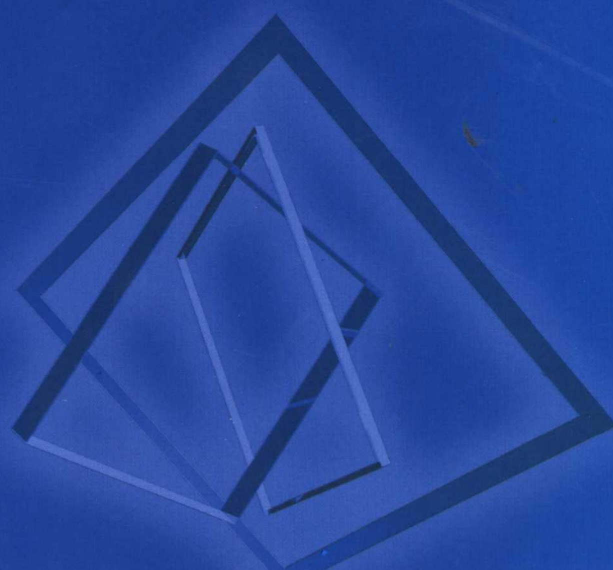
大学数学教学系列教材

高等数学

学习提要与习题精练（下）

封汉颍 主编



中国林业出版社

大学数学教学系列教材

高等数学

学习提要与习题精练

（下册）

主　编：封汉颍
副主编：王琳静　董臻圃
编著者：（按姓氏笔划为序）
王琳静　刘启明　刘立红
张士军　苗淑石　董臻圃

中国林业出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习提要与习题精练．下册/封汉颍主编．—北京：中国林业出版社，2006.1
大学数学教学系列教材
ISBN 7-5038-4202-4

Ⅰ．高…　Ⅱ．封…　Ⅲ．高等数学—高等学校—教学参考资料　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 157647 号

出版　中国林业出版社（100009　北京西城区刘海胡同 7 号）
网址　www.cfph.com.cn
E-mail：cfphz@public.bta.net.cn　电话：66184477
发行　新华书店北京发行所
印刷　中国农业出版社印刷厂
版次　2006 年 1 月第 1 版
印次　2006 年 1 月第 1 次
开本　787mm×1092mm　1/16
印张　13.0
字数　260 千字
印数　1～3500 册
定价　14.60 元

编 委 会

前　言

高等数学、线性代数和概率论与数理统计这三门课程是各工科院校必修的重要基础理论课程，也是全国硕士研究生统一入学数学考试的必考课程，因而，学习好这些课程的重要性是不言而喻的。

但是，对学生来说，学习好数学课程并不是一件容易的事情。那么如何才能学习好数学课程呢？一般来说，必须抓好以下四个环节：课前预习、课堂听课、课后复习和练习，这四个环节一环紧扣一环，不可脱节。为了帮助学生课后复习和练习，我们在总结多年教学实践的基础上，组织编写了这套丛书。

本丛书由《高等数学学习提要和习题精练》、《线性代数学习提要和习题精练》和《概率论与数理统计学习提要和习题精练》三本组成，分别与同济大学编写的《高等数学》、《线性代数》和浙江大学编写的《概率论与数理统计》教材配套使用。为便于学生复习，我们列出了每章的重点、难点，教学要求和内容归纳等，而后编写了与教学同步的习题、综合题和自测题，分别作为学生课后的作业、习题课作业和自我测试使用。我们精选的习题题型广泛，由易到难，由单一到综合，希望学生通过对这些习题的精练，能够深刻理解所学课程的基本概念，熟练掌握所学课程的基本方法，做到循序渐进，举一反三，熟能生巧。同时，根据有关专家建议，我们还在各章自测题后选辑一些历年考研试题并附要点评注。除了全书基本内容的稳定和适时修订，这部分内容将在每年重印时，更新当年考研内容，与时俱进，激发学生的学习兴趣，提高本书的适用性和教学效果。同时，章末最后部分，列“自我小结”一项，对学生来说，通过小结，可以检查本章学习的思路方法和成效，找到薄弱环节，并适时补救；而这又是学生训练文字表达能力的一个有效环节。对任课教员来说，阅读学生的小结，更有利掌握本课程教学动态，不断改进教学方法，以求更好的效果。本书可供开设相应数学课程的学校使用，不但可以进一步规范和统一教学要求，而且也便于学生课后复习作业和教师习题批阅，初稿曾经多期试用，取得良好的教学效果，并受到学生的欢迎。

