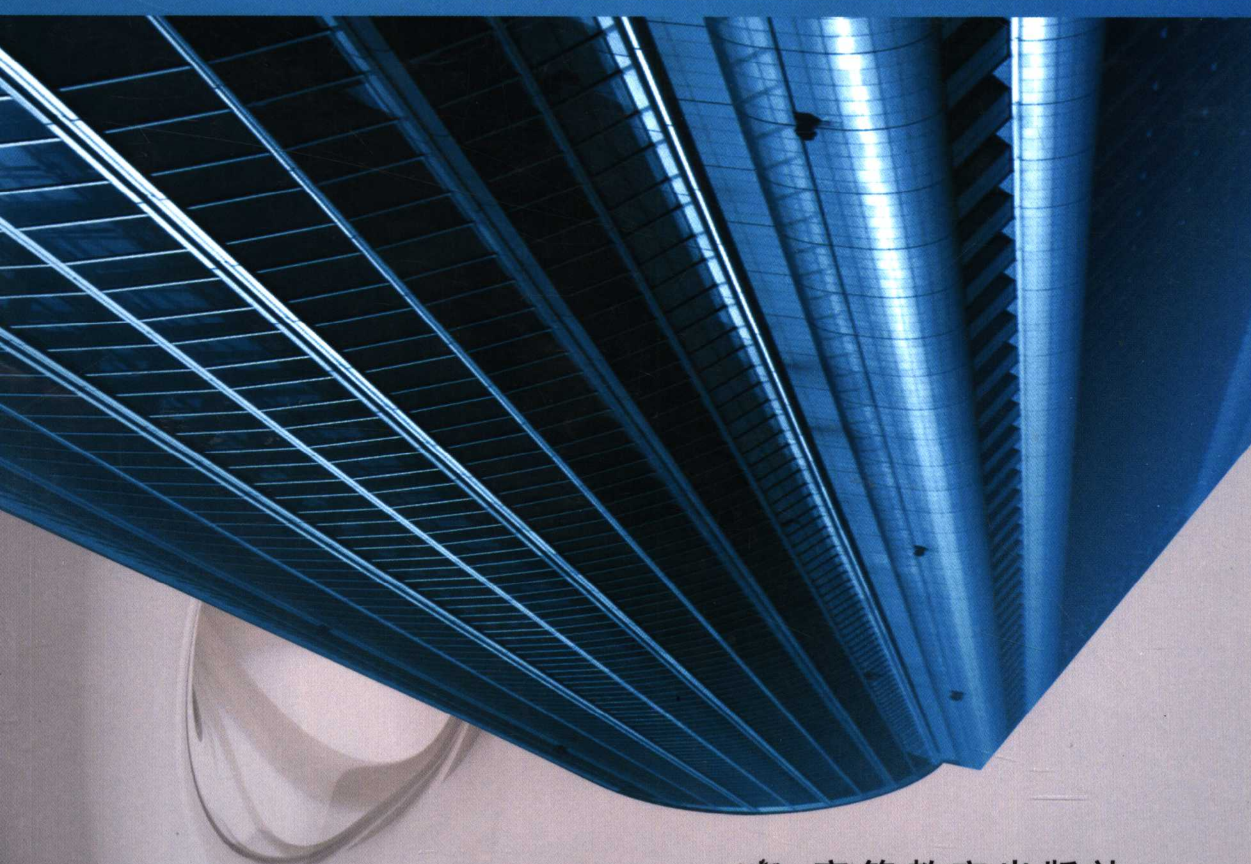
高等学校教材

工程数学

复变函数与积分变换

吉林大学数学学院

王忠仁　张　静



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

工 程 数 学

复变函数与积分变换

吉林大学数学学院
王忠仁　张　静

高等教育出版社

内容提要

本书内容包括：复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数、共形映射、傅里叶变换、拉普拉斯变换以及应用问题选读等，各章精心设计了适量的习题并在书末附有参考答案。适当阐述数学方法的物理意义与工程应用背景是本书的一个特色，最后一章选编了在信号处理等工程领域中几个有代表性的应用问题，并在习题中安排了相应的数学实验内容。书中"序列的傅里叶变换"和"单边傅里叶变换"这两个非常实用的数学工具是其他同类教材所没有的。

本书可作为物理学、电子科学与技术、计算机科学与技术、通讯工程、应用地球物理学、资源与环境科学以及其他涉及信息处理的相关专业的教材，也可供工程科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

