数学基础知识丛书

不等式

华昌年　吴荣宝
何其正　缪崇正

江苏人民出版社

不 等 式

华昌年 吴荣宝
何其正 缪崇正

江苏人民出版社

内 容 提 要

这套《丛书》共二十四册，系统介绍数学基础知识和基本技能，供中学数学教师、中学生以及知识青年、青年工人阅读。

《丛书》根据现行全日制十年制学校《中学数学教学大纲》（试行草案）精神编写，内容上作了拓宽、加深和提高。《丛书》阐述的数学概念、规律，力求符合唯物辩证法，渗透现代的数学观点和方法，以适应四个现代化的需要。为了便于读者阅读，文字叙述比较详细，内容由浅入深，由易到难，循序渐进，习题、总复习题附有答案或必要的提示。

本书共分五个部分，一、不等式的概念及其基本性质，二、解不等式，三、证明不等式，四、不等式的应用，五、几个重要不等式的推广。本书着重通过实例讲解代数不等式的解法，证明以及它的应用。

不 等 式

华昌年　吴荣宝
何其正　缪崇正

*

江苏人民出版社出版
江苏省新华书店发行
江苏新华印刷厂印刷

1979年7月第1版
1979年7月第1次印刷
印数：1–100,000册

书号：13100·028　定价：0.40元

目　录

一、不等式的概念及其基本性质

比较大小和多少，这是日常惯见的事，就是不会数数的幼儿，也懂得和他的伙伴对齐了手掌来比较手板的大小。在幼儿园里列队做操时，男女小孩分别排成两行，对齐后他们就比出了男孩与女孩谁多谁少，所以，比较种种对象的大小和多少，这是人们的生活常识。

然而，常识究竟能使我们走得多远呢？

我们来看一些很有意义的问题：

爆破时，导火线燃烧的速度是m厘米/秒，人跑开的速度是b厘米/秒，战士点燃导火线后，必须及时跑到a米以外的安全地区，那么导火线需要多长呢？

农田排灌或是城市下水道的窨井大都建造成正方的形状，它的意义是否仅仅在于建造施工时的方便呢？

在某种箱式聚光灶的设计中，要得到弓形的最大内接矩形，这样的问题又应该怎样探讨呢？

在科学试验中，常用一组观测数据的平均值来代表这组数据的真值，这种处理为什么比较合理呢？

这些问题，都与大小和多少的比较有着密切的联系，要解决这类问题，就需要有处理不等量关系的数学知识。

§1. 集合的初步知识

集合是现代数学中的一个重要概念，学习一些有关集合的初步知识，对于进一步认识不等式和理解其它一些数学内

容是有帮助的。

1．**集合** 集合和几何中的点、线、面等概念一样，是数学中的原始概念。平常我们所说的全体、总体、组、类等等，都可以看作是它的同义词。

为了更好地理解这个概念，我们举出下面一些例子。

例如，所有自然数

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots\cdots$$

组成一个自然数集合。

又如，自然数中所有能被2整除的数

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ \cdots\cdots$$

组成一个正偶数集合。

再如，所有绝对值小于5的整数所组成的一个集合，它由以下九个数组成：

$$-4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

在日常生活中，我们也经常遇到集合的例子，例如某校高二(甲)班共有45个同学，这45个同学就组成一个集合，这个集合中的对象是高二(甲)班的学生。在这本小册子中，我们主要研究具有某种性质的数的集合，例如所有大于5的实数所组成的集合，所有小于-3的数所组成的集合等等。

2．**集合的表示法** 为了方便起见，常用一个大写字母来表示一个集合，把这个集合中的对象放在一个花括号内，在上面第一个例子中，如果用A来表示自然数集合，那么

$$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots\cdots\}.$$

在第二、第三个例子中，如果分别用B、C来表示这两个集合，那么

$$B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ \cdots\cdots\};$$

$$C=\{-4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}.$$

一个集合中的对象，称为这个集合的元素. 任何一个对象，对于某一个集合而言，或是属于这个集合，或是不属于这个集合，二者必居其一，在上面三个集合中，数1属于集合A，也属于集合C，但数1不属于集合B，我们把它们记作

$$1 \in A; \quad 1 \in C; \quad 1 \overline{\in} B.$$

它们分别读作数1属于集合A；1属于集合C；1不属于集合B.

