分的研究都在多准则决策上,经典多属性决策研究范畴主要沿多属性效用理论 (multi-attribute utility theory, MAUT) 与级别优先序理论 (outranking relation) 进行发展。直到 1981 年 Hwang 和 Yoon 才明确地将多准则决策问题分为多属性决策和多目标决策两类^[194],从而分别进行讨论和处理。

多属性效用理论

多属性效用理论在 20 世纪 70 年代发展非常迅速。它起源于简单加权法,并已经发展到拟加权方法和多线性效用函数形式。Fishburn^[134,136], Huber^[189,190] 和 Farquhar^[127] 等人为多属性效用理论撰写了详尽和深入的综述性文章。Keeney 和 Raiffa 也发表了一部关于多属性效用理论的巨著^[214]。基于多属性效用理论的经典多属性决策模型可以归结为如下形式。

在决策信息基础上,多属性效用理论的决策方法一般是在属性权重归一化后的量化属性评价的基础上,通过决策方案的效用函数

$$U(A_i) = \sum_{j=1}^n w_j X_{ij}, \quad i \in M \quad (1)$$

集结为综合评价指标,再根据 $U(A_i)$ 值所体现的决策方案优劣来作出决策。其中 X_{ij} 为将 x_{ij} 转换为效益型属性并进行了归一化后的属性评价, $U(A_i)$ 为决策方案 A_i 的效用函数。针对不同形式的决策问题,决策的准则也不相同:对于选择问题,挑选

效用最优的决策方案;关于有序分类问题,按预先定义的不同效用类别对决策方案进行划分;针对排序问题,按照效用大小对决策方案进行排序;至于描述问题,则通过对效用构成分析来对决策方案进行评价。

备选方案	属 性			
	X_1	X_2	$\cdots$	X_n
A_1	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1n}
A_2	x_{21}	x_{22}	$\cdots$	x_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
A_m	x_{m1}	x_{m2}	$\cdots$	x_{mn}
权重	w_1	w_2	$\cdots$	w_n

级别优先序理论

除了多属性效用理论,多属性决策中另一个重要的研究轨迹就是基于级别优先关系的方法。这类方法从概念界定到定义的提出和特定二元关系的计算都与原始的 ELECTRE 方法的基本思想有或多或少的联系^[261]。因此,这类方法又被称为欧洲学派方法或法国学派方法。ELECTRE (ELimination Et Choix Traduisant la REalité, ELECTRE) 方法是 Roy 等人在 20 世纪 60 年代提出的^[43],随后 Roy, Nijkamp, van Delft, Voogd 等人将这个�方法发展到现在的状态^[191, 286, 290, 326, 328] Brans 提出的 PROMETHEE (Preference Ranking Organization METHod for Enrichment Evaluations) 方法与 ELECTRE 方法一样,也是建立在级别优先关系上的排序方法^[60]。此外,常见的级别优先关系方法还有 QUALIFLEX^[296, 297], REGIME^[184, 185], ORESTE^[319, 320], ARGUS^[96], EVAMIX^[289, 423, 424], TACTIC^[414], MELCHIOR^[241], MAPPAC^[264], PRAGMA^[263], IDRA^[156] 以及 PACMAN 等^[148, 149]。

在决策信息的基础上,基于级别优先关系的决策方法通过在各属性上分别进行方案间的两两比较,获得偏好指标 $f(X_{ij})$ 后,再将比较的结果进行量化,进而由相应的各属性权重得到最终方案间的偏好关系。最后通过

$$P(A_i) = \sum_{j=1}^n w_j f(X_{ij}), \quad i \in M \quad (2)$$

进行最终决策。其中建立在相应属性上方案间两两比较的偏好指标 $f(X_{ij})$ 通常是通过方案相互比较矩阵得出的。此时,不同形式的决策问题,相应的决策准则为对于选择问题,挑选偏好指标最优的决策方案;对于有序分类问题,按预先定义的不同偏好类别对决策方案进行划分;对排序问题,按照偏好值不同对决策方案进行排序;至于描述问题,通过偏好分析来对决策方案进行评价。

半个多世纪以来,基于经典多属性决策理论与方法的研究已经比较详尽.然而,还不能完全解决人们在实际中遇到的多属性决策问题.许多不确定性现象不满足排中律,并非是一种非此即彼现象,它可能是也可能不是某类待定现象,其定量研究的逻辑基础绝非二值逻辑.因此,随着研究的深入,不确定多属性决策理论的研究越来越受到重视.

