新课标

四星级题库

难题解析

初中
数学

主编 邵翼如

上海科技教育出版社

新课标

四星级题库

Super Star

难题解析

初中数学

主编 邵翼如
编者 阮夏丽 姚 磊
孟 莉 顾 衍
叶慧勤 邵翼如

上海科技教育出版社

新课标四星级题库难题解析

初中数学

主　　编：邵翼如
编　　者：阮夏丽　姚　磊　孟　莉　顾　衍　叶慧勤　邵翼如
出版发行：世　纪　出　版　集　团
上海科技教育出版社
（上海市冠生园路 393 号　邮政编码 200235）
网　　址：www.ewen.cc
www.sste.com
经　　销：各地新华书店
印　　刷：常熟市文化印刷有限公司印刷
开　　本：787×1092　1/16
字　　数：435 000
印　　张：18
版　　次：2005 年 7 月第 1 版
印　　次：2005 年 7 月第 1 次印刷
印　　数：1—5000
书　　号：ISBN 7-5428-3819-9/O·427
定　　价：24.00 元

★★★★

前言

FORWORD

《新课标四星级题库》自出版以来，因其内容严格遵照国家新课标要求，题型涵盖升学考试的各种形式，深受广大读者的欢迎，一版再版。同时，我们也收到了大量的读者来信，希望能有一本指导他们解答《新课标四星级题库》中的难题、帮助他们尽快提高解题能力的书籍。为此，我们组织编写了这套《新课标四星级题库难题解析》，分数学、物理、化学3册。

《新课标四星级题库难题解析》从《题库》的“阶梯训练”部分中按中考各知识点的比例和难易程度精心选择了具有代表性和创新性的题目数百道。每题或以分析解题思路为主，提示多种解题方法；或用说明形式以点带面总结同类型题目的解题方法，帮助学生提高解题能力，起到举一反三的作用。

《新课标四星级题库难题解析》是《题库》的配套书，其中所选题目的序号与《题库》中相同，不另编序号，便于读者查阅。

目　　录

一、有 理 数

纵 向 应 用

★★★12. 合理计算下列各题：【15】

(1) $\left(1\frac{3}{4}-\frac{7}{8}+\frac{7}{12}\right)\times\left(-1\frac{1}{7}\right)$；

(2) $(-8)\times2^2\times(-125)\times(-5)^2$；

(3) $\left(16\frac{24}{31}-24\frac{16}{21}\right)\div8\div65\times(-7)$；

(4) $(3797+6206)\div[(-19)^2+3\times(-120)]\times(-1)^{2003}$；

(5) $\left(1\frac{1}{4}\right)^8\times\left(-\frac{4}{5}\right)^9\div\left(\frac{-0.04}{0.25\times0.2}\right)$；

(6) $\left|1\frac{2}{3}-2\frac{3}{5}\right|-|0.04+0.32|\times\dfrac{\left|\frac{1}{7}\times0.3\times\frac{1}{2}\right|}{0.5\times\frac{1}{7}\times\frac{3}{10}}$.

略解 (1) 原式$=\left(\frac{7}{4}-\frac{7}{8}+\frac{7}{12}\right)\times\left(-\frac{8}{7}\right)=-2+1-\frac{2}{3}=-1-\frac{2}{3}=-1\frac{2}{3}$；

(2) 原式$=(-8)\times(-125)\times[2\times(-5)]^2=1000\times100=100000$；

(3) 原式$=\left(24+\frac{16}{21}-16-\frac{24}{31}\right)\div8\div65\times7=\left(3+\frac{2}{21}-2-\frac{3}{31}\right)\div65\times7$

$=\frac{650}{21\times31}\div65\times7=\frac{10}{93}$；

(4) 原式$=10003\div[361-360]\times(-1)=-10003$；

(5) 原式$=\left(\frac{5}{4}\times\frac{4}{5}\right)^8\times\left(-\frac{4}{5}\right)\times\left(-\frac{5}{4}\right)=1$；

(6) 原式$=\left|\frac{5}{3}-\frac{13}{5}\right|-0.36\times\dfrac{\frac{1}{7}\times\frac{3}{10}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{7}\times\frac{3}{10}}=\frac{14}{15}-\frac{9}{25}=\frac{70}{75}-\frac{27}{75}=\frac{43}{75}$.

