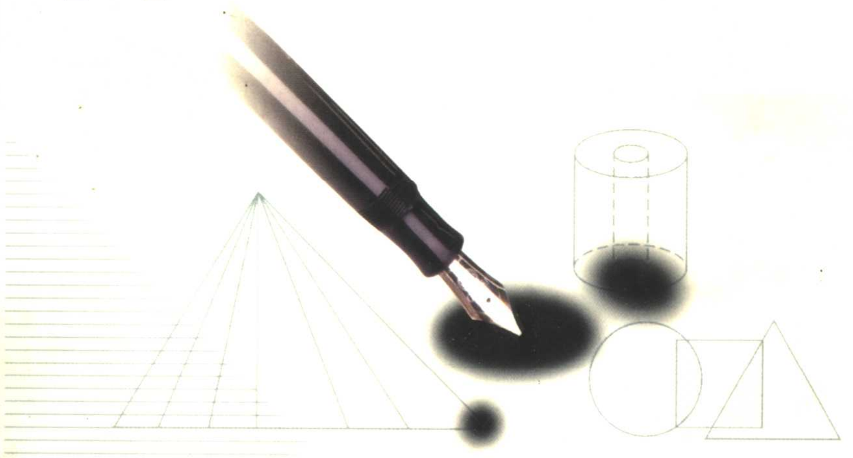
最新

小学数学竞赛试题

全解与评述



马传渔／主编

北京教育出版社

最新小学数学竞赛
试题全解与评述

主　编　马传渔
编　委　钟金泉　沈尧华　梁老虎
　　　　戴惠林　杨卫国　薄方林
　　　　陶利东　方　军　徐坤生
　　　　周建文　张卓燕　周伟根
　　　　司在平　金卫东　任福秀
　　　　张礼平　殷切文　李文珍

北 京 教 育 出 版 社

最新小学数学竞赛试题全解与评述

ZUIXIN XIAOXUESHUXUE JINGSAISHITI QUANJIEYUPINGSHU

马传渔　主编

*

北 京 教 育 出 版 社 出 版
（北京北三环中路 6 号）
邮政编码:100011
北京出版社出版集团总发行
新　华　书　店　经　销
北京宏大印刷有限公司印刷

*

787 毫米×960 毫米　1/16 开本　17 印张　250 千字
2004 年　1 月第 1 版　2004 年　1 月第 1 次印刷

ISBN 7-5303-0429-1/G·404
定价:18.00 元

主编简介

马传渔　南京大学教授，享受国务院政府特殊津贴，录入第 15 版 Who's who in the world 世界名人录．第 31 届国际数学奥林匹克、第 35 届国际数学奥林匹克选题委员会委员．近 20 次参加全国高中、初中数学联赛命题工作．主编出版《黎曼流形的谱》、《空间解析几何学》、《中国华罗庚学校数学课本》、《冲刺金牌奥林匹克解题指导》、《冲刺金牌奥林匹克竞赛辅导》、《高中数学奥林匹克读本》、《初中数学奥林匹克基础教程》等 30 余本科普著作．

前言

1986年，为纪念华罗庚教授逝世一周年，举行了第一届“华罗庚金杯”少年数学邀请赛，拉开了我国小学数学竞赛的序幕. 每隔两年举行的“华罗庚金杯赛”让成千上万的少年数学爱好者步入了竞赛的殿堂. 1991年全国小学数学奥林匹克竞赛的诞生，使我国小学数学竞赛进入了规范化的道路. 随之，各地的小学数学竞赛如雨后春笋般地开展了起来. 比如，北京“迎春杯”、重庆“世纪杯”、羊城“育苗杯”、江苏“小学生数学报杯”、安徽“祖冲之杯”、天津的学年竞赛、四川、浙江、甘肃、吉林等省的夏令营活动，以及香港、日本、汉城、澳门、新加坡小学数学邀请赛等等. 多年来数学竞赛的实践证明，竞赛与考试已逐渐形成了良性循环，也越来越受到广大少年和家长的欢迎.

数学奥林匹克竞赛如同奥林匹克运动一样，是一种力量与精神、灵活与美的竞赛.“充满自信”、“顽强拼搏”、“持之以恒”、“自强不息”是奥林匹克力量和精神的象征；“开阔视野”、“拓宽知识”、“启迪思维”、“发展智力”、“掌握方法”、“提高能力”是奥林匹克灵活与美的体现. 为了对当今和未来的小学数学竞赛的命题要求、内容、形式和趋势有系统、全面、科学的了解，北京教育出版社特编写出版了《最新小学数学竞赛试题全解与评述》.

