金太阳系列丛书

丛书主编　陈东旭

2007 同步辅导用书

高二上册

学习的艺术

数学

吉林文史出版社

学习的艺术

数　学

江西金太阳教育研究所

主　编：葛立其
副主编：刘祖希
编　委：(按姓氏笔划排列)
马银双　文德华　王兆庆　任念兵
刘祖希　吕兆勇　杨欢涛　洪春林
徐　斌　郭洪涛　顾文娟　葛立其

吉林文史出版社

(吉)新登字 07 号

书　　名　学习的艺术(高二)
丛书主编　陈东旭
责任编辑　周海英
出版发行　吉林文史出版社
地　　址　长春市人民大街 4646 号　130021
印　　刷　江西法制报社印务公司
规　　格　787 mm×1092 mm
开　　本　16 开本
印　　张　110 印张
字　　数　3498 千字
版　　次　2006 年 5 月第 1 版　2006 年 5 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 7—80702—395—3
定　　价　132.00 元

前言

“金太阳”告诉您

——数学学习的艺术

数学是颇令人头疼的一门学科，许多学生为之投入了太多的时间，而成绩不佳，颇有“事倍而功半”的味道，于是乎，一片“数学难，难于上青天”的怨言.从根本上讲，这种现象是同学们没有掌握正确的学习方法造成的.我们说，学习是科学，但它更是一门艺术！如果真正掌握了学习方法，跨入了学习艺术的门槛，那么，许多难题也就迎刃而解了，也就起到了“事半而功倍”的效果，这正是我们所追求的.

《学习的艺术》是什么？总体说来，主要是三个方面：

其一，对概念和定义进行严密的思考.只有全面深刻地理解概念的内涵与外延，构成完整的知识网络，才能在解题过程中有据可依，而不是乱套公式与定理.

其二，对例题与结论进行认真分析.书本上的例题是非常典型的，它们对理解概念、性质等都有着很好的帮助作用.而例题的解法更是经典的，既起到示范的作用，又揭示着某种规律性的东西.因此，那种对例题轻描淡写或者囫囵吞枣地看一下的做法是极端错误的.

其三，课外练习既要有针对性也要有一定的量.搞“题海战术”，毫无目标地乱做一气是错误的，然而“光说不练”同样也是不可取的.练习要有选择，要有针对性.在做题的过程中要思考“为什么这样做”，做完后要思考“有何规律，能否变形与拓展”.只有这样，才能起到做练习的作用，同时也会有做题的乐趣.

《学习的艺术》丛书，秉承“授人于鱼，不如授人于渔”的教育理念，带领大家跨入了学习艺术的门槛……

课前导航 用趣味性、知识性、规律性的数学知识引导你学习，提高学习兴趣.

要点索引 在透彻分析教材知识体系的基础上，把各个知识点系统化、网络化，使其易懂、易记、易用.

范例导学 依据知识结构，精心挑选典型例题，展示经典解法；题后变式，展现“变中学”的乐趣.

思维进阶 深入研究，提高层次，通过综合型例题，进一步提升解题技巧与知识综合能力，突破知识难点，跨越学习障碍.

错解剖析 展现普遍性错误，探究根源所在，揭示规避方法与技巧.

课时综述 概括重点难点，揭示命题规律，总结方法技巧，便于寻找解题突破口与切入点.

针对训练 按照新颖性、基础性、方向性的原则，挑选具有思辨内涵的习题与知识形成完整的体系，以起到巩固所学、强化所学之功效.

编者

金太阳系列丛书

特别鸣谢以下学校的大力协助：

江西省：南昌二中 江西师大附中 南昌一中 南昌三中 南昌十中 南昌十七中 临川一中 吉安一中 白鹭洲中学 新余一中 新余四中 瑞昌一中 新建二中 上高二中 宜春中学 临川二中 赣州一中 江西南大附中 玉山一中 南康中学 赣县中学 修水一中 安福中学 上饶一中 萍乡中学 贵溪一中 鹰潭一中 景德镇一中 赣州市三中 安义中学 峡江中学