说明 充分利用运算的交换律和结合律进行简便运算.

横 向 拓 展

★★★9. 如果 a、b、c 在数轴上的位置如图 1-1，化简：$|bc|+|a|+|a-b|-|b+c|$.【2】

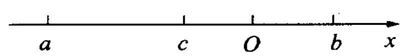

图 1-1

略解 如图 1-1 所示，

$\because$ $a<0,c<0,b>0$， $\therefore$ $bc<0,a-b<0,b+c>0$.

∴ 原式$=-(bc)-a-(a-b)-(b+c)=-bc-2a-c$.

★★★10. 化简：$\left|\frac{1310}{111}-\frac{1310}{99}\right|+\left|\frac{1310}{111}-\frac{1013}{99}\right|$. 【3】

分析 解答此类题的关键是分析绝对值符号内的数是正的还是负的.

略解 ∵ $\frac{1310}{111}<\frac{1310}{99}$， ∴ $\frac{1310}{111}-\frac{1310}{99}<0$.

又 $\frac{1310}{111}>\frac{1221}{111}=11=\frac{1089}{99}>\frac{1013}{99}$， ∴ $\frac{1310}{111}-\frac{1013}{99}>0$.

原式$=-\left(\frac{1310}{111}-\frac{1310}{99}\right)+\left(\frac{1310}{111}-\frac{1013}{99}\right)=\frac{1310}{99}-\frac{1013}{99}=3$.

★★★12. 化简：$\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|ab|}{ab}$($a$、$b$ 均不等于零). 【3】

分析 由$\frac{|a|}{a}=1(a>0)$、$\frac{|a|}{a}=-1(a<0)$讨论 a、b 同号或 a、b 异号时的情况.

略解 当 $a>0,b>0$ 时，原式$=1+1+1=3$；

当 $a<0,b<0$ 时，原式$=-1-1+1=-1$；

当 $a>0,b<0$ 时，原式$=1-1-1=-1$；

当 $a<0,b>0$ 时，原式$=-1+1-1=-1$；

∴ 当 $a>0,b>0$ 时，原式$=3$；当 a、b 异号或 $a<0,b<0$ 时，原式$=-1$.

★★★★13. 研究题：【8】

将一根绳子的两端分别涂上红色和白色，再在中间随意画 3 个圆点，涂上白色或红色. 在这些圆点中间剪开，这样得到的各小段两端都有颜色，试说明两端颜色不同的线段的数目为什么一定是奇数.

略解 如图所示，我们用$+1$ 表示红色，用-1 表示白色. 很明显，不管中间是 3 个或 4 个或 5 个圆点，也不管中间的点涂的是什么颜色，两端颜色所表示的数的乘积永远都是-1. 例如图(a)中，1 和 2 符号一致，3 和 4 符号一致，5 和 6 符号一致，所以这 4 条线段两端的数字的乘积是-1.

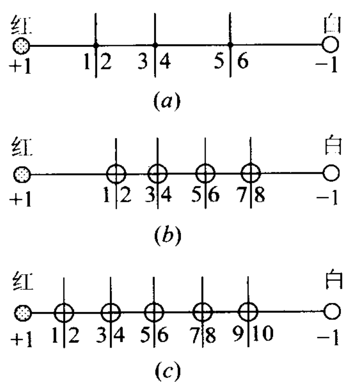

图 1-2

假设有偶数条线段的两端的颜色是不一致的，也就是有偶数个-1 相乘，积必然为$+1$，而其他的两端颜色是一样的，也是同号为$+1$，这和我们前面的结论矛盾. 所以说，两端线段颜色不一样的线段的条数不可能为偶数.

说明 本题的说理方法是反证法：先假设一种结论，推理下去，得到一个矛盾，从而说明假设的结论是错误的.