本书有如下特色：

1. 本书按知识块分类讲解，共分成16讲，每讲有代表性地选取2000年以后的各类竞赛试题进行归纳、汇编.

2. 每讲设立[知识点拨]与[试题汇编]两个栏目.[知识点拨]是每讲的重点. 主要是叙述、总结知识、内容，归纳、分析解题方法，具有理清思路、触类旁通、举一反三、升华解题能力的作用.[试题汇编]对每题给出详细的解答过程并有选择地评述，简明扼要地指出解题技巧与方法，重在拓展思维与提高能力.

3. 本书收集2000年至今的国内外试题共计734题，内容丰富、便于自学，能激发少年学习数学的兴趣，具有较强的小学数学竞赛的实用性与针对性. 特

别是本书第二讲的数学接力赛试题颇富新意，它能提高解题的准确性、思维的严密性以及判断力的灵敏性和科学的合作精神.

4. 书末设置“索引”栏目，标出 2000-2002 年“全国小学数学奥林匹克竞赛”和“我爱数学少年夏令营”每题在本书中所在的页数，便于拼成 21 份完整的试卷(“小奥赛”试卷每年有预赛 A、B 卷，决赛 A、B 卷，共 4 份；“夏令营”试卷每年有计算竞赛、数学竞赛、接力赛卷，共 3 份).

5. 书末附有九份数学竞赛测试卷，其中 2 份是数学接力赛的模拟试卷，4 份是 2003 年小学数学奥林匹克试卷，3 份是 2003 年北京与江苏的竞赛卷，具有数学竞赛磨刀口和试金石的作用，可测评一下解题水平和解题能力.

6. 本书主要力邀江苏、浙江两省长期以来热心于数学竞赛，精心从事数学竞赛辅导并取得优秀成绩的名校长、名教师参与编写工作. 浙江省镇海中心小学在 2001 年和 2002 年“我爱数学少年夏令营”中接连两年荣获团体总分第一名. 江苏省吴江市桃源镇中心小学在吴江市教育局的领导关心下自 1991 年全国小奥赛创办至今，连续 12 年积极参与。其良好的竞赛氛围，初步形成了竞赛的师资梯队，取得了优秀的成绩. 吴江市盛泽中心小学、盛泽实验小学、震泽镇实验小学、青云小学、七都中心小学以及常熟市谢桥中心小学和盐城市解放路实验学校等学校，随着数学竞赛第二课堂生机勃勃地开展，让广大少年数学爱好者沐浴在趣味数学的海洋中，享受着数学给予他们的知识和乐趣.

本书可作为奥林匹克培训班和数学兴趣小组的教材或辅导读物，也可作为广大教师和数学爱好者的竞赛入门教程. 希望广大读者得益于本书，在解题能力和应用能力上更上一个台阶，能在各类考试和竞赛中获胜.

马传渔

2003 年于南京

目 录

第一讲　四则运算与技巧计算

知识点拨

1. 计算能力、逻辑推理能力和空间想像能力是三大基本能力. 计算能力放在首位，足见计算能力的重要地位. 计算能力的提高应注意两个方面：一方面会熟练进行数的四则运算，能快捷获取准确无误的答数. 另一方面，应根据数的某些特点，通过数的分解与合成，或转化运算符号，或对算式进行等值变换，或运用四则运算的定律与性质，或根据 0 与 1 的计算特性，或利用和、差、积、商的变化规律，或利用代数公式等等方法和手段，进行技巧计算，使计算更为迅速，更为巧妙.

2. 利用运算顺序的改变使计算简便. 比如，计算 $6666\times8888\div(4444\times3333)$ 时，若按顺序计算，原式 $=59247408\div14811852=4$. 如果改变一下运算顺序，原式 $=(6666\div3333)\times(8888\div4444)=2\times2=4$，计算就简单多了. 又若注意到 $6666=6\times1111$，$8888=8\times1111$，$4444=4\times1111$，$3333=3\times1111$，立即得到原式 $=\dfrac{8\times6}{3\times4}=4$. 显然，后面的两种计算方法带有一定的计算技巧，它们的计算既快，又准确.