北京市：北京四中 北京景山学校 清华大学附中 北师大附属实验中学 首都师大附中 北师大附中 北京二中 北京二十中

天津市：南开中学 耀华中学 天津实验中学 大港一中 静海县一中

河北省：邯郸一中 唐山市一中 衡水中学 正定中学 遵化一中

内蒙古：内蒙古师大附中 呼和浩特市二中 赤峰市二中

山西省：太原五中 临汾一中 平遥中学 运城中学 大同一中 晋城一中 怀仁县一中 沁县中学

辽宁省：沈阳市二中 东北育才中学 大连市八中 庄河高中

吉林省：东北师大附中 省实验中学 长春市实验中学 吉林市一中 延边市二中 松原前郭五中 松原市第二中学

黑龙江：哈尔滨市六中 哈尔滨市九中 鸡西市一中 齐齐哈尔市实验中学

江苏省：南京师大附中 南京外国语学校 南京一中 南通中学 启东中学 姜堰中学 盐城中学 徐州一中 张家港高中

浙江省：杭州高级中学 浙江大学附中 宁波效实中学 诸暨学勉中学 金华市一中 浙师大附中 东阳中学 衢州二中 绍兴柯桥中学 温州中学

山东省：省实验中学 济南市一中 青岛市二中 曲阜师大附中 潍坊市一中 滨州市北镇中学 烟台市二中 济宁市实验中学 牟平一中

安徽省：合肥市一中 马鞍山市二中 安庆市一中 濉溪中学

福建省：福建师大附中 南平高级中学 福州三中 龙岩二中 龙岩一中 南平一中

河南省：河南大学附中 开封市高中 潢川一中 新乡市一中 平舆二高

湖北省：华中师大一附中 黄冈中学 荆州中学 武汉中学 天门中学 水果湖中学 武汉二中 荆门市一中 仙桃中学

湖南省：湖南师大附中 长沙市一中 郴州市一中 株洲市二中 衡阳市八中 沅江市三中 岳阳市一中 岳阳县一中 桑植一中 株洲市南方中学

广东省：华南师大附中 广东省实验中学 汕头金山中学 惠州市一中 深圳教育学院附中 顺德市一中 高州中学

广　西：广西师大附中 南宁市二中 北海市教科所 桂林市临桂中学

四川省：成都市七中 成都石室中学 成都市十二中 四川师大附中 新都一中 彭州中学 南充高级中学 攀枝花市三中

重庆市：西南师大附中 重庆市一中 重庆市十一中 重庆市三中 重庆市八中

贵州省：凯里市一中 贵阳师大附中 兴义市一中

云南省：昆明一中 昆明三中 宣威一中 大理一中 曲靖一中

西　藏：拉萨中学

陕西省：陕西师大附中 西安中学 安康中学 延安中学 渭南市瑞泉中学 咸阳中学 韩城象山中学 绥德中学 榆林市第一中学 榆林中学

甘肃省：西北师大附中 兰州市一中 天水一中

宁　夏：宁夏大学附中 银川市一中 银川市唐徕回民中学

新　疆：新疆实验中学 乌鲁木齐市一中 库尔勒华山中学兵团二中 乌鲁木齐铁路三中

（限于篇幅仅列部分学校，敬请谅解）

读者意见反馈表

科目：________

姓名		电话		就读年级	
学校		电话		任课教师	
地址				邮政编码	
书名					
读者意见	1.您认为本书最大的特点是什么？ 2.本书有什么不足之处？ 3.您对本书的封面、体例等等，有什么意见和建议？ 4.您还需要什么书？				

①为了进一步提高我所图书的品质，更好地为读者服务，便于再版时修订，特制订本表以征求各地读者的意见，我们热诚欢迎读者们能为我们指出本书的错误和不足之处，提出修改意见！

②凡能正确指出本书中某一处错误（限前十位，以收到信函或传真日期为准），并详细标明正确的改正措施者，经本书编辑部确认后，将能获得一份精美的礼品。

③能对本书的编排、体例以及创新方面提出切实可行的建议者，经采用后，同样能获得一份精美的礼品。

④能在图书上详细标注出错误或不足并附文字说明者，经采用后，除能获得礼品外，还将有机会被聘为我所的“特约编审”。

地址：江西省南昌市上海路349号　江西金太阳教育研究所　　邮编：330029
电话（传真）：0791－8312162　　网址：http://www.jtyjy.com