★★★★14. 阅读理解题：【8】

要求 $2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{99}+2^{100}$ 的值等于多少，直接求非常困难，因为 2^{100} 是一个非常大的数，因此，我们可以用方程的方法来做. 设 $x=2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{99}+2^{100}$，则有 $2x=2(2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{99}+2^{100})$，

即 $$2x=2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{99}+2^{100}+2^{101},$$

$$2x=2^1+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{99}+2^{100}+2^{101}-2^1,$$

$$2x=x-2+2^{101},$$
$$x=2^{101}-2.$$

请你在理解该题的基础上，模仿上述方法求下式的值：

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{99}}+\frac{1}{2^{100}}.$$

略解　设 $A=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{100}}$，

两边同乘以$\frac{1}{2}$，得　$\frac{1}{2}A=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{100}}\right)\times\frac{1}{2}$，

即　$\frac{1}{2}A=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{100}}+\frac{1}{2^{101}}$，

变形，得　$\frac{1}{2}A=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{100}}+\frac{1}{2^{101}}-\frac{1}{2}$，

即　$\frac{1}{2}A=A+\frac{1}{2^{101}}-\frac{1}{2}$，

$\frac{1}{2}A=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{101}}$，

∴　$A=1-\frac{1}{2^{100}}$.

★★★★17. 证明：$0.099<\frac{1}{10^2}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{12^2}+\cdots+\frac{1}{1000^2}<0.111$. 【6】

略证　设 $A=\frac{1}{10^2}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{12^2}+\cdots+\frac{1}{1000^2}$，

则　$A>\frac{1}{10\times11}+\frac{1}{11\times12}+\frac{1}{12\times13}+\cdots+\frac{1}{1000\times1001}$.

而　$\frac{1}{10\times11}+\frac{1}{11\times12}+\frac{1}{12\times13}+\cdots+\frac{1}{1000\times1001}$

$=\frac{1}{10}-\frac{1}{11}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{1000}-\frac{1}{1001}=\frac{1}{10}-\frac{1}{1001}=0.099$，

同理　$A<\frac{1}{9\times10}+\frac{1}{10\times11}+\frac{1}{11\times12}+\cdots+\frac{1}{999\times1000}$，

而　$\frac{1}{9\times10}+\frac{1}{10\times11}+\frac{1}{11\times12}+\cdots+\frac{1}{999\times1000}$

$=\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{10}-\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{999}-\frac{1}{1000}=\frac{1}{9}-\frac{1}{1000}=0.11<0.111$，

∴　$0.099<A<0.111$，

即　$0.099<\frac{1}{10^2}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{12^2}+\cdots+\frac{1}{1000^2}<0.111$.

二、整　　式

整式的加减

横向拓展

★★★★8. 当 $x=3$ 时，计算代数式 $9x^5-24x^4-14x^3+34x^2-50x-10$ 的值.（2002 年全国初中数学竞赛试题）【5】

分析　一种方法是把 $x=3$ 代入原式计算求值，但这种方法计算太繁琐. 还有一种方法是将代数式尽量分解出 $x-3$ 的因式，使计算更为简便.

略解　$\because\ x=3,\quad \therefore\ x-3=0.$

$$\text{原式}=(9x^5-27x^4)+(3x^4-9x^3)-(5x^3-15x^2)+(19x^2-57x)+(7x-21)+11$$
$$=9x^4(x-3)+3x^3(x-3)-5x^2(x-3)+19x(x-3)+7(x-3)+11=11.$$

★★★★9. 设 $4x+y+10z=169$，$3x+y+7z=126$，求 $x+y+z$ 的值.（2002 年全国初中数学竞赛试题）【5】

略解　方法一：

由 $\begin{cases}4x+y=169-10z,\\3x+y=126-7z,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=43-3z,\\y=2z-3.\end{cases}$

$\therefore\ x+y=43-3z+2z-3=40-z.\quad \therefore\ x+y+z=40.$

方法二：

$$x+y+z=9x-8x+3y-2y+21z-20z$$
$$=(-8x-2y-20z)+(9x+3y+21z)=-2(4x+y+10z)+3(3x+y+7z)$$
$$=-2\times169+3\times126=40,$$

$\therefore\ x+y+z$ 的值为 40.