由于水平有限，缺点错误在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

2005 年 3 月

目　录

前　言

下　册

第八章　多元函数微分法及其应用 …… (1)
习题一　多元函数的基本概念 …… (3)
习题二　偏导数、全微分 …… (5)
习题三　多元复合函数的求导法则 …… (7)
习题四　隐函数的求导法则 …… (9)
习题五　微分法的几何应用 …… (11)
习题六　方向导数与梯度 …… (13)
习题七　多元函数的极值 …… (15)
综合题 …… (17)
自测题 …… (21)
第九章　重积分 …… (27)
习题八　二重积分的概念和性质 …… (29)
习题九　二重积分的计算之一 …… (31)
习题十　二重积分的计算之二 …… (35)
习题十一　二重积分的应用 …… (39)
习题十二　三重积分的计算之一 …… (41)
习题十三　三重积分的计算之二 …… (45)
综合题 …… (49)
自测题 …… (53)
第十章　曲线积分与曲面积分 …… (61)
习题十四　对弧长的曲线积分 …… (63)
习题十五　对坐标的曲线积分 …… (67)
习题十六　格林公式及应用 …… (71)
习题十七　对面积的曲面积分 …… (75)
习题十八　对坐标的曲面积分 …… (79)
习题十九　高斯公式、通量与散度 …… (83)
习题二十　斯托克斯公式、环流量与旋度 …… (87)
综合题 …… (91)
自测题 …… (97)
第十一章　无穷级数 …… (105)
习题二十一　常数项级数的概念和性质 …… (107)

习题二十二　常数项级数的审敛法…… (113)
习题二十三　幂级数…… (119)
习题二十四　函数展开成幂级数…… (123)
习题二十五　函数的幂级数展开式的应用…… (127)
习题二十六　傅里叶级数…… (129)
习题二十七　正弦级数和余弦级数　周期为 $2l$ 的周期函数的傅里叶级数 …… (133)
综合题…… (137)
自测题…… (147)
第十二章　微分方程…… (155)
习题二十八　常微分方程的基本概念　可分离变量方程…… (157)
习题二十九　齐次方程　一阶线性方程…… (163)
习题三十　全微分方程　可降阶的高阶微分方程…… (169)
习题三十一　高阶线性微分方程　二阶常系数齐次线性方程…… (173)
习题三十二　二阶常系数非齐次线性微分方程…… (177)
习题三十三　欧拉方程　幂级数解法　线性方程组…… (181)
综合题…… (185)
自测题…… (193)

班级（队别）　　姓名　　学号

第八章　多元函数微分法及其应用

重点：多元函数概念、偏导数与全微分的概念、多元函数的求导法、极值的求法.

难点：多元复合函数与隐函数的微分法.

教学要求：①理解多元函数概念和二元函数的几何意义。②了解二元函数的极限与连续的概念，以及有界闭区域上连续函数性质.③理解多元函数偏导数与全微分的概念，会求全微分.④了解全微分存在的必要和充分条件.⑤理解方向导数和梯度的概念并掌握其计算.⑥掌握多元复合函数一、二阶偏导数的求法.⑦了解隐函数存在定理，会求多元隐函数的偏导数.⑧了解空间曲线的切线和法平面及曲面的切平面和法线的概念并会求其方程.⑨理解多元函数极值与条件极值的概念，掌握多元函数极值存在的必要条件，了解二元函数极值存在的充分条件，会求二元函数的极值与条件极值，会求简单多元函数的最值并解决一些简单的应用问题.

主要内容：

一、多元函数的基本概念

1. 二元函数

(1)函数定义

(2)定义域的求法

2. 二元函数的极限

(1)极限定义

(2)极限求法

(3)极限不存在的证明

3. 二元函数的连续性

(1)连续定义

(2)连续函数性质

二、多元函数的微分法

1. 偏导数与高阶偏导数

(1)偏导数与高阶偏导数的定义

(2)偏导数与高阶偏导数的求法

(3)混合偏导数相等的条件

2. 全微分

(1)全微分的定义

(2)可微的必要与充分条件

(3)极限、连续、偏导数存在、可微和偏导数连续之间的关系

(4)全微分的计算

(5)全微分的应用

3. 方向导数

(1)方向导数的定义

(2)方向导数的计算

4.复合函数微分法

(1)多元复合函数的概念

(2)复合函数求导的链式法则

5.隐函数的微分法

(1)一个方程的情形

(2)方程组的情形

三、多元函数微分法的几何应用

1.空间曲面的切平面及法线求法

(1)曲面方程为显式方程

(2)曲面方程为隐式方程

(3)曲面方程为参数方程

2.空间曲线的切线与法平面求法

(1)曲线方程为参数方程

(2)曲线方程为一般方程

四、极值

1.无约束极值

(1)极值定义

(2)极值的必要条件

(3)极值的充分条件

(4)极值的求法

2.条件极值

(1)条件极值的定义

(2)条件极值的求法(拉格朗日乘数法)

3.极值的应用(简单的数学建模)

多元函数的基本概念

1. 填空题：

(1)函数 $z=\sqrt{x^2-4x+y^2}\ln(y-x^2)$ 的定义域为________；

(2)设 $f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2$，则 $f(x,y)=$________；

(3)设 $z=\sqrt{y}-f(\sqrt{x}-1)$，且 $y=1$ 时 $z=x$，则函数 $f(x)=$________，$z=$________.