《金太阳》系列丛书

——江西金太阳教育研究所编著

—— 吉林文史出版社出版

《学习的艺术》(上册)

——2007 高二同步辅导用书

邮 购 目 录

书 名	邮购代码	邮购价(元)	数量
《学习的艺术》·语文分册	YSS21	14.50	
《学习的艺术》·数学分册	YSS22	15.50	
《学习的艺术》·英语分册	YSS23	19.00	
《学习的艺术》·物理分册	YSS24	19.00	
《学习的艺术》·化学分册	YSS25	12.00	
《学习的艺术》·生物分册	YSS26	15.50	
《学习的艺术》·政治分册	YSS27	11.50	
《学习的艺术》·历史分册	YSS28	12.00	
《学习的艺术》·地理分册	YSS29	13.00	

邮购方法：

注明所购图书代码、数量以及您的详细收件地址、姓名、邮编，将书款通过邮局汇至**330046 江西省南昌市省府大院北二路七十六号96号信箱 黄利平 老师 收。**款到三日内发书。

起邮数100册。

联系电话：13077966176

目录

Contents

目录

Contents

第六章 不等式

§6.1 不等式的性质(第1课时)

课前导航

一个月内,甲、乙二人两次同到一家粮店购买大米,两次米价不一样,甲每次购 m 千克大米,乙每次购 n 元钱的大米.请问是甲划算还是乙划算?

上述问题抽象出数学模型为:设大米两次单价分别为 a 元/千克和 b 元/千克,则甲购米的单价为 $\frac{ma+mb}{2m}=\frac{a+b}{2}$(元/千克),乙购米的单价为 $\frac{2n}{\frac{n}{a}+\frac{n}{b}}=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$(元/千克).实际上就是比较甲、乙购米单价的大小,怎么比较呢?事实上这就是两个实数(代数式)大小的比较.

要点索引

1.比较两个实数或两个代数式的大小,往往归结为判断它们的差的符号,这就是作差比较法,其理论依据是:$a>b\Leftrightarrow a-b>0$,$a=b\Leftrightarrow a-b=0$,$a<b\Leftrightarrow a-b<0$.

2.作差比较法的一般步骤是:作差、变形、判断符号.

3.变形是作差比较法的关键,配方、通分、因式分解、分子有理化是常用的变形手段.为了便于判断"差式"的符号,常将"差式"变形为一个常数,或一个常数与几个平方和的形式,或几个因式的积(商)的形式等等.

4.若变形所得"差式"是某个字母的二次三项式,则常用配方法来判断符号.有些变形后的"差式"还需结合常见初等函数的单调性来判断符号.

5.若两数(两式)能判断出都是正数(或都是负数),则可考虑作商比较,其理论依据是:$\frac{M}{N}>1$ 且 $N>0\Rightarrow M>N$;$\frac{M}{N}>1$ 且 $N<0\Rightarrow M<N$.

6.当"差式"或"商式"中含有参数时,一般情况下都需要对参数的取值进行分类讨论.

范例导学

1.作差后配方 ★

【例1】已知 $x,y\in\mathbf{R}$,比较 $2(x^2+2y^2)$ 与 $2x(2y-1)-1$ 的大小.

[分析]考虑作差后,通过配方将"差式"变形为几个平方和的形式,然后判断符号,从而比较两式的大小.

[解析]$2(x^2+2y^2)-[2x(2y-1)-1]$

$=2x^2+4y^2-4xy+2x+1$

$=(x-2y)^2+(x+1)^2\geqslant 0$,

$\therefore 2(x^2+2y^2)\geqslant 2x(2y-1)-1$.

变式1 设 $A=a^2+3ab$,$B=4ab-b^2$,其中 $a,b\in\mathbf{R}$,比较 A 与 B 的大小.

配方,将差化成几个平方和.

2.作差后分解因式 ★

【例2】已知 $a,b\in\mathbf{R}^+$,且 $a\neq b$,比较 a^5+b^5 与 $a^3b^2+a^2b^3$ 的大小.

[分析]考虑作差后，通过分解因式将"差式"变形为几个因式的积的形式，然后判断符号.

[解析]$(a^5+b^5)-(a^3b^2+a^2b^3)$

$=a^3(a^2-b^2)-b^3(a^2-b^2)=(a^3-b^3)(a^2-b^2)$

$=(a-b)^2(a^2+ab+b^2)(a+b)$.