★★★★10. 若 $a^2+3a+1=0$，求代数式 $a^4+3a^3-a^2-5a+\frac{1}{a}-2$ 的值.（2002 年全国初中数学竞赛试题）【5】

分析　由题意可知，要求代数式 $a^4+3a^3-a^2-5a+\frac{1}{a}-2$ 的值，应尽可能含有 a^2+3a+1，即使代数式尽可能的化成与 a^2+3a+1 有关的因式.

略解　$a^4+3a^3-a^2-5a+\frac{1}{a}-2=a^2(a^2+3a+1)-2(a^2+3a+1)+\left(a+\frac{1}{a}\right)$

$$=a+\frac{1}{a}=\frac{a^2+1}{a}.$$

$\because\ a^2+3a+1=0$，$\therefore\ \dfrac{a^2+1}{a}=-3$，

$\therefore$ 代数式 $a^4+3a^3-a^2-5a+\dfrac{1}{a}-2$ 的值为 -3.

★★★★11. 设 $(x^2-2x+3)^n=a_{2n}x^{2n}+a_{2n-1}x^{2n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，试求 $a_{2n}+a_{2n-2}+\cdots+a_2+a_0$ 的值.（2002 年全国初中数学竞赛试题）【5】

略解 令 $x=1$，则 $(1-2+3)^n=a_{2n}+a_{2n-1}+\cdots+a_1+a_0$，

即 $$2^n=a_{2n}+a_{2n-1}+\cdots+a_1+a_0. \quad ①$$

令 $x=-1$，则 $(1+2+3)^n=a_{2n}-a_{2n-1}+\cdots-a_1+a_0$，

即 $$6^n=a_{2n}-a_{2n-1}+\cdots-a_1+a_0. \quad ②$$

由①+②，得 $$2^n+6^n=2(a_{2n}+a_{2n-2}+\cdots+a_2+a_0).$$

$\therefore\ a_{2n}+a_{2n-2}+\cdots+a_2+a_0=\dfrac{1}{2}(2^n+6^n)$.

整式的乘除

横 向 拓 展

★★★1. 化简：$(-x^3-x-1)\cdot(-x)^n-(-x)^{n+1}\cdot(x^2+1)$（$n$ 是正整数）.【2】

分析 一般地，当指数含有字母时，需根据幂的性质讨论指数的奇偶性.

略解 当 n 为奇数时，原式 $=(-x^3-x-1)(-x^n)-x^{n+1}\cdot(x^2+1)$

$=x^{n+3}+x^{n+1}+x^n-x^{n+3}-x^{n+1}=x^n$；

当 n 为偶数时，原式 $=(-x^3-x-1)\cdot x^n+x^{n+1}\cdot(x^2+1)$

$=-x^{n+3}-x^{n+1}-x^n+x^{n+3}+x^{n+1}=-x^n$.

$\therefore$ 原式 $=\begin{cases}x^n, & n\text{ 为奇数},\\ -x^n, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$

★★★2. 已知 $x+y+z=p$，$xy+yz+xz=q$，$xyz=r$，用含 p、q、r 的式子表示 $(x+2)(y+2)(z+2)$.【2】

分析 根据多项式的乘法法则，找到 $(x+2)(y+2)(z+2)$ 与 p、q、r 的关系.

略解 $(x+2)(y+2)(z+2)=[xy+2(x+y)+4](z+2)$

$=xyz+2xy+2(xz+yz)+4(x+y)+4z+8$

$=xyz+2(xy+xz+yz)+4(x+y+z)+8=r+2q+4p+8$.

★★★3. 已知 $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$，试求 a、b、c 之间的关系.【2】

分析 由已知 $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$ 知，在等式两边同乘以 2 可得完全平方公式.

略解 由 $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$，得 $2a^2+2b^2+2c^2=2ab+2bc+2ac$，

则 $a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+a^2-2ac+c^2=0$，

即 $(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2=0$.