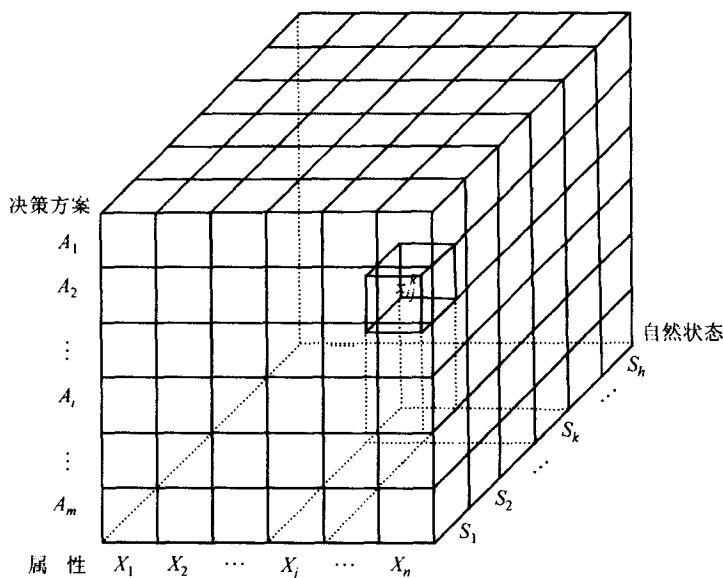
相对于经典多属性决策理论,不确定性多属性决策是非经典的,它是在经典多属性决策理论上的延伸和发展.其内容主要包括三部分,即随机型、模糊型以及描述性决策理论与方法.随机型决策的产生源于决策问题外部的不确定性;模糊型决策的产生属于决策问题内部的不确定性;描述性决策则是通过对已有决策范例的分析,推导出可以用于未知的新方案的决策规则来进行决策.可以说,前两种决策是由决策问题结构不确定性产生的,而最后一种决策则是在决策方案不确定性基础上建立起来的.在实际应用中,随机决策适用于决策属性不确定的情形,模糊决策适用于决策属性值不确定的情形,而描述性决策适用于通过决策方案范例对不确定的未知决策方案进行抉择的情形.

随机型多属性决策的发展

1738年Bernoulli提出的效用概念和期望效用模型,将随机性纳入决策的考虑范畴^[48].随后, Bayes提出贝叶斯理论用于概率的观察与修正,提高了随机决策的客观性和准确性,构筑了随机决策的重要基石^[39]. von Neumann和Morgenstern总结了期望效用值理论,并提出了期望效用模型的公理体系,证明了决策者最大化期望效用的结论^[42]. Wald建立了统计决策问题的基础,并将其用于随机策略方案的选择^[426]; Blackwell和Girshick把主观概率和效用理论整合成一个求解统计决策问题的条理清晰的过程^[51]; Savage扩展了期望效用模型,将主观概率和效用理论结合起来形成了主观期望效用模型的公理框架^[353].许多研究者把它用于涉及不确定性和数学上结构良好的随机试验样本的决策问题,形成了以Bayes分析为基础的统计决策理论.到20世纪60年代,随机决策理论取得长足进展,才出现了许多面向实际应用的决策理论和方法^[100,311,313].期间Howard采用决策分析一词,并把系统分析方法引入决策理论,从理论和应用两方面推进决策理论的发展^[188].一般来说,随机型多属性决策(stochastic multiple attribute decision making, SMADM)可由如下页模型描述.

对于一个随机多属性决策问题,假如对于所有的自然状态能够给予各个方案在各个属性下的评价,就可以通过属性集结方法

$$f(A_i) = \sum_{k=1}^H P_k \left(\sum_{j=1}^n w_j X_{ij}^k \right) \quad (3)$$



转化为单属性随机决策问题进行处理. 知道自然状态的随机分布形式, 就可通过

$$f(A_i) = \sum_{j=1}^n w_j \left(\sum_{k=1}^H P_k X_{ij}^k \right) \quad (4)$$

转化为确定多属性决策问题进行讨论.

