帮你步入大学丛书

中学数学知识应用精编

上海市中学生数学知识应用竞赛委员会编写组

华东理工大学出版社

责任编辑　袁明辉
封面设计　唐啸谷
责任校对　黄乃娟

ISBN7－5628－0647－O/G・113

定价：　11.5元

帮你步入大学丛书

中学数学知识应用精编

上海市中学生数学知识应用
竞赛委员会编写组

华东理工大学出版社

(沪)新登字 208 号

中学数学知识应用精编
上海市中学生数学知识应用
竞赛委员会编写组华东理工大学出版社出版发行
上海市梅陇路 130 号
邮政编码 200237
新华书店上海发行所发行经销
上海展望印刷厂印刷
开本 850×1168 1/32 印张 9 字数 240 千字
1995 年 12 月第 1 版 1995 年 12 月第 1 次印刷
印数 1—10000 册

ISBN 7—5628—0647—0/G·113 定价 11.50 元

编写说明

本书是在中学生应用数学讲习班和上海中学生数学知识应用竞赛辅导讲座讲稿的基础上集体编写而成的。参加编写的有谭永基(复旦)、向隆万、沈灏(交大)、余致甫、朱德通(上师大)、丁颂康(海运学院)、金世和(金桥发展有限公司)、王镇(市少科站)、蒋鲁敏、赵小平(华师大)等老师。

本书的第一、七两讲由余致甫执笔;第二讲由王镇执笔;第三、五两讲由谭永基执笔;第四讲由谭永基、朱德通执笔;第六讲由向隆万执笔;第八讲由金世和执笔;第九讲由丁颂康执笔;第十讲由沈灏执笔。附录是上海市中学应用数学竞赛委员会提供的。

初稿写成后,谭永基、丁颂康、王镇、余致甫等同志多次作了讨论与修改,后由余致甫统稿,并对全书的文字作了润色。

本书奉献给中学生及广大青年数学爱好者。可作为他们的课外读物并兼作中学数学知识应用竞赛的辅导教材,以期开阔思路,激发他们用数学去解决实际问题的热情和创造力。限于编者的水平和经验不足,本书的缺陷在所难免,衷心欢迎读者批评指正。

上海市工业与应用数学学会理事长,复旦大学研究生院院长李大潜院士为本书撰写了前言,使本书增色不少。俞文鮆、蒋伟成、蒋鲁敏、赵小平、唐素莲、胡力旗、袁明辉等同志和上海金桥出口加工区联合发展有限公司对本书的编写与出版给予了关心和支持,借此一并表示谢意。

编者

前　言

随着科技的发展和社会的进步，数学这门历史悠久的学科得到了越来越广泛的应用。无论在科学、工程、经济乃至于日常生活的各个领域，人们到处都会发现数学不可低估的重要作用。

举例来说，我们乘坐的先进、舒适的大型喷气客机的设计就离不开数学：机翼和机身通过分析计算才能确定它们的最佳形状；飞机的结构通过数学严格的校核才能确保有足够的强度；飞机发动机事先要用数学方法对其气动和机械性能进行分析和优化才能确保安全高效地运行、……。整个飞机的设计过程是由一种将数学与计算机相结合被称为计算机辅助设计（CAD）的先进技术完成的。

现代的喷气客机采用了许多高新技术，其中之一是自动着落装置。有了它，飞行员在飞机降落过程中甚至无须接触操纵杆，整个降落过程就会自动、安全地完成。所谓自动着落装置，实际上是一台配备了特殊软件的微型计算机，它接收飞机及周围环境和地面机场的各种信息，通过计算机软件的自动执行，分析计算，输出各种信息，控制飞机安全着落。显而易见，计算机软件是自动着落装置的核心。这个软件是根据人们建立的控制飞机着落的数学模型和相应的数学方法研制而成的。

数学除了在以飞机工业为代表的制造业中有着重要的作用外，在国民经济的规划和预测、气象预报和自然灾害预报、宇航工程、交通和物资调配、自然资源的勘探开发等方面以及在自然科学、医学和社会科学的许多领域中都愈来愈显示出举足轻重的作用。这一切促使人们对数学的重要作用有了新的和更加深刻的认识，从而得出我们已进入了“数学工程技术的时代”和“高技术本质上是一种数学技术”的共识。

当前，计算机技术正在飞速地发展着，计算机、特别是微型计算机已经十分普及。计算机的普及为数学的广泛应用提供了有力的工具。另一方面，要充分发挥计算机的作用，计算机的使用者必