由非负数的性质可得 $(a-b)^2=0$，$(b-c)^2=0$，$(a-c)^2=0$.

∴　$a-b=0, b-c=0, a-c=0$，即　$a=b, b=c, a=c$.

∴　$a=b=c$.

★★★4. 计算：$(2^2+4^2+6^2+\cdots+100^2)-(1^2+3^2+5^2+\cdots+99^2)$.【2】

分析　由平方和相减联想到平方差公式.

略解　$(2^2+4^2+6^2+\cdots+100^2)-(1^2+3^2+5^2+\cdots+99^2)$

$=(2^2-1^2)+(4^2-3^2)+(6^2-5^2)+\cdots+(100^2-99^2)$

$=(2-1)(2+1)+(4-3)(4+3)+\cdots+(100-99)(100+99)$

$=2+1+3+4+5+6+\cdots+100+99$

$=1+2+3+4+5+\cdots+99+100=5050$.

★★★5. 计算：$11\times101\times10001\times100000001$.【2】

分析　在 $11\times101\times10001\times100000001$ 中，11、101、10001、100000001 都是 10^n+1（n 为正整数）的形式.

略解　原式 $=11\times101\times10001\times100000001=(10^1+1)(10^2+1)(10^4+1)(10^8+1)$

$$=\frac{1}{9}(10-1)(10^1+1)(10^2+1)(10^4+1)(10^8+1)$$

$$=\frac{1}{9}(10^{16}-1)=\underbrace{1111\cdots1}_{16\text{个}1}.$$

★★★6. 已知 $x^2=x+1$，比较 x^5 与 $5x+4$ 的大小.【2】

分析　x^5 与 $5x+4$ 的次数不同，难以直接比较，而已知条件给出的是 $x^2=x+1$，意味着 x^2 可以用 $x+1$ 来表达，这是一个降次的表达式，所以我们可考虑将 x^5 通过降次来找到与 $5x+4$ 的关系.

略解　由 $x^3=x^2\cdot x$ 及 $x^2=x+1$ 可得 $x^3=x(x+1)=x^2+x=x+1+x=2x+1$.

∴　$x^5=x^3\cdot x^2=(2x+1)(x+1)=2x^2+3x+1=2(x+1)+3x+1=5x+3$.

∵　$5x+3<5x+4$，　∴　$x^5<5x+4$.

★★★7. 已知 $(m+n)^2=10, (m-n)^2=2$，求 m^4+n^4 的值.【2】

分析　由 $m^4+n^4=(m^2+n^2)^2-2m^2n^2$ 可得 m^4+n^4 与 m^2+n^2 及 mn 有关.

略解　由已知可得　$(m+n)^2=m^2+2mn+n^2=10$，　①

$(m-n)^2=m^2-2mn+n^2=2$，　②

由①＋②，得　$m^2+n^2=6$.

由①－②，得　$mn=2$.

∴　$m^4+n^4=(m^2+n^2)^2-2m^2n^2=36-8=28$.

★★★★14. 已知 $2^x=5^y=10^z$（x、y、z 不等于零），求证：$xy=yz+xz$.【3】

略解　∵　$2^x=10^z$，　∴　$(2^x)^y=(10^z)^y$.　①

又　∵　$5^y=10^z$，　∴　$(5^y)^x=(10^z)^x$.　②

由①、②可得　$2^{xy}\cdot5^{xy}=10^{yz}\cdot10^{xz}$，

∴　$(10)^{xy}=10^{yz+xz}$.　∴　$xy=yz+xz$.

★★★★15. 若 $x+y+z=a, xy+yz+xz=b$，求 $x^2+y^2+z^2$ 的值.【3】

略解　由　$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+xz)$

可得　$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+xz)$.

∵ $x+y+z=a, xy+yz+xz=b$， ∴ $x^2+y^2+z^2=a^2-2b$.

★★★★17. 已知 a、b、c 为三角形的三边，求证：$a^2-b^2-c^2-2bc<0$.【3】

略解 ∵ $a^2-b^2-c^2-2bc=a^2-(b+c)^2=(a+b+c)(a-b-c)$，

又根据三角形三边关系，得 $a+b+c>0, a-b-c<0$，

∴ $a^2-b^2-c^2-2bc=(a+b+c)(a-b-c)<0$.