上述两式中 P_k 为第 k 种状态发生的概率, w_j 为第 j 个属性的权重, X_{ij}^k 表示在状态 k 下决策方案 i 在属性 j 上的评价值. $f(A_i)$ 则为方案 A_i 的最终评价值. 式 (3) 和式 (4) 就是研究和解决随机多属性问题的两种基本范式.

模糊型多属性决策发展

1965 年 Zadeh 提出了模糊集合的概念, 用隶属函数来刻画元素对集合属于程度的连续过渡性, 即元素从属于集合到不属于集合的渐变过程, 将经典集合的二值逻辑推广到区间内的连续性逻辑^[458]. 模糊集合的提出方便了人们对模糊问题进行定量描述和分析运算. 1978 年 Zadeh 进一步提出可能性理论用以区别随机和模糊现象的本质不同, 使模糊集理论的地位得以确立^[461], 并广泛运用于包括决策领域的许多应用领域. 一般情况下, 模糊多属性决策 (fuzzy multiple attribute decision making, FMADM) 能由如下模型表述.

备选方案	属 性			
	$\tilde{X}_1$	$\tilde{X}_2$	$\cdots$	$\tilde{X}_n$
$\tilde{A}_1$	$\tilde{x}_{11}$	$\tilde{x}_{12}$	$\cdots$	$\tilde{x}_{1n}$
$\tilde{A}_2$	$\tilde{x}_{21}$	$\tilde{x}_{22}$	$\cdots$	$\tilde{x}_{2n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$\tilde{A}_m$	$\tilde{x}_{m1}$	$\tilde{x}_{m2}$	$\cdots$	$\tilde{x}_{mn}$
权重	$\tilde{w}_1$	$\tilde{w}_2$	$\cdots$	$\tilde{w}_n$

模糊多属性决策通常可以按先后次序将决策过程归结为两个阶段^[107,468]:

第一阶段对每个方案,集结它在所有属性下的评价值,可以获得规范化标准模糊属性值矩阵 $\tilde{X}$ 和模糊权重矢量 $\tilde{w}$ 如下,

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} \tilde{X}_{11} & \tilde{X}_{12} & \cdots & \tilde{X}_{1n} \\ \tilde{X}_{21} & \tilde{X}_{22} & \cdots & \tilde{X}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{X}_{m1} & \tilde{X}_{m2} & \cdots & \tilde{X}_{mn} \end{bmatrix}, \quad \tilde{w} = (\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \cdots, \tilde{w}_n).$$

第二阶段根据最终评定值

$$\tilde{U}(A_i) = \tilde{w} \odot \tilde{X} \quad (5)$$

对所有方案进行排序. 其中 $\tilde{U}(A_i)$ 为第 i 个决策方案的最终评定值, $\odot$ 为某一模糊多属性集结算子.

由于在模糊环境下,第一阶段产生的最终评定值一般是用模糊数表示的,因此针对模糊数排序的决策方法在模糊多属性决策中很重要. 自 20 世纪 70 年代以来,已经发表了几十种对模糊集或模糊事物进行比较和排序的方法^[108,110,201,203,242,281],综述性论述可以参见文献 [55,242]. 模糊多属性决策方法则重点在第一阶段或者全部两个阶段上,文献 [77,314] 对这类的许多方法做了比较详尽的综述.

描述性多属性决策发展

随机或模糊多属性决策方法至少都是部分规范化的,它们着眼于提供决策方案全序或偏序的某种形式的保证或建议. 而另外一些方法通过直接发掘属性间的关系来理解和探寻能得到的结论. 对这些结论的理解可以帮助决策者形成针对决策问题的最终解决方法. 粗糙集方法和多元统计方法便是这类方法的代表^[302,391]. 但由于多元统计方法通过对各属性进行因素分析以得到属性变化之间的关系,其计算比较繁琐,在效率和直观性上均不及粗糙集方法,因此本书对描述性多属性决策方法的讨论将以粗糙集方法为主体.