3. 利用运算性质使计算巧妙. 比如 $1\div(2\div3)\div(3\div4)\div(4\div5)\div(5\div6)$ 的计算，倘若按顺序计算，较为繁琐. 如果利用运算性质：$a\div(b\div c)=a\div b\times c$，知原式 $=1\div2\times3\div3\times4\div4\times5\div5\times6=\dfrac{1}{2}\times6=3$. 据此计算的方法，可以得到 $1\div(2\div3)\div(3\div4)\div\cdots\div(2001\div2002)\div(2002\div2003)=1\div2\times2003=1001.5$. 这就是数学中推广的思想. 值得注意的是：分组法和凑整法是两个实用的解题技巧. 所谓分组法，就是将算式中的数根据运算法则和性质，重新进行合理分组配对. 所谓凑整法，就是当算式中的数接近整十、整百、整千…的时候，可以借数取整，使计算简便. 不论分组法还是凑整法，都体现了转化的思想.

4. 利用代数法，即用字母代换算式中的数，使复杂的算式简化. 比如 $(2+3.15+5.87)\times(3.15+5.87+7.32)-(2+3.15+5.87+7.32)\times(3.15+5.87)$ 的计算，按常规算法，原式 $=11.02\times16.34-18.34\times9.02=180.0668-165.4268=14.64$. 如果设 $3.15+5.87=A$，$3.15+5.87+7.32=B$，那么原式 $=(2+A)\times B-(2+B)\times A=2B-2A=2\times(B-A)=2\times7.32=14.64$. 用代数法解题充分体现出优越性.

5. 利用裂项法解题. 先看下面几个式子.

$$\begin{cases}\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{(n+1)-n}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1};\\[2ex] \dfrac{1}{n(n+2)}=\left[\dfrac{(n+2)-n}{n(n+2)}\right]\times\dfrac{1}{2}=\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)\times\dfrac{1}{2};\\[2ex] \dfrac{1}{(n+a)(n+b)}=\left[\dfrac{(n+a)-(n+b)}{(n+a)(n+b)}\right]\times\dfrac{1}{a-b}\\[2ex] \qquad\qquad=\left(\dfrac{1}{n+b}-\dfrac{1}{n+a}\right)\times\dfrac{1}{a-b}(a>b).\end{cases}$$

上述三个式子体现了简单的裂项思想，即把一项分裂成两项的和或差. 由第一个式子，知 $\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$，故有 $\frac{1}{2003}=\frac{1}{2004}+\frac{1}{2003\times2004}$，这表示单位分数 $\frac{1}{2003}$ 可以分拆成两个单位分数 $\frac{1}{2004}$ 与 $\frac{1}{2003\times2004}$ 之和. 比如 $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}=\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\frac{1}{5\times6}+\frac{1}{6\times7}+\frac{1}{7\times8}=(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{5})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{6})+(\frac{1}{6}-\frac{1}{7})+(\frac{1}{7}-\frac{1}{8})=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$. 上述计算是利用裂项，抵消了中间项，使计算简单.

6. 利用公式解题

(1) $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

(2) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

(3) $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n\times(n+1)}{2}$.

(4) 设 $a_1,a_2,a_3\cdots,a_n$ 为等差数列，其公差为 d，即 $a_2=a_1+d,a_3=a_2+d=a_1+2d,\cdots,a_n=a_1+(n-1)d$，则

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{a_1+a_n}{2}\times n.$$

(5) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(6) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

(7) $1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n\times(n+1)=\dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.

(8) $\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n}+\cdots+\dfrac{n-1}{n}+\dfrac{n}{n}+\dfrac{n-1}{n}+\cdots+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n}=n$.

计算一要准确，二要速度. 中国数学会普及工作委员会每年举办的“我爱数学少年夏

令营"中设立计算竞赛，25 道赛题要求 1 小时内完成，以测试解题速度. 现将 2000 年、2001 年、2002 年三份计算竞赛试卷及其解答列于本讲之末.

赛试题汇编

题 1 [2002・小奥赛・决赛・B 卷・题 2]

计算：$[(5\frac{1}{4}-4.25)\times\frac{5}{8}]\div\frac{3}{8}+3.3\div1\frac{5}{6}=$______.

【全解】 原式 $=\frac{5}{8}\div\frac{3}{8}+\frac{33}{10}\div\frac{11}{6}$

$=\frac{5}{3}+\frac{9}{5}=3\frac{7}{15}$.