工程数学．复变函数与积分变换／王忠仁，张静
北京：高等教育出版社，2006.6
ISBN 7-04-019502-X

Ⅰ.工... Ⅱ.①王...②张... Ⅲ.①工程数学-高等学校-教材②复变函数-高等学校-教材③积分变换-高等学校-教材 Ⅳ.TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 049642 号

策划编辑 王 强 **责任编辑** 张长虹 **封面设计** 王凌波 **责任绘图** 吴文信
版式设计 史新薇 **责任校对** 王 超 **责任印制** 韩 刚

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京汇林印务有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×960 1/16	**版　　次**	2006年6月第1版
印　　张	13.25	**印　　次**	2006年6月第1次印刷
字　　数	240 000	**定　　价**	15.70元

物料号　19502-00

前　言

随着计算机技术的发展,数学作为一种对实际问题模型化的方法和定量化处理的工具,逐步形成了对自然科学、经济学、管理科学以及人文社会科学发展起着重要推动作用的“数学技术”,并产生了巨大的经济效益和社会效益。因此,大学数学的教学,尤其是数学思想方法的应用教学越来越受到各学科的重视。

理工科学生在完成微积分、线性代数和概率统计等基本数学课程的学习后,为了更好地完成本专业的学习,还必须进一步学习有着广泛应用的数学思想方法,如复变函数、积分变换、数学物理方程、特殊函数以及计算方法等内容。因此我们编写了《工程数学》系列教材。它包括《复变函数与积分变换》,《数学物理方程与特殊函数》和《计算方法》三本教材。

本系列教材注重以下几个方面的特色。

1. 体现现代数学方法。本系列教材注重背景知识的介绍,使读者能够领会到数学方法是建立在解决实际问题的基础之上的。在传授基本知识的同时,根据近些年数学应用的最新成果,增加了部分新的数学方法的介绍,如离散序列的傅里叶变换和单边傅里叶变换,小波理论、偏微分方程适定性理论等。

2. 建立了后续数学方法的接口。本系列教材在传授基本数学知识和数学应用的同时,还介绍了数学方法在实际问题中的应用前景和进一步的作用,扩大了学生的视野,提高了学生的学习积极性,为学生今后的学习提供了方便。

3. 考虑了专业应用和动手能力的培养。为了增强本书的运用性,充分体现各学科中的数学应用方法,我们提供了来自于不同学科的应用问题。给出了利用计算机容易实现的计算方法,有些方法在专业教材中是找不到的。与此同时,我们还选择了部分借助计算机软件解决实际问题的例子和习题。

4. 注重教材的系统性和简洁性。本系列教材保持了数学知识的系统性和严密性。在文字表达方面,力求简洁明了,通俗易懂。

《复变函数与积分变换》第一、二、三、四、七、八、九章以及附录3由王忠仁编写,第五、六章、附录1和附录2由张静同志编写。

在《工程数学》系列教材的编写过程中,得到了吉林大学教务处、吉林大学数学学院的大力支持,李辉来教授、吴晓俐女士对本书的编写给予了热情的支持和帮助,王军林、任长宇、孙鹏、陈明杰、姜政毅为本书的出版付出了辛勤的劳动,

在此一并感谢！

由于水平有限，书中难免有错误和不妥之处，恳请读者批评指正。

编 者

20005.08.03

郑重声明

目　　录

第一章　复数与复变函数

复变函数就是变量为复变量的函数.复变函数研究的主要对象是被称为解析函数的一类最常见的复变函数.作为预备知识,本章介绍复数的各种表示法及代数运算,复平面上的区域与曲线,复变函数的概念及复变函数的极限与连续性.这些内容,或者是中学复数知识的复习与补充,或者与实函数微积分中的有关内容相仿.因此,有关结论一般只作叙述而不给出证明.

§1　复数及其几何表示

在初等代数中已经学过复数.为了便于以后讨论,本节简要回顾一下复数的基本定义及结论,并加以必要的补充.