多属性效用理论方法和级别优先关系方法都需要决策者表达特定的偏好信息. 尽管偏好信息和决策者的自然推理过程比较接近, 但是决策者一般擅长于进行决策而不是解释决策. 因此, 将偏好信息输入到这两种方法的模型中看起来并不自然. 决策者通过寻找能够很好地支持选择结果的规则来进行决策^[375], 在从决策范例中获得偏好信息后, 很自然地就可以用“如果……那么……”的决策规则来建立偏好模型. 这就使得基于决策规则的粗糙集理论在多属性决策中地位凸显.

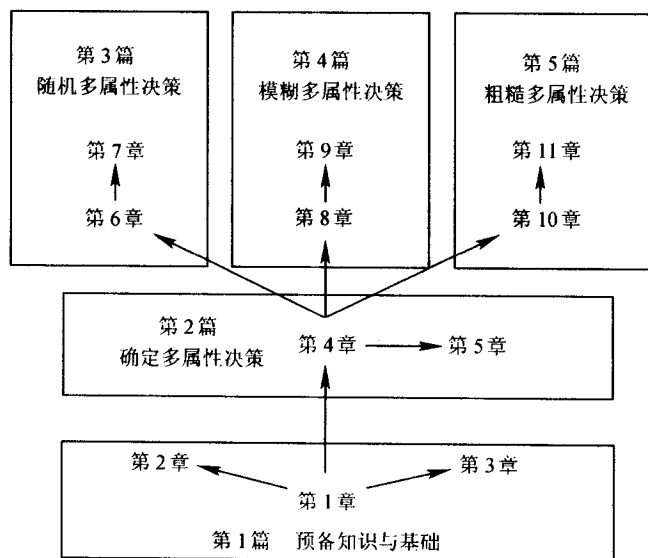
1982 年 Pawlark 提出粗糙集以后的相当长的时间里, 粗糙集理论均未引起研究者的注意^[299]. 近年来, 在 Pawlark, Slowinski, Greco 等人的杰出研究工作推动下, 粗糙集在理论和应用方面都获得了快速发展^[167, 300, 307, 377]. 粗糙集方法从决策表中推导决策规则, 其理论基础类似于多元统计方法, 其优点在于更加简便与直观. 通常可将粗糙多属性决策 (rough-set multiple attribute decision Making, RMADM) 用如下模型刻画.

典型方案	条件属性			决策属性		
	X_1	$\cdots$	X_s	X_{s+1}	$\cdots$	X_n
A_1	x_{11}	$\cdots$	x_{1s}	x_{1s+1}	$\cdots$	x_{1n}
A_2	x_{21}	$\cdots$	x_{2s}	x_{2s+1}	$\cdots$	x_{2n}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
A_m	x_{m1}	$\cdots$	x_{ms}	x_{ms+1}	$\cdots$	x_{mn}

所得决策规则形如: 如果 $\text{Des}_C(A_k) = [f(A_k, X_1), f(A_k, X_2), \cdots, f(A_k, X_s)]$, 那么有 $\text{Des}_D(A_k) = [f(A_k, X_{s+1}), f(A_k, X_{s+2}), \cdots, f(A_k, X_n)]$. 其中, 函数 $f(A_k, X_i)$ 是对方案 k 在属性 X_i 上的描述函数, C 为条件属性集合, D 为决策属性集合. 这样的决策规则通过从决策范例中总结条件属性与决策属性的关系产生, 对于未知的决策方案有很强的适用性.

多属性决策的产生吸引着众多学者加入研究, 也有成千上万的论文发表和著作问世^[35, 77, 126, 194, 214, 260, 302, 329, 418], 但是绝大部分比较全面的综述性文章和经典的多属性决策著作年代已经有些久远了. 多属性决策在实际运用中不断地有新的理论方法和运用技巧提出, 迫切需要一本既全面又能反映最新进展的多属性决策指导书籍. 出于此目的, 本书力图尽可能全面地覆盖多属性决策理论和方法的研究范畴, 并在总结前人研究的基础上进行系统的分类讨论.

全书的内容分为 5 篇共 11 章, 分别围绕多属性决策的基本理论、确定多属性决策、随机多属性决策、模糊多属性决策和粗糙多属性决策等问题展开讨论. 各篇章关系如下页图所示.