由 $a,b\in\mathbf{R}^+$ 知 $a+b>0$，$a^2+ab+b^2>0$，又 $a\neq b$，

$\therefore(a-b)^2>0$，

$\therefore(a+b)^2(a^2+ab+b^2)(a-b)>0$，

即得$(a^5+b^5)>(a^3b^2+a^2b^3)$.

变式2 已知 $a>b>c$，比较 $(a-b)(a-c)$ 与 $(a-b)(b-c)$ 的大小.

3. 作差后通分 ★

【例3】我们来解决"课前导航"中的问题.

[分析]考虑作差比较，对于分式结构的代数式，我们常常先通分再变形，目标是判断"差式"的符号.

[解析]$\dfrac{a+b}{2}-\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$

先通分后配方.

$=\dfrac{a+b}{2}-\dfrac{2ab}{a+b}=\dfrac{(a+b)^2-4ab}{2(a+b)}$

$=\dfrac{(a-b)^2}{2(a+b)}$.

由 $a,b>0$，且 $a\neq b$ 知 $\dfrac{(a-b)^2}{2(a+b)}>0$，

即$\dfrac{a+b}{2}>\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$.

所以甲的价格高一些.

变式3 甲、乙两车从 A 地沿同一路线达到 B 地，甲车一半时间的速度为 a，另一半时间的速度为 b；乙车一半路程的速度为 a，另一半路程的速度为 b. 若 $a\neq b$，试判断哪辆车先到达 B 地.

4. 作商比较 ★

【例4】已知 $M=\sqrt{a+2}-\sqrt{a+1}$，$N=\sqrt{a+1}-\sqrt{a}$，其中 $a\geqslant 0$，试比较 M 与 N 的大小.

[分析]注意到 $M,N>0$，两式又都是根式，作差不易变形，可考虑作商比较.

[解析]$\dfrac{M}{N}=\dfrac{\sqrt{a+2}-\sqrt{a+1}}{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}$

$=\dfrac{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+2}+\sqrt{a+1}}$，

显然 $0<\sqrt{a+1}+\sqrt{a}<\sqrt{a+2}+\sqrt{a+1}$，

$\therefore\dfrac{M}{N}<1$，又 $N>0$，故 $M<N$.

变式1 已知 $M=t^2-t+1$，$N=\dfrac{1}{t^2+t+1}(t\in\mathbf{R})$，比较 M 与 N 的大小.

思维进阶

【例】设 $a>0$ 且 $a\neq 1$，比较 $\log_a(a^3+1)$ 与 $\log_a(a^2+1)$ 的大小.

[分析]考虑到利用对数函数的单调性来判断两式的大小，因此需要对参数 a 的取值进行分类讨论.

[解析]$\because a^3+1-(a^2+1)=a^2(a-1)$，

当 $a>1$ 时，$a^3+1>a^2+1$，而此时 $y=\log_a x$ 单增，故 $\log_a(a^3+1)>\log_a(a^2+1)$；

当 $0<a<1$ 时，$a^3+1<a^2+1$，而此时 $y=\log_a x$ 单减，故 $\log_a(a^3+1)>\log_a(a^2+1)$.

综上，当 $a>0$ 且 $a\neq 1$ 时，恒有 $\log_a(a^3+1)>\log_a(a^2+1)$.

练习 若 $x>0$，且 $x\neq 1$，$p,q\in \mathbf{N}^*$，试比较 $1+x^{p+q}$ 与 x^p+x^q 的大小.

错解剖析

【例】已知 $a>0$ 且 $a\neq 1$，$m>n>0$，试比较 $A=a^m+\frac{1}{a^m}$ 与 $B=a^n+\frac{1}{a^n}$ 的大小.

[错解]$A-B=(a^m+\frac{1}{a^m})-(a^n+\frac{1}{a^n})$

$=(a^m-a^n)+(\frac{1}{a^m}-\frac{1}{a^n})=(a^m-a^n)+\frac{a^n-a^m}{a^m a^n}$

$=\frac{(a^m-a^n)(a^{m+n}-1)}{a^m a^n}$.