一般地，如果x是某个集合A的元素，那么记作

$$x \in A.$$

读作x属于集合A；如果x不是某个集合A的元素，那么记作

$$x \overline{\in} A.$$

读作x不属于集合A.

如果对于任何一个对象，能够指出它是否属于某个集合，那么我们就认为这个集合被确定了. 在上面所举的三个集合中，它们都是确定的集合.

表示具有某种性质的数所成的集合，除了上面的表示法以外，也可以用不等式或公式来表示，例如：所有大于-8的实数所成的集合可以表示成$x > -8$，因此，以后遇到这种不等式，它实际表示所有大于-8的实数所成的集合. 例2的自然数中所有能被2整除的数所成的集合B，我们还可以表示为$B = \{2k\}$(其中k是正整数).

3. 有穷集合、无穷集合、空集 在例1中，集合A的元素的个数是无穷的，**元素的个数是无穷的集合称为无穷集合**；例2中的集合B也是一个无穷集合；在例3中，组成集合C的元素，一共只有九个，这种集合，元素的个数是有限的. **元素的个数是有限个的集合，称为有穷集合.**

例如，一元二次方程$x^2 - 5x - 50 = 0$的根所组成的

集合只有两个元素10和-5，它是有穷集合；二次不等式$x^2-5x-50<0$的解所组成的集合是$-5<x<10$，它是无穷集合。

我们还会遇到不含有任何元素的集合。例如：一元二次方程$x^2+3x+6=0$无实数根，因此，这个方程的实数根所组成的集合不含有任何元素，又如，由不等式$x^2+4<0$的解所成的集合也不含任何元素，**不含有任何元素的集合称为空集**。空集用字母"$\varnothing$"来表示。

4．集合的相等 在自然数中，所有被6整除的数所成的集合E是

$$E=\{6, 12, 18, 24, 30, \cdots\cdots, 6n, \cdots\cdots\}$$

（n是自然数）

在自然数中，所有既能被2整除又能被3整除的数的集合F是

$$F=\{6, 12, 18, 24, 30, \cdots\cdots, 6n, \cdots\cdots\}$$

（n是自然数）

我们看到集合E和F中的所有元素都是相同的。**元素完全相同的两个集合称为这两个集合相等**。并记作

$$E=F.$$

读作集合E等于集合F．

普遍地说，只有能确定集合A中的任一元素是集合B中的元素，反之，集合B中的任一元素也是集合A中的元素时，集合A和B才相等。

5．并集、交集和子集 两个集合A和B中所有元素放在一起（有公共元素时，只计一次）组成的一个新集合C，称集合C为集合A和B的并集（也叫做和集）。并记作

$$C=A\cup B\text{或}C=A+B。$$

两个集合A和B的所有公共元素组成一个新集合C，集合C称为集合A和B的交集。并记作

$$C = A \cap B \text{ 或 } C = AB。$$

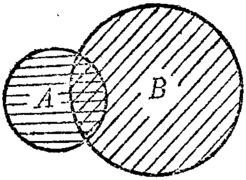

图 1

如图 1，如果我们把集合A中的元素放置在圆A中，把集合B中的元素放置在圆B中，图中水平线条的部分表示集合A，斜线条的部分表示集合B，那么，图中水平线条和斜线条的整个部分就是集合$A \cup B$；双线条的部分就是集合$A \cap B$。

必须指出，当集合A和B没有公共元素时（图 2），它们的并集$A \cup B$是集合A和集合B的所有元素的和，而它们的交集$A \cap B$却是空集$\varnothing$，即