【评述】 小数化成分数进行计算.

题 2 [2002・小奥赛・决赛・B 卷・题 1]

计算：$(8.4\times2.5+9.7)\div(1.05\div1.5+8.4\div0.28)=$______.

【全解】 原式 $=(21+9.7)\div(0.7+30)=1$.

题 3 [2002・小奥赛・决赛・A 卷・题 1]

计算：$(8.4\times0.25+9.7)\div(1.05\div15+84\div2.8)=$______.

【全解】 原式 $=(2.1+9.7)\div(0.07+30)=11.8\div30.07=\frac{1180}{3007}$.

题 4 [2002・小奥赛・预赛・B 卷・题 2]

计算：$3.6\times42.3\times3.75-12.5\times0.423\times28=$______.

【全解】 原式 $=42.3\times1.25\times(3.6\times3-2.8)=42.3\times1.25\times8=42.3\times10=423$.

【评述】 提出公因数 42.3 与 1.25，并注意小数点移位.

题 5 [2002・小奥赛・预赛・B 卷・题 1]

计算：$(1\times2\times3\times4\times\cdots\times9\times10\times11)\div(27\times25\times24\times22)=$______.

【全解】 原式 $=\frac{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9\times10\times11}{3\times9\times5\times5\times6\times4\times2\times11}=\frac{7\times8\times10}{5}=112$.

【评述】 约去分子、分母相同因数.

题 6 [2002·小奥赛·预赛·A卷·题1]

$(10.5\times11.7\times57\times85)\div(1.7\times1.9\times3\times5\times7\times9\times11\times13\times15)=$________.

【全解】 因 $10.5=3\times5\times0.7$, $11.7=9\times1.3$, $57=3\times19$, $85=5\times17$, 故原式 $=\frac{1}{11}$.

题 7 [2002·小奥赛·预赛·A卷·题2]

$4\times5\frac{3}{4}+5\times6\frac{4}{5}+6\times7\frac{5}{6}+7\times8\frac{6}{7}+8\times9\frac{7}{8}=$________.

【全解】 原式 $=4\times5+3+5\times6+4+6\times7+5+7\times8+6+8\times9+7=245$.

【评述】 $4\times5\frac{3}{4}=4\times5+4\times\frac{3}{4}=20+3=23$, 余类同.

题 8 [2001·小奥赛·决赛·A卷·题1]

计算: $\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+\frac{5}{16}+\cdots+\frac{11}{2^{10}}=$________.

【全解】 原式 $=\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+\frac{5}{16}+\frac{6}{32}+\frac{1}{2^6}\times\left(\frac{7}{1}+\frac{8}{2}+\frac{9}{4}+\frac{10}{8}+\frac{11}{16}\right)$

$$=2\frac{3}{4}+\frac{1}{2^6}\times15\frac{3}{16}$$

$$=2\frac{3}{4}+\frac{243}{1024}=2\frac{1011}{1024}.$$

【评述】 设原式为 S, 即

$$S=\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+\frac{5}{16}+\cdots+\frac{10}{2^9}+\frac{11}{2^{10}},$$

那么两边乘 $\frac{1}{2}$, 得

$$\frac{1}{2}S=\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\cdots+\frac{10}{2^{10}}+\frac{11}{2^{11}},$$

上式两边分别相减, 有

$$\frac{1}{2}S=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{10}}-\frac{11}{2^{11}},$$

即

$$S=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^9}-\frac{11}{2^{10}}.$$

再设　　$T=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^9}$,

两边分别加上$\frac{1}{2^9}$,注意到右边之和为1,得

$$T+\frac{1}{2^9}=1,\quad 即\quad T=1-\frac{1}{2^9}.$$

因此　　$S=3-\frac{1}{2^9}-\frac{11}{2^{10}}=3-\frac{13}{2^{10}}=2\frac{1011}{1024}$.

题 9　[2001·小奥赛·决赛·B卷·题1]

计算:$\frac{1\times3\times5+2\times6\times10+3\times9\times15+4\times12\times20+5\times15\times25}{1\times2\times3+2\times4\times6+3\times6\times9+4\times8\times12+5\times10\times15}=$________.