1.1　复数在平面上的几何表示

对于任意两个实数 x,y,称 $z=x+\mathrm{i}y$ 为**复数**,其中 i 满足 $\mathrm{i}^2=-1$ 称为**虚数单位**,x,y 分别称为 z 的**实部**和**虚部**,记作

$$x=\mathrm{Re}(z),\quad y=\mathrm{Im}(z).$$

如果 $\mathrm{Re}(z)=0$,而 $\mathrm{Im}(z)\neq 0$,则 z 称为**纯虚数**.如果两个复数 z_1 及 z_2 的实部和虚部分别相等,则称这两个复数**相等**,记作 $z_1=z_2$.一个复数 z 等于 0,必须且只须它的实部和虚部同时等于 0.一般说来,任意两个复数不能比较大小,除非这两个复数的虚部都为 0.

由于一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 由一对有序实数 (x,y) 唯一确定,所以对于平面上给定的直角坐标系,复数的全体与该平面上的点的全体成一一对应关系,从而复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 可以用该平面上坐标为 (x,y) 的点来表示,这是复数的一个常用表示法,称之为**点表示法**.此时 x 轴称为**实轴**,y 轴称为**虚轴**,两轴所在的平面称为**复平面**或 **z 平面**.在复平面上,“复数 $z=x+\mathrm{i}y$”和“点 $x+\mathrm{i}y$”可以用作同义语.

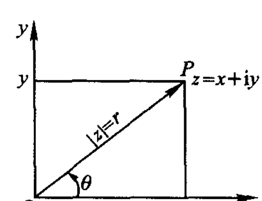


图 1.1

在复平面上,复数 z 还与从原点指向点 $z=x+\mathrm{i}y$ 的平面向量一一对应,因此复数 z 也能用向量 $\overrightarrow{OP}$ 来表示(图 1.1).这种表示法称为 z 的**向量表示法**.向量的长度称为 z 的**模**或**绝对值**,记作

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

在 $z \neq 0$ 的情况下，以正实轴为始边，以表示 z 的向量 $\overrightarrow{OP}$ 为终边的角的弧度数 θ 称为 z 的辐角，记作

$$\mathrm{Arg}\, z = \theta.$$

显然 $\mathrm{Arg}\, z$ 有无穷多个值，其中每两个值相差 2π 的整数倍. 但 $\mathrm{Arg}\, z$ 只有一个值 θ_0 满足条件 $-\pi < \theta_0 \leqslant \pi$，它叫做 $\mathrm{Arg}\, z$ 的**主值**，记作 $\arg z$. 显然

$$\mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2k\pi \quad (k \text{ 为任意整数}).$$

利用直角坐标与极坐标的关系式

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

还可以把 z 表示成下面的形式

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta).$$

这个式子称为 z 的**三角表示式**.

再利用欧拉(Euler)公式①：$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$，可以得到

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

这种表示形式称为 z 的**指数表示式**.

1.2 复数的运算

两个复数 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1, z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ 的**加法**、**减法**以及**乘法**定义如下：

$$(x_1 + \mathrm{i}y_1) \pm (x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1 \pm x_2) + \mathrm{i}(y_1 \pm y_2),$$

$$(x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1).$$

我们又称满足

$$z_2 z = z_1 \quad (z_2 \neq 0)$$

的复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 为 z_1 除以 z_2 的**商**，记作 $z = \dfrac{z_1}{z_2}$. 由两个复数相等的定义，立即可以推得

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

不难证明，与实数的情形一样，复数的四则运算也满足交换律、结合律和分配律.

---

① 该公式的来源可参见第二章 §3.

我们把实部相同而虚部绝对值相等符号相反的两个复数称为**共轭复数**，与 z 共轭的复数记作 $\bar{z}$. 如果 $z=x+\mathrm{i}y$，则 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$. 共轭复数有如下性质：

(i) $\overline{z_1 \pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$，$\overline{z_1 z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$，$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$；

(ii) $\bar{\bar{z}}=z$；

(iii) $z\bar{z}=|z|^2$；

(iv) $z+\bar{z}=2\mathrm{Re}(z)$，$z-\bar{z}=2\mathrm{i}\mathrm{Im}(z)$.

利用共轭复数的性质，可得复数除法的计算方法如下：

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}=\frac{(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2-\mathrm{i}y_2)}{x_2^2+y_2^2}$$

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

为了讨论复数的乘幂与方根，先考虑三角形式的积与商. 设有两个非零的复数

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1),\quad z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2).$$

由乘法的定义可得

$$z_1z_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)].\tag{1.1}$$

于是

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|,\quad \mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}\,z_1+\mathrm{Arg}\,z_2.\tag{1.2}$$

由于辐角的多值性，(1.2)式中后一等式是两个无限集合意义下的相等，即对于 $\mathrm{Arg}(z_1z_2)$ 的任一值，一定有 $\mathrm{Arg}\,z_1$ 及 $\mathrm{Arg}\,z_2$ 的各一值与之对应，使得等式成立；反过来也是一样.