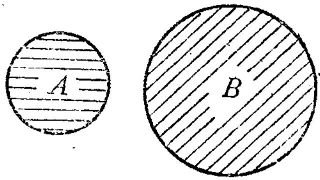

图 2

$$A \cap B = \varnothing。$$

如图 3，当集合A中的全部元素都是集合B中的元素时，它们的并集就是集合B，即

$$A \cup B = B，$$

但它们的交集却是集合A，即

$$A \cap B = A。$$

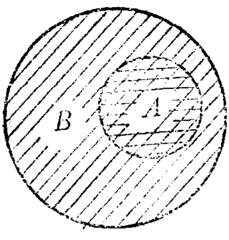

图 3

如果集合A中的元素都是集合B中的元素，那么称集合A是集合B的子集。并记作

$$A \subset B \quad \text{或} \quad B \supset A$$

读作集合B包含集合A，或集合A是集合B的子集。

从子集的意义可以知道，任何两个集合A和B的交集$A\cap B$既是集合A的子集，也是集合B的子集。

例1　P是所有正实数所组成的集合，N是所有负实数所成的集合，O是仅有一个元素零组成的集合（仅有一个元素的集合称为单元素集合）。说明下列各个集合是由哪些元素所组成的：

$P\cup N$，$P\cap N$，$P\cup O$，$N\cap O$，$P\cup N\cup O$。

解　$P\cup N$是所有正实数和负实数，即除去零以外的实数所成的集合；

$P\cap N$是空集$\varnothing$，因为集合P和N没有公共元素；

$P\cup O$是所有正实数和零，即所有非负数所成的集合；

$N\cup O$是所有负实数和零，即所有非正数所成的集合；

$P\cup N\cup O$是所有实数所成的集合。

这里必须指出，集合P、N、O在本书中具有重要的意义，如不作另行说明，集合P、N、O所表示的意义同本例。

并集和交集在解不等式(组)中，有特别重要的意义，下面给出几个简单的例子。

例2　如果A是所有大于5的数所组成的集合，B是所有大于-3的数所成的集合，那么$A\cap B$是所有大于5的数所成的集合(因为集合A是集合B的子集)。

用不等式来表示A、B的交集，就是

不等式组$\begin{cases}x>5\\x>-3\end{cases}$的解集是$x>5$。在数轴上表示成图4。

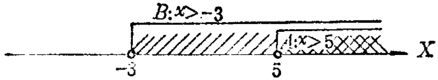

图4

这里形如$\begin{cases} x>5 \\ x>-3 \end{cases}$的不等式组称为**联立不等式组**，它是用花括号“{”来连接的．读作$x>5$且$x>-3$。它的解是指这两个不等式的解的交集$x>5$．即只有同时满足这两个不等式时，才是联立不等式组的解。图 4 中有交叉线的部分是联立不等式组的解。

类似地，不等式组$\begin{cases} x<5 \\ x<-3 \end{cases}$的解集是$x<-3$(图 5)．

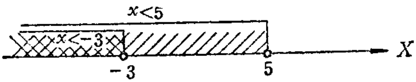

图 5

不等式组$\begin{cases} x>-3 \\ x<5 \end{cases}$的解集是$-3<x<5$（图 6 ）。

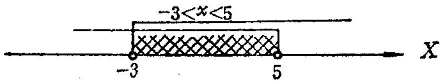

图 6

不等式组$\begin{cases} x<-3 \\ x>5 \end{cases}$的解集是空集K，即不等式组无解（图 7 ）。

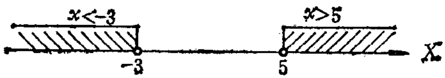

图 7

从上面的讨论可以知道：一般地，如果元素$x\in A$，$x\in B$同时成立，那么$x\in A\cap B$；反过来，如果$x\in A\cap B$，

那么$x \in A$，$x \in B$同时成立。

例3　A是所有大于5的数所成的集合，B是所有大于-3的数所成的集合，那么集合$A \cup B$就是所有大于-3的数所成的集合(因为集合A是集合B的子集，B包含A)。