★★★★18. 已知 $3(a^2+b^2+c^2)=(a+b+c)^2$，求证：$a=b=c$.【5】

略解 ∵ $3a^2+3b^2+3c^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$，

∴ $2a^2+2b^2+2c^2=2(ab+bc+ac)$. ∴ $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$.

∴ $(a-b)^2=0, (b-c)^2=0, (c-a)^2=0$. ∴ $a=b=c$.

★★★★19. 已知 a、b、c、d 均为实数，且 $ad-bc=1, a^2+b^2+c^2+d^2-ab+cd=1$，求 $abcd$ 的值.（2002 年全国初中数学竞赛试题）【5】

略解 ∵ $ad-bc=1$， ∴ $2ad-2bc=2$. ①

又 ∵ $a^2+b^2+c^2+d^2-ab+cd=1$，

∴ $2a^2+2b^2+2c^2+2d^2-2ab+2cd=2$. ②

由②－①，得 $2a^2+2b^2+2c^2+2d^2-2ab+2cd-2ad+2bc=0$，

即 $(a-b)^2+(b+c)^2+(c+d)^2+(d-a)^2=0$.

∴ $a-b=b+c=c+d=d-a=0$. ∴ $a=b=-c=d$.

代入 $ad-bc=1$ 可得 $a^2+a^2=1$，即 $a^2=\frac{1}{2}$. ∴ $abcd=-a^4=-\frac{1}{4}$.

★★★★20. 设 a、b、c、d 都是正整数，且 $a^5=b^4, c^3=d^2, c-a=19$，求 $d-b$ 的值.（2002 年全国初中数学竞赛试题）【5】

略解 ∵ a、b、c、d 都是正整数，可令 $\frac{b}{a}=m$（m 是正整数）， ∴ $a=m^4, b=m^5$.

同理令 $c=n^2, d=n^3$（n 为正整数）.

∵ $c-a=19$， ∴ $n^2-m^4=19$， 即 $(n+m^2)(n-m^2)=19$.

∵ 19 是质数且 $n+m^2>n-m^2$， 故 $\begin{cases}n+m^2=19,\\n-m^2=1.\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}m=3,\\n=10.\end{cases}$

∴ $d-b=n^3-m^5=757$.

因 式 分 解

横 向 拓 展

★★★1. 在实数范围内，用两种不同的分组方法分解：$x^5+x^4-x^3-x^2+x+1$.【3】

略解 方法一：

原式 $=(x^5-x^3+x)+(x^4-x^2+1)=x(x^4-x^2+1)+(x^4-x^2+1)$

$=(x+1)(x^4-x^2+1)=(x+1)(x^2+\sqrt{3}x+1)(x^2-\sqrt{3}x+1)$.

方法二：

原式 $=x^4(x+1)-x^2(x+1)+x+1=(x+1)(x^4-x^2+1)$

$=(x+1)(x^2+\sqrt{3}x+1)(x^2-\sqrt{3}x+1)$.

★★★2. 分解因式：x^3-3x+2.【3】

略解 方法一：

原式 $=x^3-x^2+x^2-3x+2=x^2(x-1)+(x-1)(x-2)$

$=(x-1)(x^2+x-2)=(x-1)(x+2)(x-1)$

$=(x-1)^2(x+2)$.

方法二：用余数定理法.

令 $f(x)=x^3-3x+2$，

$\because$ $f(1)=1-3+2=0$， $\therefore$ $f(x)$ 有因式 $x-1$，用长除法：

$$\begin{array}{r} x^2+x-2 \\ x-1\,\overline{)\,x^3+0-3x+2} \\ \underline{x^3-x^2\qquad\quad} \\ x^2-3x \\ \underline{x^2-x\quad} \\ -2x+2 \\ \underline{-2x+2} \\ 0 \end{array}$$

$\therefore$ $f(x)=(x-1)(x^2+x-2)=(x-1)^2(x+2)$.