【全解】　原式$=\frac{(1\times3\times5)\times(1+2^3+3^3+4^3+5^3)}{(1\times2\times3)\times(1+2^3+3^3+4^3+5^3)}=\frac{1\times3\times5}{1\times2\times3}=\frac{5}{2}$.

题 10　[2001·小奥赛·预赛·B卷·题1]

计算:$\frac{(2^2+4^2+6^2+\cdots+100^2)-(1^2+3^2+5^2+\cdots+99^2)}{1+2+3+\cdots+10+9+8+\cdots+1}=$________.

【全解】　分母$=10^2$;

分子$=(2^2-1^2)+(4^2-3^2)+\cdots+(100^2-99^2)$

$=(2+1)(2-1)+(4+3)(4-3)+\cdots+(100+99)(100-99)$

$=3+7+11+\cdots+199=\frac{(3+199)\times50}{2}=101\times50$.

原式$=\frac{101\times50}{100}=\frac{101}{2}$.

【评述】　先利用公式$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$,再计算等差数列$3+7+11+\cdots+199$之和.

题 11　[2001·小奥赛·预赛·A卷·题1]

计算:$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{7}{8}+\frac{15}{16}+\frac{31}{32}+\frac{63}{64}+\frac{127}{128}+\frac{255}{256}=$________.

【全解】　原式$=8-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}\right)$.

将上式括号中的算式再加上$\frac{1}{256}$,从后向前逐项求和等于1.所以,原式

$=8-\left(1-\frac{1}{256}\right)=7\frac{1}{256}$.

题12 [2000·小奥赛·预赛·B卷·题1]

计算：$(\frac{1}{4}+0.75)\div(2\frac{1}{2}\times0.4+1\frac{4}{5}\div1.8)=$__________.

【全解】 原式$=(\frac{1}{4}+\frac{3}{4})\div(\frac{5}{2}\times\frac{2}{5}+\frac{9}{5}\times\frac{1}{1.8})=1\div(1+\frac{9}{5}\times\frac{5}{9})=1\div2=0.5$.

题13 [2000·小奥赛·预赛·A卷·题1]

计算：$1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+\cdots-100^2+101^2=$__________.

【全解】 原式$=(101^2-100^2)+(99^2-98^2)+\cdots+(3^2-2^2)+1^2$

$=(101+100)(101-100)+(99+98)(99-98)+\cdots+(3+2)(3-2)+1$

$=201+197+193+189+\cdots+9+5+1$

$=(1+201)\times51\div2=5151$.

题14 [2000·小奥赛·决赛·A卷·题1]

计算：$[(10.75-4\frac{11}{12})\times2\frac{7}{11}]\div[(1.125+\frac{1}{12})\div(2.25\div10\frac{10}{11})]=$__________.

【全解】 原式$=\left[\left(10\frac{3}{4}-4\frac{11}{12}\right)\times\frac{29}{11}\right]\div\left[\left(1\frac{1}{8}+\frac{1}{12}\right)\div\left(2\frac{1}{4}\div10\frac{10}{11}\right)\right]$

$=\left(5\frac{5}{6}\times\frac{29}{11}\right)\div\left[1\frac{5}{24}\div\left(\frac{9}{4}\times\frac{11}{120}\right)\right]$

$=\frac{35}{6}\times\frac{29}{11}\times\frac{24}{29}\times\frac{9}{4}\times\frac{11}{120}=\frac{21}{8}=2\frac{5}{8}$.

题15 [2000·小奥赛·决赛·B卷·题1]

计算：$36\frac{19}{23}+63\frac{4}{23}\times0.125+\frac{1}{2}\times63\frac{4}{23}+63\frac{4}{23}\times\frac{3}{8}=$__________.

【全解】 原式$=36\frac{19}{23}+63\frac{4}{23}\times\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\right)=36\frac{19}{23}+63\frac{4}{23}=100$.

题16 [2001·四川综合竞赛·题1]

6 的 6%加 8 的 8%是__________.

【全解】 依题意，得

$6\times6\%+8\times8\%=1.$

题 17　[2001·“祖冲之杯”·题 1]

计算：$3\times4+4\times5+5\times6+\cdots+19\times20+20\times21=$________.