用不等式来表示A、B的并集，就是$x>-3$。在数轴上表示成图8(-3右面的部分)。

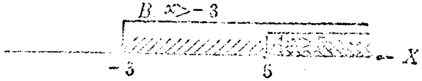

图8

练　　习

1. 如果集合$A=\{2,4,6,8,10\}$，集合$B=\{2,4,8,16\}$，那么$A \cup B$和$A \cap B$中，各有什么元素，用括号把它们表示出来。

2. 如果集合A是所有小于a的实数所成的集合，B是所有小于b的实数所成的集合，这里$a<b$，那么$A \cup B$，$A \cap B$各表示什么？

3. 如果集合A是所有大于a的数所成的集合，B是所有大于b的数所成的集合，这里$a>b$，那么，$A \cup B$，$A \cap B$各表示什么？

4. 如果集合A是所有大于a的数所成的集合，B是所有小于b的数所成的集合，这里$a<b$，那么，$A \cup B$，$A \cap B$各表示什么？如果$a>b$，那么，$A \cup B$，$A \cap B$各表示什么？

5. 如果A是方程$x^2-5x+6=0$的根所成的集合，B是方程$2x^2-3x+2=0$的根所成的集合，那么$A \cup B$和$A \cap B$各有几个元素？它们各是什么？

6. A、B都是直角坐标平面内的点集。A是由横坐标大于3的点所成的集合，B是由纵坐标大于2的点所成的集合。如果在集合A内涂上红色，在集合B内涂上蓝色，那么，$A \cup B$和$A \cap B$各表示什么样的点的集合？在这两个集合内各涂上了什么颜色？

§2. 不等式的基本性质

不等式理论的研究是在实数集上进行的。实数集是有序集。

在实数集上数与数之间的不等关系的定义为：

a 和 b 是任意两个实数，如果 $a-b$ 是正数，即 $a-b\in P$，那么称 a 大于 b，记作 $a>b$，这时也称 b 小于 a，记作 $b<a$。

实数集上数的运算有如下两条重要的基本性质：

1．如果 a 是实数，那么下列三种关系有且仅有一种成立：a 是零，即 $a\in O$；a 是正数，即 $a\in P$；$-a$ 是正数，即 $-a\in P$。

2．如果 a 和 b 是正数，那么它们的积 ab 及它们的和 $a+b$ 也都是正数，即如果 $a\in P$，$b\in P$，那么 $ab\in P$，$a+b\in P$。

利用实数的运算性质，可以建立不等式的运算性质。这些性质是进一步学习和研究不等式所必需的。

定理1 如果 $a>b$，$b>c$，那么 $a>c$。

证明 由 $a>b$，$b>c$，得

$$a-b\in P,\quad b-c\in P.$$

于是 $(a-b)+(b-c)\in P$（性质2）。

即 $a-c\in P$。

因此 $a>c$（定义）。

同样，如果 $a<b$，$b<c$，那么 $a<c$。

这一性质称为不等式的传递性。

定理2 **如果 $a>b$，$c>d$，那么 $a+c>b+d$；如果 $a>b$，c 是任意一个实数，那么 $a+c>b+c$。**

证明 由 $a>b$，$c>d$，得

$$a-b\in P,\quad c-d\in P.$$

于是　　$(a-b)+(c-d)\in P$（性质 2）。

即　　$(a+c)-(b+d)\in P$.

因此　　$a+c>b+d$.

后一种情况的证明，留给读者作为练习。

同样，**如果** $a<b$，$c<d$，**那么** $a+c<b+d$；**如果** $a<b$，c **是任一实数，那么** $a+c<b+c$.

例如，$x-3>-8$，那么 $(x-3)+3>-8+3$，即 $x>-5$，

又如，$x+5<7$，那么 $(x+5)-5<7-5$，即 $x<2$.

定理 2 告诉我们，**在不等式中，右端（或左端）的一些项可以改变符号以后移到左端（或右端）**。这在解不等式中是常用的。

定理 3　**如果** $a>b$，$c>0$，**那么** $ac>bc$；**如果** $a>b$，$c<0$，**那么** $ac<bc$.