★★★3. 分解因式：$x^4+2x^3+2x^2+2x+1$.【2】

略解 原式 $=x^4+x^3+x^3+x^2+x^2+2x+1=x^3(x+1)+x^2(x+1)+(x+1)^2$

$=(x+1)(x^3+x^2+x+1)=(x+1)[x^2(x+1)+(x+1)]$

$=(x+1)(x+1)(x^2+1)=(x+1)^2(x^2+1)$.

★★★4. 已知 $5x^2-4xy+y^2-2x+1=0$，求 $(x-y)^{2001}$ 的值.【2】

分析 题设是含有 x、y 的一个二元二次不定方程，只有在特殊情况下，才可求出 x、y 的值. 故考虑由 $A^2+B^2=0$ 的形式，来推出 $A=0, B=0$.

略解 由 $5x^2-4xy+y^2-2x+1=0$，得 $4x^2+x^2-4xy+y^2+1-2x=0$，

$$(2x-y)^2+(x-1)^2=0.$$

$\therefore$ $x=1, y=2$. $\therefore$ $(x-y)^{2001}=(1-2)^{2001}=-1$.

★★★5. 分解因式：x^5+x+1.【2】

略解 原式 $=x^5-x^4+x^4-x^3+x^3-x^2+x^2+x+1$

$=(x^5-x^4+x^2)+(x^4-x^3+x)+(x^3-x^2+1)$

$=x^2(x^3-x^2+1)+x(x^3-x^2+1)+(x^3-x^2+1)$

$=(x^3-x^2+1)(x^2+x+1)$.

★★★6. 分解因式：$a^3+b^3+c^3-3abc$.【2】

略解 原式 $=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+c^3-3a^2b-3ab^2-3abc$

$=[(a+b)^3+c^3]-(3a^2b+3ab^2+3abc)$

$=(a+b+c)[(a+b)^2-(a+b)c+c^2]-3ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$.

★★★7. 在实数范围内分解因式：$(x+1)(x+2)(x+3)(x+6)-3x^2$.【2】

略解 原式$=(x+1)(x+6)(x+2)(x+3)-3x^2$

$=(x^2+7x+6)(x^2+5x+6)-3x^2$

$=(x^2+6)^2+12x(x^2+6)+35x^2-3x^2$

$=(x^2+6)^2+12x(x^2+6)+32x^2$

$=(x^2+6+4x)(x^2+6+8x)$

$=(x^2+4x+6)(x+4-\sqrt{10})(x+4+\sqrt{10})$.

★★★8. 设 $x+2z=3y$，试判断 $x^2-9y^2+4z^2+4xz$ 的值是不是定值. 如果是定值，求出它的值；否则，请说明理由.【2】

略解 $\because$ $x+2z=3y$， $\therefore$ $(x+2z)^2=(3y)^2$，

即 $x^2+4xz+4z^2=9y^2$. $\therefore$ $x^2-9y^2+4z^2+4xz=0$.

$\therefore$ $x^2-9y^2+4z^2+4xz$ 是一个定值且定值为 0.

★★★★12. 把下列各式分解因式：【15】

(1) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$；

(2) $(x^2+3x+4)(x^2+3x-2)+8$；

(3) $(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12$；

(4) $x^3-7x^2+14x-8$；

(5) x^3+2x^2-5x-6；

(6) x^4+2x^3+x+2；

(7) $x^4+2x^3-3x^2-4x-12$；

(8) $(6x+7)^2(3x+4)(x+1)-6$；

(9) x^3+3x^2-4.