$\because m>n>0$，$a>0$ 且 $a\neq 1$，

$\therefore a^m>a^n$，$a^{m+n}>1$，$\therefore A-B>0$，即 $A>B$.

[剖析]错误的原因在于对指数函数 $y=a^x$ 的单调性认识模糊.事实上，a^m 与 a^n 的大小关系及 a^{m+n} 与 1 的大小关系都取决于 a，故必须分 $a>1$ 及 $0<a<1$ 两种情况来讨论.

[正解]$A-B=\cdots=\frac{(a^m-a^n)(a^{m+n}-1)}{a^m a^n}$.

$\because a>0$，$\therefore a^{m+n}>0$.

若 $a>1$，由 $m>n>0$ 知 $a^m>a^n$，$a^{m+n}>1$，

$\therefore A-B>0$，即 $A>B$；

若 $0<a<1$，由 $m>n>0$ 知 $a^m<a^n$，$a^{m+n}<1$，

$\therefore A-B>0$，即 $A>B$.

综上，对任意 $a>0$ 且 $a\neq 1$，都有 $A>B$.

课时综述

1. 比较两个实数或两个代数式的大小，作差法是常用方法.判断差的符号，变形是关键，各种变形手段可能需要综合运用.当被比较的两数(式)是和、差形式时，一般考虑作差比较.

2. 作商比较法也是常用的方法之一，但在运用时要注意两点，一是被比较的两数(式)必须是正数；二是最后要与“1”作比较.当被比较的两数(式)是积、商或对数形式时，一般考虑作商比较.

3. 含有参数的问题，需要对参数的取值进行讨论.

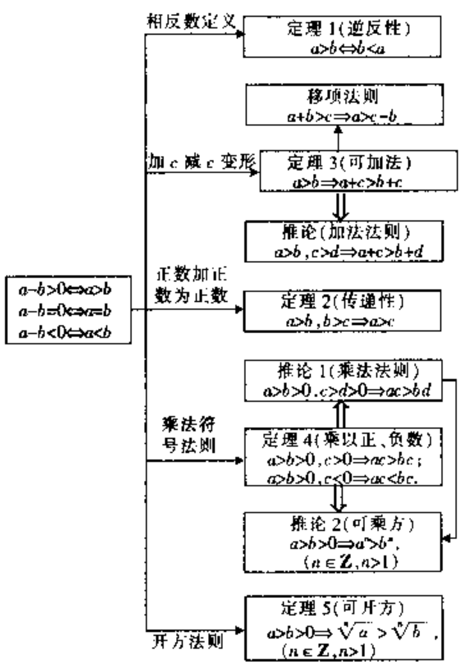
§6.1　不等式的性质(第2课时)

课前导航

先看一个笑话:小王的妈妈对他说,你比姐姐小三岁,小王就说那三年后我就与姐姐一样大了,再过一年我就是哥哥了.我们说这是笑话的原因是,事实上,如果甲的年龄大于乙的年龄,那么乙的年龄必定小于甲的年龄;如果甲的年龄大于乙的年龄,而乙的年龄大于丙的年龄,那么甲的年龄必定大于丙的年龄;如果甲的年龄大于乙的年龄,那么若干年后,甲的年龄仍然大于乙的年龄.

上面三句可是"大实话",相信你一定会认同.在这些"大实话"中,还蕴涵着数学中不等式的基本性质呢!

要点索引



1.不等式的基本性质,包括五条定理和三个推论,这是不等式的理论基础,是今后解(证)不等式的主要依据,只有正确理解性质的条件和结论,才能正确地加以运用.

2.课本对定理的论证是非常必要的,我们在学习过程中就应该养成用逻辑推理进行数学证明的习惯.

3.定理2(传递性)是今后用"放缩法"证明不等式的理论依据.例如在证 $a<c$ 比较困难时,我们可选择适当的 b,使得 $a<b$ 且 $b<c$,则得到 $a<c$.

4.定理3(可加性)可推广,且逆命题也是真命题.

5.定理4(可乘性)应注意有两种不同结果,取决于 c 的符号.推论1应注意"同向正数"不等式可乘;推论2应注意"n 必须为大于1的正整数"这一条件.

6.定理5的证明用的是反证法.$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$ 的反面情况有两种,必须对两种情况都否定才能得出正确结论.