按照商的定义，当 $z_1\neq 0$ 时，有

$$z_2=\frac{z_2}{z_1}z_1,$$

由(1.2)式就有

$$|z_2|=\left|\frac{z_2}{z_1}\right||z_1| \text{ 与 } \mathrm{Arg}\,z_2=\mathrm{Arg}\left(\frac{z_2}{z_1}\right)+\mathrm{Arg}\,z_1.$$

于是

$$\left|\frac{z_2}{z_1}\right|=\frac{|z_2|}{|z_1|},\quad \mathrm{Arg}\left(\frac{z_2}{z_1}\right)=\mathrm{Arg}\,z_2-\mathrm{Arg}\,z_1.\tag{1.3}$$

现在考虑复数的乘幂. 设 n 是正整数，z^n 表示 n 个 z 的乘积，称之为 z 的 n 次

幂. 由乘积公式(1.1)可得

$$z^n = r^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta). \tag{1.4}$$

特别,当 z 的模 $r=1$,即 $z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$ 时,由(1.4)有

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta. \tag{1.5}$$

这就是**棣莫弗(De Moivre)公式.**

如果定义 $z^{-n}=\dfrac{1}{z^n}$,那么当 n 为负整数时(1.4)式也是成立的.

我们称满足方程 $w^n=z(z\neq0)$ 的根 w 为 z 的 n **次根**,记作:

$$w = \sqrt[n]{z}.$$

为了求出根 w,令

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta),\quad w = \rho(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi).$$

由棣莫弗公式(1.5)有

$$\rho^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi) = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta).$$

于是

$$\rho^n = r,\ \cos n\varphi = \cos\theta,\ \sin n\varphi = \sin\theta.$$

显然,后两式成立的充要条件是

$$n\varphi = \theta + 2k\pi \quad (k = 0, \pm1, \pm2, \cdots),$$

由此

$$\rho = r^{\frac{1}{n}},\quad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n},$$

其中,$r^{\frac{1}{n}}$是算术根,所以

$$w = \sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right). \tag{1.6}$$

当 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 时,得到 n 个相异的根:

$$w_0 = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta}{n}\right),$$

$$w_1 = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta+2\pi}{n}\right),$$

…………

$$w_{n-1} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}\right).$$

当 k 取其他整数值时,这些根又重复出现. 例如 $k=n$ 时,

$$w_n = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2n\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta+2n\pi}{n}\right)$$

$$= r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta}{n}\right) = w_0.$$

在几何上,$\sqrt[n]{z}$的 n 个值就是以原点为中心,$r^{\frac{1}{n}}$为半径的圆的内接正 n 边形的 n 个顶点.

例 1.1 求 $\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}$.

解 令 $z=1+\mathrm{i}$,则 $x=\mathrm{Re}(z)=1, y=\mathrm{Im}(z)=1$,

$$r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2}, \tan\theta = \frac{y}{x} = 1, \theta = \frac{\pi}{4},$$

所以

$$1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

于是

$$\sqrt[4]{1+\mathrm{i}} = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right) \quad (k=0,1,2,3).$$

即

$$w_0 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{16}\right),$$

$$w_1 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{16} + \mathrm{i}\sin\frac{9\pi}{16}\right),$$

$$w_2 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{16} + \mathrm{i}\sin\frac{17\pi}{16}\right),$$

$$w_3 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{16} + \mathrm{i}\sin\frac{25\pi}{16}\right).$$

例 1.2 求方程 $z^4+1=0$ 的根.

解 所求方程的根就是 $w=\sqrt[4]{-1}$.

因为

$$-1 = (\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi),$$

所以

$$\sqrt[4]{-1}=\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)\quad(k=0,1,2,3).$$

即

$$w_0=\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$w_1=\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$w_2=\cos\frac{5\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$w_3=\cos\frac{7\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

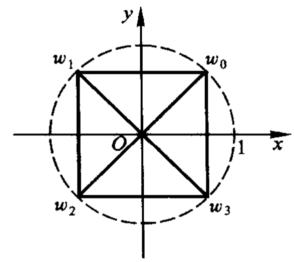


图 1.2

这四个根是内接于中心在原点、半径为 1 的圆的正方形的四个顶点(图 1.2).