【全解】 因为 $1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$，

所以，原式$=\frac{1}{3}\times20\times21\times22-(1\times2+2\times3)=3072.$

【评述】 原式$=[3\times4\times3+4\times5\times3+5\times6\times3+\cdots+20\times21\times3]\div3$

$=[3\times4\times(5-2)+4\times5\times(6-3)+5\times6\times(7-4)+\cdots+20\times21\times(22-19)]\div3$

$=[3\times4\times5-2\times3\times4+4\times5\times6-3\times4\times5+5\times6\times7-4\times5\times6+\cdots20\times21\times22-19\times20\times21]\div3$

$=[20\times21\times22-2\times3\times4]\div3=20\times7\times22-8=3072.$

题 18　[2000·“祖冲之杯”·一、填空题 9]

计算：$\left(\frac{2}{343}+\frac{4}{343}+\frac{6}{343}+\cdots+\frac{98}{343}\right)-\left(\frac{3}{686}+\frac{5}{686}+\frac{7}{686}+\cdots+\frac{99}{686}\right)=$________.

【全解】 原式$=\left(\frac{4}{686}-\frac{3}{686}\right)+\left(\frac{8}{686}-\frac{5}{686}\right)+\left(\frac{12}{686}-\frac{7}{686}\right)+\cdots+\left(\frac{196}{686}-\frac{99}{686}\right)$

$$=\frac{1}{686}\times(1+3+5+\cdots+97)=\frac{1}{686}\times\frac{(1+97)\times49}{2}=3.5.$$

题 19　[2000·“祖冲之杯”·一、填空题 6]

计算：$2000\div2000\frac{2000}{2001}=$________.

【全解】 原式$=2000\div\frac{2000\times2001+2000}{2001}=2000\times\frac{2001}{2000\times(2001+1)}=\frac{2001}{2002}$.

【评述】 关键是约去公因数 2000.

题 20　[2001·重庆市“世纪杯”·题 2]

$2000\times\frac{199919991999}{200020002000}+\frac{2000\times1999-2001\times1998}{2000^2-2001\times1999}=$________

【全解】 $\frac{199919991999}{200020002000}=\frac{1999\times100010001}{2000\times100010001}=\frac{1999}{2000}$，$\frac{2000\times1999-2001\times1998}{2000^2-2001\times1999}$

$$=\frac{(2000\times1998+2000)-(2000\times1998+1998)}{(2000^2-1)+1-2001\times1999}$$

$$=\frac{2000-1998}{(2000+1)(2000-1)+1-2001\times1999}=\frac{2}{1}=2.$$

原式$=2000\times\frac{1999}{2000}+2=2001.$

题 21 [2001・重庆市"世纪杯"・题 1]

$\frac{3}{2\times5}+\frac{2}{5\times7}+\frac{4}{7\times11}+\frac{5}{11\times16}+\frac{6}{16\times22}+\frac{7}{22\times29}+\frac{1}{29}=$________.

【全解】 原式$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{16}\right)+\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{22}\right)+\left(\frac{1}{22}-\frac{1}{29}\right)+\frac{1}{29}=\frac{1}{2}.$

【评述】 利用裂项法.

题 22 [第八届・"华杯赛"・决赛・二试题 1]

计算:$\frac{1^2+2^2}{1\times2}+\frac{2^2+3^2}{2\times3}+\frac{3^2+4^2}{3\times4}+\cdots+\frac{2000^2+2001^2}{2000\times2001}=$________.

【全解】 原式$=\left(\frac{2^2}{1\times2}+\frac{1^2}{1\times2}\right)+\left(\frac{3^2}{2\times3}+\frac{2^2}{2\times3}\right)+\left(\frac{4^2}{3\times4}+\frac{3^2}{3\times4}\right)+\cdots+\left(\frac{2001^2}{2000\times2001}+\frac{2000^2}{2000\times2001}\right)=\frac{2}{1}+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{2}{3}+\frac{4}{3}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{2001}{2000}+\frac{2000}{2001}.$

因为上式中分母为 1～2000 的同分母的两个分数之和都是 2,所以

原式$=2\times2000+\frac{2000}{2001}=4000\frac{2000}{2001}.$

【评述】 改变计算顺序,简化解题.