范例导学

1.基本性质的直接运用

【例1】已知 $a>b>0,c<d<0,e<0$,求证:$\frac{e}{(a-c)^2}>\frac{e}{(b-d)^2}$.

[分析]考虑综合运用不等式的可加性、可乘方、可乘性等性质证明结论.

[证明]$c<d<0\Rightarrow -c>-d>0$,

又 $a>b>0$,得 $a-c>b-d>0$

$\Rightarrow (a-c)^2>(b-d)^2>0$

$\Rightarrow 0<\frac{1}{(a-c)^2}<\frac{1}{(b-d)^2}$.

又由 $e<0$,得 $\frac{e}{(a-c)^2}>\frac{e}{(b-d)^2}$.

变式 已知 $a>b>0,c>d>0$,

求证:$\sqrt{\frac{a}{d}}>\sqrt{\frac{b}{c}}$.

2. 基本性质的推广运用 ★

【例 2】比较$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{99^2}$与$\frac{98}{99}$的大小.

[分析]考虑将$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{99^2}$的各项$\frac{1}{k^2}$裂项成两数的差.

[解析]由$\frac{1}{2^2}<\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}$,

先放缩，再裂项.

$\frac{1}{3^2}<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$,

……

$\frac{1}{99^2}<\frac{1}{98}\cdot\frac{1}{99}=\frac{1}{98}-\frac{1}{99}$,

将上述不等式同时相加得

$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{99^2}$

$<(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{98}-\frac{1}{99})=1-\frac{1}{99}=\frac{98}{99}$,

故$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{99^2}<\frac{98}{99}$.

变式 2 比较$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{99}{100}$与$\frac{1}{10}$的大小.

思维进阶

【例】已知 $x<y$,$n\in\mathbf{N}^*$,求证 $x^{2n+1}<y^{2n+1}$.

[分析]考虑不等式的可乘方性质,但由于 x,y 的符号不定,因此不能直接利用不等式性质,要分类讨论.

[证明]若 $x>0$,则 $y>x>0$,所以有 $x^{2n+1}<y^{2n+1}$;

若 $x=0$,则 $y>0$,显然 $x^{2n+1}<y^{2n+1}$;

若 $x<0$,则

(1)当 $y\geqslant0$ 时,显然有 $x^{2n+1}<y^{2n+1}$;

(2)当 $y<0$ 时,有 $-x>-y>0$,

得$(-x)^{2n+1}>(-y)^{2n+1}$,即得 $x^{2n+1}<y^{2n+1}$.

综上所述,$x^{2n+1}<y^{2n+1}$.

练习 已知 a,b 为正数,$n\in\mathbf{N}^*$,求证:$\frac{b^{n-1}}{a^n}+\frac{a^{n-1}}{b^n}\geqslant\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

错解剖析

【例】已知 $f(x)=mx^2-n$,且$-4\leqslant f(1)\leqslant-1$,$-1\leqslant f(2)\leqslant5$,求 $f(3)$的取值范围.

[错解]依题意,有$\begin{cases}-4\leqslant m-n\leqslant-1,\\-1\leqslant 4m-n\leqslant5,\end{cases}$

加减消元得 $0\leqslant m\leqslant3$,$1\leqslant n\leqslant7$,

从而$-7\leqslant f(3)=9m-n\leqslant26$.

[剖析]m 和 n 是两个相互联系、相互制约的量,在得出 $0\leqslant m\leqslant3$,$1\leqslant n\leqslant7$ 后,并不意味着 m、n 可以独立地取得$[0,3]$及$[1,7]$上的一切值.如 $m=0$,$n=7$ 时,$m-n=-7$ 已不满足$-4\leqslant m-n\leqslant-1$.此类题一般是运用待定系数法把 $f(3)$用 $f(1)$、$f(2)$表示出来,再利用不等式的性质求 $f(3)$的范围.切勿像错解那样先求 m、n 的范围,再求 $f(3)$的范围,这样会造成范围扩大.

[正解](法一)

由$\begin{cases}f(1)=m-n,\\f(2)=4m-n\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=\frac{f(2)-f(1)}{3},\\n=\frac{f(2)-4f(1)}{3},\end{cases}$

故 $f(3)=9m-n=\frac{8f(2)-5f(1)}{3}$

$=\frac{8}{3}f(2)-\frac{5}{3}f(1)$.