略解 (1) 原式$=(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)+1$

$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+1$

$=(x^2+5x)^2+10(x^2+5x)+25=(x^2+5x+5)^2$

$=\left(x+\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2\left(x+\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$；

(2) 原式$=(x^2+3x)^2+2(x^2+3x)=(x^2+3x)(x^2+3x+2)$

$=x(x+3)(x+1)(x+2)=x(x+1)(x+2)(x+3)$；

(3) 原式$=(x^2+x)^2+3(x^2+x)-10=(x^2+x+5)(x^2+x-2)$

$=(x-1)(x+2)(x^2+x+5)$；

(4) 原式$=x^3-8-7x^2+14x=(x-2)(x^2+2x+4)-7x(x-2)$

$=(x-2)(x^2+2x+4-7x)=(x-1)(x-2)(x-4)$；

(5) 原式$=x^3+2x^2-5x-8+2=(x^3-8)+(2x^2-5x+2)$

$=(x-2)(x^2+2x+4)+(2x-1)(x-2)$

$=(x-2)(x^2+4x+3)=(x+1)(x-2)(x+3)$；

(6) 原式$=x^4+x^3+x^3+x^2-x^2+x+2$

$=x^3(x+1)+x^2(x+1)-(x-2)(x+1)$

$=(x+1)(x^3+x^2-x+2)$

$=(x+1)(x^3+8+x^2-x-6)$

$=(x+1)[(x+2)(x^2-2x+4)+(x+2)(x-3)]$

$=(x+1)(x+2)(x^2-x+1)$；

(7) 原式$=(x^4+3x^3)-x^3-3x^2-4x-12=x^3(x+3)-x^2(x+3)-4(x+3)$

$=(x+3)(x^3-x^2-4)=(x+3)(x^3-8-x^2+4)$

$=(x+3)[(x-2)(x^2+2x+4)-(x-2)(x+2)]$

$=(x+3)(x-2)(x^2+2x+4-x-2)$

$=(x+3)(x-2)(x^2+x+2)$；

(8) 原式$=(36x^2+84x+49)(3x^2+7x+4)-6$.

设 $y=3x^2+7x$，

则　原式$=(12y+49)(y+4)-6=(3y+10)(4y+19)$.

∴　原式$=(9x^2+21x+10)(12x^2+28x+19)$

$=(3x+5)(3x+2)(12x^2+28x+19)$；

(9) 原式$=x^3-1+3x^2-3=(x-1)(x^2+x+1)+3(x-1)(x+1)$

$=(x-1)(x^2+x+1+3x+3)=(x-1)(x+2)^2$.

★★★★13. 已知 a、b、c 满足 $a+b+c=1$，$a^2+b^2+c^2=2$，$a^3+b^3+c^3=3$，求 $a^4+b^4+c^4$ 的值.(2000 年全国初中数学竞赛试题)【5】

略解　∵　$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$，　∴　$ab+bc+ac=-\frac{1}{2}$.

又　∵　$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$，　∴　$abc=\frac{1}{6}$.

$$a^4+b^4+c^4=(a^2+b^2+c^2)^2-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2$$

$$=(a^2+b^2+c^2)^2-2[(ab+bc+ac)^2-2abc(a+b+c)]$$

$$=2^2-2\left(\frac{1}{4}-2\times\frac{1}{6}\right)=\frac{25}{6}.$$

★★★★14. 若在实数范围内，多项式 $kx^2-2xy+3y^2+3x-5y+2$ 能分解为两个一次因式的乘积，求 $k^2+5k+\frac{1}{4}$的值.(2000 年全国初中数学竞赛试题)【5】

略解　设多项式 $kx^2-2xy+3y^2+3x-5y+2$ 能分解成两个一次因式 $ax+by+1$ 与 $cx+dy+2$，则

$$kx^2-2xy+3y^2+3x-5y+2$$

$$=(ax+by+1)(cx+dy+2)$$

$$=acx^2+(ad+bc)xy+(c+2a)x+(d+2b)y+2+bdy^2.$$

$$\therefore \begin{cases} ac=k, & ① \\ ad+bc=-2, & ② \\ c+2a=3, & ③ \\ bd=3, & ④ \\ d+2b=-5. & ⑤ \end{cases}$$

由④、⑤得 $b=-1$，$d=-3$. 代入②，得

$$\begin{cases} -3a-c=-2, \\ c+2a=3, \end{cases} \quad 得 \quad \begin{cases} a=-1, \\ c=5. \end{cases}$$

∴　$k=ac=-5$.

∴　$k^2+5k+\frac{1}{4}=25-25+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$.