第1篇预备知识与基础包括第1章到第3章,内容覆盖了多属性决策理论中的基本知识、属性度量方法和属性集结方法.这些内容是全书所涉及的理论与方法的基础.第2篇确定多属性决策包括第4章和第5章,讨论经典多属性决策的方法以及涉及确定性决策等方面问题的综合方法.它们历史悠久,广为人知,应用领域常能见其身影.非经典方法也在其基础上进行扩展.第3篇随机多属性决策包括第6章随机决策原理和第7章随机决策方法.前者讨论随机多属性决策模型的特点与决策使用的准则,以及确定随机事件概率的方法;后者则以随机多属性决策特有的 Bayes 分析方法、随机优势方法和随机层次分析方法为核心,探讨了随机情形下多属性决策问题的具体解决办法.第4篇模糊多属性决策包括第8章模糊集与决策和第9章模糊决策方法.在详细介绍模糊多属性决策所用到的决策原理和模糊集合理论的基础上,该篇按照类似确定多属性决策方法的分类进行了经典多属性决策方法的模糊扩展.第5篇粗糙多属性决策包括第10章粗糙集理论基础和第11章粗糙集决策方法,分别针对粗糙集理论的基本知识和粗糙集在多属性决策中的应用进行了系统的阐述.

本书内容丰富、理论系统、结构严密、逻辑完备.书前给出了常用符号说明,以方便读者查阅.书中列举了大量决策实例,帮助读者理解和加深印象.书后还附有详细的参考文献和重要的名词索引.阅读与学习本书的读者需要具有高等数学、线性代数、概率论与数理统计等数学基础知识.本书可作为高等院校运筹学、管理科学、信息科学和系统工程等相关专业研究生和高年级本科学生教材,也可作为相关专业

的教师、科技工作者、工程技术人员以及企业管理者的参考书。

该书是在四川大学精品课程“决策分析”讲稿基础上经过反复修改和扩充而成的。作者衷心感谢国家自然科学基金委员会和教育部高等学校优秀青年教师教学科研奖励计划的资助,以及清华大学出版社给予的热心支持和帮助。

徐玖平 吴 巍
2006年夏于四川大学

常用符号说明

$\mathbb{R}$	实数
M	集合 $M = \{1, 2, \dots, m\}$
N	集合 $N = \{1, 2, \dots, n\}$
w	属性权重向量
X	方案属性集合
A	备选方案集合
X_j^+	属性 j 最优值
X_j^-	属性 j 最劣值
D	决策矩阵
$\emptyset$	空集
$\cup$	并集
$\cap$	交集
$-$	差集
A^c	补集
$\in$	属于
$\notin$	不属于
$\exists$	存在
$\forall$	任意
$\subset$	包含
$\subseteq$	包含或相等
U	论域
$\Rightarrow$	推得
$\sim_A$	二元关系 A
$\sim$	相似关系
$\not\sim$	不相似关系
$\succeq$	偏好序

A^T	矩阵 A 转置
C.I.	一致性指标
C.R.	一致性比例
R.I.	随机一致性指标
$\lambda_{\max}$	最大特征值
diag	对角矩阵
e	单位向量
$\odot$	算子
$\tilde{X}$	模糊数
$\mu_{\tilde{A}}(x)$	隶属函数
$\text{hgt}(\tilde{A})$	模糊集的高
$\ker(\tilde{A})$	模糊集的核
$\text{supp}(\tilde{A})$	支撑集
$\tilde{A}_\alpha$	α -截集
$ A $	集合 A 的基数
$\tilde{F}$	模糊数矩阵
I_P	不可区分关系
$\underline{R}X$	X 的 R 下近似集
$\overline{R}X$	X 的 R 上近似集
$\text{bn}_R(X)$	X 的 R 边界域
$\text{Des}_Q(A)$	对象 A 关于属性集合 Q 的描述
$\text{pos}_R(X)$	X 的 R 正域
$\text{neg}_R(X)$	X 的 R 负域
$\underline{\in}$	下成员关系
$\overline{\in}$	上成员关系
$\approx$	下粗相等
$\simeq$	上粗相等
$\approx$	近似相等
$\subset^-$	下包含

$\subset^+$	上包含
core	核
red	约简
$\equiv$	等价
$\neq$	不等价
$Cl_t^{\geq}$	向上分类联合
$Cl_t^{\leq}$	向下分类联合
D_P^+	P 的占优集
D_P^-	P 的被占优集