由$-4\leqslant f(1)\leqslant-1$ 得$\frac{5}{3}\leqslant-\frac{5}{3}f(1)\leqslant\frac{20}{3}$,

由$-1\leqslant f(2)\leqslant5$ 得$-\frac{8}{3}\leqslant\frac{8}{3}f(2)\leqslant\frac{40}{3}$,

$\therefore -1\leqslant f(3)\leqslant 20$ 为所求.

(法二)设 $f(3)=af(1)+bf(2)$,

则 $9m-n=(a+4b)m-(a+b)n$,

$\therefore \begin{cases}a+4b=9,\\ a+b=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{5}{3},\\ b=\dfrac{8}{3},\end{cases}$

待定系数法

$\therefore f(3)=-\dfrac{5}{3}f(1)+\dfrac{8}{3}f(2)$.

(下同法一)

课时综述

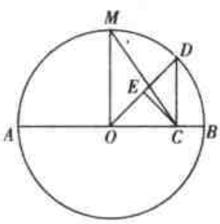
1. 不等式基本性质的综合运用和推广运用，是证明不等式的常用依据.

2. 利用不等式基本性质时，一定要注意其成立的条件和性质的正确表述.

§6.2　算术平均数与几何平均数(第1课时)

课前导航

看一个几何模型：



如图，AB 为直径，O 为圆心. $AC=a$，$BC=b$，$CD\perp AB$ 于 C，$OM\perp AB$ 于 O，$CE\perp OD$ 于 E，不难得到(有兴趣的读者可以自己思考下面的结果)：$CD=\sqrt{ab}$，$DE=\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$，$MO=\dfrac{a+b}{2}$，$MC=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

由图知 $DE\leqslant CD\leqslant MO\leqslant MC$，把这个不等式表示成一般形式即得不等式链：

已知 a,b 是正数，

则 $\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\dfrac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$，

当且仅当 $a=b$ 时等号成立.

这个不等式链描述了两个正数的调和平均数、几何平均数、算术平均数、平方平均数之间的关系.

要点索引

1. 重要不等式：如果 $a,b\in\mathbf{R}$，那么 $a^2+b^2\geqslant 2ab$(当且仅当 $a=b$ 时等号成立).

2. 均值不等式：如果 $a,b\in\mathbf{R}^+$，那么 $\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$(当且仅当 $a=b$ 时等号成立).

(1)适用条件：$a,b\in\mathbf{R}^+$；

(2)语言表述：若 a,b 是正数，则 $\dfrac{a+b}{2}$ 为 a,b 的算术平均数，$\sqrt{ab}$ 为 a,b 的几何平均数，有“两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数”.

3. 均值不等式的常用变形：$\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}\geqslant\dfrac{a+b}{2}(a,b\in\mathbf{R}^+)$，$x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2(x\in\mathbf{R}^+)$.

4. 其他重要不等式：

(1)如果 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$，那么 $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$(当且仅当 $a=b=c$ 时取“=”).

(2)如果 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$，那么 $\dfrac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$(当且仅当 $a=b=c$ 时取“=”).

范例导学

1. 均值不等式的直接应用 ★

【例 1】已知 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$，求证：

$a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)\geqslant 6abc$.

[分析]考虑对原式的各部分直接使用均值不等式.

[证明]左边 $\geqslant a\cdot 2bc+b\cdot 2ca+c\cdot 2ab=6abc$.

变式 1 已知 $a,b\in\mathbf{R}^+$，求证：$\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)(a^3+b^3)\geqslant 8$.

2.凑配之后应用均值不等式 ★

【例 2】已知 $a,b\in\mathbf{R}^+$，且 $a+b=1$，求证：$\sqrt{a+\frac{1}{2}}+\sqrt{b+\frac{1}{2}}\leqslant 2$.

[分析]先将根式凑配成几何平均数，再应用均值定理.

[证明]$\sqrt{a+\frac{1}{2}}$

$=\sqrt{1\cdot\left(a+\frac{1}{2}\right)}\leqslant\frac{1+a+\frac{1}{2}}{2}$

添"1"凑几何平均数.