2. 选择题：

(1)设 $f(x+y,x-y)=x^2y^2$，则 $f\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)=$　　(　　)

(A) $f\left(xy+\dfrac{x}{y},xy-\dfrac{x}{y}\right)$　　(B) x^2y^2

(C) $\dfrac{x^2(y^4-1)}{4y^2}$　　(D) $(xy)^2\cdot\left(\dfrac{x}{y}\right)^2$

(2)函数 $[\ln(x^2+y^2-r^2)]\cdot\sqrt{x^2-2rx+y^2}$ 的定义域是　　(　　)

(A) $\begin{cases}x^2+y^2>r^2\\(x-r)^2+y^2\geqslant r^2\end{cases}$ 与 $\begin{cases}x^2+y^2<r^2\\(x-r)^2+y^2\leqslant r^2\end{cases}$　　(B) $\begin{cases}x^2+y^2>r^2\\(x-r)^2+y^2\geqslant r^2\end{cases}$

(C) $\begin{cases}x^2+y^2\geqslant r^2\\(x-r)^2+y^2\geqslant r^2\end{cases}$　　(D) $(x^2+y^2-r^2)(x^2-2rx+y^2)>0$

(3)设 $z_1=(\sqrt{x-y})^2$，$z_2=x-y$，$z_3=\sqrt{(x-y)^2}$，则　　(　　)

(A) z_1 与 z_2 是相同的函数　　(B) z_1 与 z_3 是相同的函数

(C) z_2 与 z_3 是相同的函数　　(D)其中任意两个都不是相同函数

3. 求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to\infty}} x\sin y$　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} \dfrac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\tan(x^2+y^2)}$

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to a}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$

(4) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$

4. 证明：$\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

5. 证明：极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\dfrac{xy^3}{x^2+y^6}$不存在.

6. 为了使函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$在原点(0,0)处连续，应怎样定义 $f(0,0)$的值？

偏导数 全微分

1. 填空题：

(1)若 $f(x,y,z)=\ln(xy+z)$，则 $f_x(1,2,0)=$________，$f_y(1,2,0)=$________，$f_z(1,2,0)=$________；

(2)设 $z=x\ln(xy)$，则 $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}=$________；

(3)设 $u=\sqrt[z]{\dfrac{x}{y}}$，则 $\mathrm{d}u(1,1,1)=$________.

2. 选择题：

(1)函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 偏导数存在是 $f(x,y)$ 在该点连续的 （ ）

(A)充分条件，但非必要条件 (B)必要条件，但非充分条件

(C)充分必要条件 (D)既不是充分条件，也不是必要条件

(2)设 $z=f(x,y)$，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=$ （ ）

(A) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ (B) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$

(C) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ (D) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)}{\Delta x}$

(3)已知全微分 $\mathrm{d}f(x,y)=(x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy-y^2)\mathrm{d}y$，则 $f(x,y)=$（ ）

(A) $\dfrac{1}{3}x^3-x^2y+xy^2-\dfrac{1}{3}y^3$ (B) $\dfrac{1}{3}x^3-x^2y-xy^2-\dfrac{1}{3}y^3$

(C) $\dfrac{1}{3}x^3+x^2y+xy^2-\dfrac{1}{3}y^3$ (D) $\dfrac{1}{3}x^3+x^2y-xy^2-\dfrac{1}{3}y^3+c$

3. 求下列函数的偏导数：

(1)设 $u=x^{\frac{y}{z}}$，求 u_x,u_y 及 $u_z(1,1,1)$；

(2)设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2y)}{xy}, & xy\neq 0\\ x, & xy=0\end{cases}$，求 $f_x(0,1)$.

4. 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，求证：$\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\dfrac{2}{r}$.

5. 设 $f(x,y,z)=xy^2+yz^2+zx^2$，求 $f_{xx}(0,0,1)$，$f_{xz}(1,0,2)$，$f_{yz}(0,-1,0)$，$f_{zzx}(2,0,1)$.

6. 求曲线 $\begin{cases} z=\sqrt{1+x^2+y^2} \\ x=1 \end{cases}$ 在点 $(1,1,\sqrt{3})$ 处的切线与 y 轴正向所成的角度.

7. 试从全微分的定义出发，证明函数 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在点 $(0,0)$ 处不可微.