题 23 [第八届・"华杯赛"・复赛・题 1]

$$\frac{3\frac{1}{3}\times1.9+19.5\div4\frac{1}{2}}{\frac{62}{75}-0.16}\div\frac{3.5+4\frac{2}{3}+2\frac{2}{15}}{0.5\times\left(1\frac{1}{20}+4.1\right)}=(\qquad).$$

【全解】 $$\frac{\frac{10}{3}\times\frac{19}{10}+\frac{195}{10}\times\frac{2}{9}}{\frac{62}{75}-\frac{4}{25}}\div\frac{3\frac{15}{30}+4\frac{20}{30}+2\frac{4}{30}}{\frac{1}{2}\times\left(1\frac{1}{20}+4\frac{2}{20}\right)}$$

$$=\frac{\frac{19}{3}+\frac{13}{3}}{\frac{50}{75}}\div\frac{9\frac{39}{30}}{\frac{1}{2}\times\frac{103}{20}}=\frac{\frac{32}{3}}{\frac{2}{3}}\div\frac{\frac{103}{10}}{\frac{103}{40}}=16\div 4=4.$$

题 24　[2000·江苏"小学生数学报杯"·一、填空题]

$1999\div 1999\frac{1999}{2000}+\frac{1}{2001}=$________.

【全解】　原式$=1999\div\frac{1999\times 2000+1999}{2000}+\frac{1}{2001}$

$$=1999\times\frac{2000}{1999\times(2000+1)}+\frac{1}{2001}=\frac{2000}{2001}+\frac{1}{2001}=1.$$

题 25　[2002·甘肃·第一试题 1]

计算：$\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\frac{1}{99}+\frac{1}{143}+\frac{1}{195}=$________.

【全解】　原式$=\frac{1}{2}\times\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{13}-\frac{1}{15}\right)\right]=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{15}\right)=\frac{2}{15}.$

【评述】　利用裂项法.

题 26　[2002·甘肃·第一试题 2]

计算：$\underbrace{99\cdots9}_{2002}\times\underbrace{99\cdots9}_{2002}+\underbrace{199\cdots9}_{2002}=$________.

【全解】　原式$=\underbrace{99\cdots9}_{2002}\times(1\underbrace{00\cdots0}_{2002}-1)+\underbrace{199\cdots9}_{2002}$

$$=\underbrace{99\cdots9}_{2002}\underbrace{00\cdots0}_{2002}-\underbrace{99\cdots9}_{2002}+\underbrace{199\cdots9}_{2002}$$

$$=\underbrace{99\cdots9}_{2002}\underbrace{00\cdots0}_{2002}+1\underbrace{00\cdots0}_{2002}$$

$$=1\underbrace{00\cdots0}_{4004}.$$

题 27　[2002·甘肃·第一试题 5]

计算：$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{60}\right)+\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{4}+\frac{2}{5}+\cdots+\frac{2}{60}\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{5}+\cdots+\frac{3}{60}\right)+\cdots$

$+\left(\frac{58}{59}+\frac{58}{60}\right)+\frac{59}{60}=$________.

【全解】 原式中，分母为 n 的所有分数之和为

$$\frac{1}{n}\times[1+2+\cdots+(n-1)]=\frac{1}{n}\times\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n-1}{2},$$

所以原式 $=\frac{1}{2}\times(1+2+\cdots+59)=885.$

题 28 [2001·甘肃·第一试题 4]

$49\times37+51\times62+51\times37+49\times62=$ ________.

【全解】 原式 $=49\times(37+62)+51\times(62+37)$

$=49\times99+51\times99=99\times(49+51)=9900.$

题 29 [2001·甘肃·第一试题 3]

$\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\frac{1}{6^2-1}+\cdots+\frac{1}{100^2-1}=$ ________.

【全解】 由 $\frac{1}{a^2-1}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a+1}\right)$，可将原式化为

$$\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2-1}-\frac{1}{2+1}+\frac{1}{4-1}-\frac{1}{4+1}+\cdots+\frac{1}{100-1}-\frac{1}{100+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2-1}-\frac{1}{100+1}\right)=\frac{50}{101}.$$

【评述】 利用裂项法解题.

题 30 [2001·甘肃·第一试题 2]

$0.45-[10-(0.2+6.37\div0.7)]\times0.5=$ ________.

【全解】 原式 $=0.45-[10-(0.2+9.1)]\times0.5=0.45-0.7\times0.5=0.1.$

题 31 [2001·甘肃·第一试题 1]

$3+6+9+\cdots+2001=$ ________.

【全解】 原式 $=3\times(1+2+\cdots+667)=3\times\frac{667\times668}{2}=668334.$

题 32 [2000·甘肃·第一试题 1]

计算：$19992000\times20001999-19991999\times20002000=$ ________.