$=\frac{3}{4}+\frac{a}{2}$，

同理有$\sqrt{b+\frac{1}{2}}\leqslant\frac{3}{4}+\frac{b}{2}$，

相加得$\sqrt{a+\frac{1}{2}}+\sqrt{b+\frac{1}{2}}\leqslant\frac{3}{2}+\frac{a+b}{2}=2$.

变式 2 已知 $a,b\in\mathbf{R}^+$，且 $a+b=1$，求 $\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}$的最大值.

3.均值不等式的变形使用 ★

【例 3】已知 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$，求证：$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\sqrt{2}(a+b+c)$.

[分析]本题的难点在于 $\sqrt{a^2+b^2}$，$\sqrt{b^2+c^2}$，$\sqrt{c^2+a^2}$不易处理，如能找出 a^2+b^2 与 $a+b$ 之间的关系，则问题即可得到解决，因此考虑利用均值不等式的变形.

[证明]将均值不等式变形，

得到 $2(a^2+b^2)\geqslant(a+b)^2$，

于是有 $\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$，

同理有 $\sqrt{b^2+c^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(b+c)$，

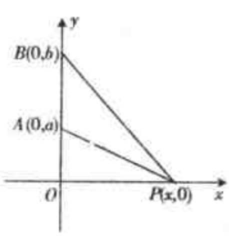
$\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(c+a)$. 三式相加即得

$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\sqrt{2}(a+b+c)$.

变式 3 已知 $a,b\in\mathbf{R}^+$，且 $a+b=1$，求证：$\sqrt{a+\frac{1}{2}}+\sqrt{b+\frac{1}{2}}\leqslant 2$.

思维进阶

【例】如图，平面直角坐标系中，在 y 轴正半轴上有两点 $A(0,a)$，$B(0,b)$，并且 $a<b$，试在 x 轴正半轴上求一点 P，使得 $\angle APB$最大.



[分析]列出目标函数，化为 $y=x+\frac{k}{x}$形式，利用均值不等式求最值.

[解析]设 $P(x,0)$，$x>0$，$\angle BPO=\alpha$，$\angle APO=\beta$，

则 $\tan\angle APB=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$$=\frac{\frac{b}{x}-\frac{a}{x}}{1+\frac{b}{x}\cdot\frac{a}{x}}=\frac{(b-a)x}{x^2+ab}$$

$$=\frac{b-a}{x+\frac{ab}{x}}\leqslant\frac{b-a}{2\sqrt{ab}}.$$

当且仅当 $x=\frac{ab}{x}$，即 $x=\sqrt{ab}$ 时，$\tan\angle APB$ 最大，

由正切函数的单调性知，此时 $\angle APB$ 最大.

练习 已知 $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$，求证：$\tan\theta+\cot\theta\geqslant2$.

错解剖析

【例】已知 $a>1,0<b<1$，则 $\log_a b+\log_b a$ 的取值范围是 ( )

(A)$(2,+\infty)$. (B)$[2,+\infty)$.

(C)$(-\infty,-2)$. (D)$(-\infty,-2]$.

[错解] $\because\log_a b+\log_b a\geqslant2\sqrt{\log_a b\cdot\log_b a}=2$，

$\therefore$ 选 B.

[剖析] $\because a>1,0<b<1$，

$\therefore\log_a b<0,\log_b a<0$，

由于 $\log_a b+\log_b a$ 不符合"各项均为正数"这个条件，故不能直接利用均值定理讨论其值范围. 为此，应先创设一个能应用均值定理的"情境".

[正解] $\because a>1,0<b<1$，

$\therefore\log_a b<0,\log_b a<0$，

故 $-\log_a b>0,-\log_b a>0$，

$\therefore-(\log_a b+\log_b a)=(-\log_a b)+(-\log_b a)$

$\geqslant2\sqrt{(-\log_a b)(-\log_b a)}=2$.

当且仅当 $\log_a b=\log_b a$，即 $ab=1$ 时，上式等号成立.

从而 $\log_a b+\log_b a\leqslant-2$，故选 D.

课时综述

1. 创设运用重要不等式或均值不等式的环境具有一定的技巧性和灵活性，需要"凑配"、"变形"等技巧.

2. 证明不等式时，分析式子的结构是关键，千方百计向重要不等式或均值不等式靠拢.