1.3　复球面及无穷大

除了用平面内的点或向量来表示复数外,还可以用球面上的点来表示复数.

取一个与复平面切于原点 $z=0$ 的球面,球面上的一点 S 与原点重合(图 1.3).通过 S 作垂直于复平面的直线与球面相交于另一点 N. 我们称 N 为**北极**,S 为**南极**.

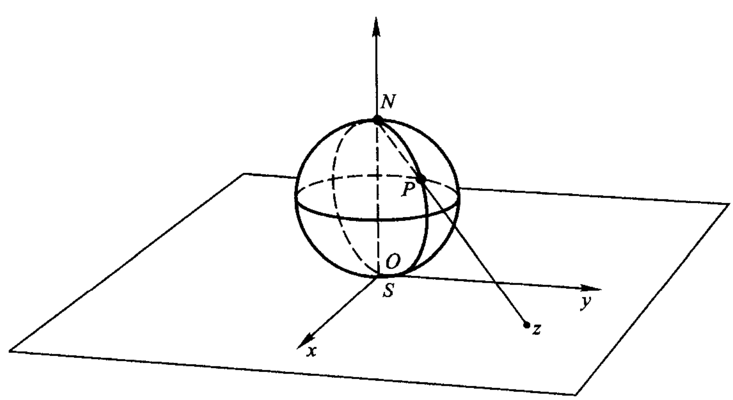


图 1.3

对于复平面内任何一点 z,如果用一直线把点 z 与北极 N 连接起来,那么该直线段一定与球面相交于异于 N 的一点 P. 反过来,对于球面上任何一个异于 N 的点 P,用一直线把 P 与 N 连接起来,这条直线的延长线就与复平面相交于一点 z. 这就说明:球面上的点,除去北极 N 外,与复平面内的点之间存在着一一对应的关系. 如果复数 z 的模 $|z|$ 越来越大,那么点 P 就会越来越接近于北极 N.

由于球面上只有一个北极点 N,我们规定:复平面上有一个唯一的"无穷远点"(记作∞)与球面上的北极点 N 对应. 我们把复平面加上无穷远点称为**扩充复平面**. 这样一来,在球面与扩充复平面之间建立了一一对应的关系,这样的球面称为**复球面**.

对于复数∞来说,实部、虚部与辐角的概念均无意义,但它的模则规定为正无穷大,即$|\infty| = +\infty$. 对于其他每一个复数 z 则有$|z| < +\infty$.

复球面能把扩充复平面的无穷远点明显地表示出来,这就是它比复平面(有时与扩充复平面相对而言也称**有限复平面**)优越的地方. 但本书中,除特别声明外,只考虑(有限)复平面.

为了今后的需要,关于∞的四则运算作如下规定:

$$a \pm \infty = \infty \pm a = \infty \quad (a \neq \infty);$$

$$a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty \quad (a \neq 0);$$

$$\frac{a}{0} = \infty \quad (a \neq 0), \quad \frac{a}{\infty} = 0 \quad (a \neq \infty).$$

运算$\infty \pm \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$以及$\frac{\infty}{\infty}$没有意义.

§2 复变函数

2.1 区域与曲线

在讲区域之前,需要先介绍复平面上一点的邻域、集合的内点与开集的概念.

设 z_0 是复平面上一点,δ 为任意一个正数,满足

$$|z - z_0| < \delta$$

的所有点 z 所组成的集合称为 z_0 的一个**邻域**.

设 G 为一平面点集,z_0 为 G 中一点. 如果存在 z_0 的一个邻域,该邻域内的所有点都属于 G,则称 z_0 为 G 的**内点**. 如果 G 中的每一个点都是它的内点,则称 G 为**开集**.

平面点集 D 称为一个**区域**,如果它满足下列两个条件:

(1) D 是一个开集;

(2) D 中任何两点都可以用完全属于 D 的一条折线连接起来.

满足条件(2)的集合称为**连通集**. 简单地说,区域就是连通的开集.

设 D 为复平面内的一个区域,如果点 P 不属于 D,但在 P 的任意小的邻域