证明　由 $a>b$，得

$$a-b\in P.$$

由 $c>0$，得

$$c(a-b)\in P.$$

即　　$ac-bc\in P$，

因此　　$ac>bc$（性质 2）。

对于第二种情况，证明留给读者。

同样，**如果** $a<b$，$c>0$，**那么** $ac<bc$；**如果** $a<b$，$c<0$，**那么** $ac>bc$.

定理 3 告诉我们，**在不等式两边同时乘以同一个正数，不等号方向不变；同时乘以同一个负数，要改变不等号方向。**

例如，$\frac{1}{3}x>-15$，那么$\left(\frac{1}{3}x\right)\times 3>(-15)\times 3$，即$x>-45$；

$-5x<-10$，那么$(-5x)\times\left(-\frac{1}{5}\right)>(-10)\times\left(-\frac{1}{5}\right)$，即$x>2$。

定理 4 **如果$a>b$，$c>d$，那么$a-d>b-c$；如果$a>b$，c是任一实数，那么$a-c>b-c$。**

证明：由$a>b$，$c>d$，得

$$a-b\in P,\quad c-d\in P.$$

于是 $$(a-b)+(c-d)\in P.$$

即 $$(a-d)-(b-c)\in P.$$

所以 $$a-d>b-c.$$

定理 4 的第二部分证明留给读者练习。

这里必须注意，从$a>b$，$c>d$只能得到$a-d>b-c$，不能得出$a-c>b-d$，例如从$5>-4$，$8>-9$可得到$5-(-9)>-4-8$，即$14>-12$；但不能把它推出$5-8>-4-(-9)$而造成$-3>5$的错误。

同样，**如果$a<b$，$c<d$，那么$a-d<b-c$。**

定理 5 **如果$a>b>0$，$c>d>0$，那么$ac>bd$。**

证明 由$a>b$，$c>0$，得

$$ac>bc\text{（定理 3）。}$$

同理 $$bc>bd.$$

于是 $$ac>bd\text{（定理 1）。}$$

这定理推广到一般情形就是：

如果$a_1\geqslant b_1>0$，$a_2\geqslant b_2>0$，……，$a_n\geqslant b_n>0$，那么$a_1a_2\cdots\cdots a_n\geqslant b_1b_2\cdots\cdots b_n$，其中等号当且仅当$a_1=b_1$，

$a_2=b_2$，……，$a_n=b_n$ **同时成立时成立。**

作为特例，当 $a_1=a_2=\cdots\cdots=a_n=a$，$b_1=b_2=\cdots\cdots=b_n=b$ 时，由 $a\geqslant b>0$ 可得$a^n\geqslant b^n$，其中等号当且仅当$a=b$时成立。

这里必须注意的是，a 和 b 必须是正数。

定理 6　如果 $a>b>0$，$c>d>0$，那么 $\dfrac{a}{d}>\dfrac{b}{c}$。

证明　$\because$　$\dfrac{a}{d}-\dfrac{b}{c}=\dfrac{ac-bd}{cd}$，

由 $c\in \mathrm{P}$，$d\in \mathrm{P}$，得

$$cd\in \mathrm{P}.$$

由 $a>b>0$，$c>d>0$，得

$$ac>bd \text{（定理 5）}.$$

于是　　$ac-bd\in \mathrm{P}$。

由除法符号法则，得

$$\frac{ac-bd}{cd}\in \mathrm{P}.$$

因此　　$\dfrac{a}{d}>\dfrac{b}{c}$。

这里必须注意两点：

（1）a，b，c，d 都必须是正的；

（2）结论是 $\dfrac{a}{d}>\dfrac{b}{c}$，而不是 $\dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{d}$。

例如，由 $7>6$，$5>3$ 可得到 $\dfrac{7}{3}>\dfrac{6}{5}$；而不是$\dfrac{7}{5}>\dfrac{6}{3}$，因为后者显然是不正确的。