多元复合函数的求导法则

1. 填空题：

(1)设 $u=e^{x}(y+z)$，而 $y=\sin x, z=\cos x$，则 $\frac{du}{dx}=$ ________；

(2)设 $z=u^2+v^2$，而 $u=x+y, v=x-y$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$ ________；

$\frac{\partial z}{\partial y}=$ ________；

(3)设 $x=f(x^2-y^2, e^{xy})$，其中 f 具有一阶连续偏导数，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$ ________，

$\frac{\partial z}{\partial y}=$ ________.

2. 选择题：

(1)设 $u=f(xyz)$ 可微，则 $\frac{\partial u}{\partial x}=$ （　　）

(A) $\frac{df}{dx}$　　(B) $f_x(xyz)$　　(C) $f'(xyz)\cdot yz$　　(D) $\frac{df}{dx}\cdot yz$

(2)设 $z=f(x,v), v=v(x,y)$，其中 f,v 具有二阶连续偏导数，则 $\frac{\partial z}{\partial y\,\partial z}=$ （　　）

(A) $\frac{\partial^2 f}{\partial v\,\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x}$　　(B) 0

(C) $\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x}$　　(D) $\frac{\partial^2 f}{\partial v\,\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$

(3) $u=f(x+y,xz)$ 有二阶连续偏导数，则 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}=$ （　　）

(A) $f'_2+xf''_{11}+zf''_{12}+xf''_{12}$　　(B) $f'_2+xf''_{21}+xzf''_{22}$

(C) $xf''_{21}+xzf''_{22}$　　(D) $xf''_{12}+f'_2+xzf''_{22}$

3. 设 $z=f(u,v)$ 对 u,v 有二阶连续偏导数，其中 $u=2x+y, v=x^2y^2$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$.

4. 设 $z=e^{-x}\sin\dfrac{x}{y}$,求$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right|_{(2,\frac{1}{\pi})}$.

5. 设 $z=\dfrac{1}{x}f(xy)+y\varphi(x+y)$,$f$ 与 φ 具有二阶连续导数,求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$.

6. 设 $z=f(xy^2,x^2y)$,其中 f 具有二阶连续偏导数,求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$,$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$.

7. 设 $z=\dfrac{y}{f(x^2-y^2)}$,其中 f 为可导函数,验证$\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z}{y^2}$.

隐函数的求导法则

1. 填空题：

(1)由方程 $xy-yz+xz=e^z$ 所确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 在点(1,1)处的全微分 $dz\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}=$________；

(2)设 $f(x,y,z)=e^x yz^2$，其中 $z=z(x,y)$ 是由 $x+y+z+xyz=0$ 所确定的隐函数，则 $f_x(0,1,-1)=$________；

(3)设方程组 $\begin{cases}x+y+z=0\\x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$，则 $\dfrac{dx}{dz}=$________，$\dfrac{dy}{dz}=$________.

2. 选择题：

(1)设 $z=z(x,y)$ 由方程 $x+y+z=e^z$ 确定，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(e,-1)}=$ (　　)

(A)e　　(B)$e-1$　　(C)$\dfrac{1}{e-1}$　　(D)$\dfrac{1}{e}$

(2)设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $F(x-az,y-bz)=0$ 所定义的隐函数，其中 $F(u,v)$ 是变量 u、v 可微函数，a、b 为常数，则必有 (　　)

(A)$a\dfrac{\partial z}{\partial x}-b\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$　　(B)$b\dfrac{\partial z}{\partial x}-a\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$

(C)$b\dfrac{\partial z}{\partial x}+a\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$　　(D)$a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$

(3)设 $z=z(x,y)$ 有二阶连续偏导数，变换 $\begin{cases}u=x+ay\\r=x+by\end{cases}$ 把方程 $6\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 简化为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}=0$，则常数 a、b 等于 (　　)

(A)$a=-2,b=-2$　　(B)$a=3,b=3$

(C)$a=-2,b=3$　　(D)$a=2,b=-3$

3. 函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x^2+y^2e^x+z^2=4z$ 所确定，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$.

4. $\begin{cases} u=f(ux,v+y) \\ v=g(u-v,v^2y) \end{cases}$，其中 f、g 有一阶连续偏导数，求$\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

5. 设 $F(u,v)$是可微函数，而由方程 $F\left(x+\dfrac{z}{y},y+\dfrac{z}{x}\right)=0$ 确定 z 为 x、y 的函数，

证明：$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z-xy$.

6. 设 $y=f(x,t)$，而 t 是由方程 $F(x,y,t)=0$ 所确定的 x、y 的函数，其中 f、F 都具有一阶连续偏导数，试证明：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial F}{\partial t}-\dfrac{\partial f}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial F}{\partial y}+\dfrac{\partial F}{\partial t}}.$$