须具备应用数学知识解决现实问题的能力。在未来的信息社会中，用计算机作为工具，应用数学知识解决实际问题的技能更应当成为劳动者的一项基本素质。

青年同学在完成中学阶段的学业后，无论是进入高一级的学校进行深造，或者踏上社会以自己的劳动为祖国的繁荣进步添砖加瓦，都必须适应这一"数学工程技术"的时代和信息社会的要求，具备应用数学知识解决现实问题的能力。

用数学方法解决现实问题的能力，包括将现实问题归结为一个数学问题(又称为建立数学模型或数学建模)，然后选择合适的数学方法加以求解；对求得的结果用适当的方法进行验证，最后将结果应用于现实问题；对某些现象加以解释，或作出预测，或用于设计，或控制某个过程等等。这些能力不可能是天生就有的，也不是单纯学习数学的书本知识就能具备的，必须通过反复地训练和实践，树立起用数学方法解决现实问题的强烈愿望和坚定信心，才能促成这方面能力的提高和发展。

本书就是培养学生以应用数学知识解决现实问题能力的一个有益的尝试。它根据中学生的实际知识水平，在几个比较重要的领域里，列举了许多用数学方法解决实际问题的例子，由浅入深地训练学生解决实际问题的能力。本书作为高中学生的课外读物或课外活动的教材，或可弥补当前中学数学教学在这方面训练之不足，对中学数学教育改革起一定的推进作用。

本书又和上海市工业与应用数学学会、上海市少年科技指导站及上海市金桥出口加工区联合发展有限公司联合举办的上海市金桥杯中学生数学知识应用竞赛有着十分密切的关系。这一竞赛已经成功地举行了两届，产生了很好的影响，第三届的初赛已经结束，决赛也即将进行。

本书的许多材料都曾在竞赛辅导中应用过，并且还收入了历次竞赛的试题和参考解答，可作为今后竞赛的主要辅导教材。

值得强调的是上海市金桥出口加工区联合发展有限公司的领导对上述竞赛和本书的出版都给予了大力的支持。他们关心教育

改革及青少年培养的远见卓识是十分值得钦佩的。

本书是集体劳动的成果，编写者都是上海各高等院校中在应用数学方面颇有造诣的教授、副教授或对中学数学教育很有研究的同志。他们付出的辛勤劳动一定会产生出有益的成果。

希望本书的出版能进一步激发广大青年同学学习数学的积极性以及利用所学的数学知识为社会主义祖国服务的热情，推动他们的健康成长。

李大潜

目　录

第一讲　从最值问题谈起

随着国民经济和科学技术的发展，应用数学越来越深入到各个领域，并显示出它的地位与作用。在实际问题中常常会碰到各种寻求最合理方案、最优的效益、最经济的投入和最佳的选择等问题，这些问题往往可归结为确定某一函数的最大值、最小值或极大值、极小值。本讲内容既可直接应用中学所学的极值知识点来解决，也可将中学知识内容适当延伸、拓广后，再来解决。

由于寻求函数的最值问题、极值问题，涉及的知识面很广，所以对培养学生的能力、掌握知识技能、开拓视野有很大的作用。现介绍几种求最值方法与典型问题。

一、二次函数配方法

设二次函数　$y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$。经配方，得

$$y=ax^2+bx+c=a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a}\text{。}$$

当 $x=-\dfrac{b}{2a}$时，$y_{极值}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$。

1. 当 $a>0$ 时，y 有极小值；

2. 当 $a<0$ 时，y 有极大值。

如果函数自变量取一切实数，即 $x\in R$ 时，那么 $y_{极值}$就是 $y_{最值}$；

如果函数自变量取某一区间值，即 $x\in[m,n]$时，那么分两种情况讨论：

(1) $\dfrac{-b}{2a}\in[m,n]$，$-\dfrac{b}{2a}$的函数值是一个最值，另一最值可从端点函数值 $f(m)$或 $f(n)$中求得；

(2) $\frac{-b}{2a}\notin[m,n]$，两个最值就是两个端点值 $f(m)$ 和 $f(n)$。

因此，在讨论二次函数最值时，要注意：

(1) 二次项系数 a 的变化；

(2) x 的范围；

(3) 极值与最值之间联系。

否则就会失误。

例如：方程 $x^2-(k-2)x+k^2+3k+5=0$ 的两根分别为 α、β，求 $\alpha^2+\beta^2$ 的最大值。

由韦达定理得 $\begin{cases}\alpha+\beta=k-2,\\ \alpha\beta=k^2+3k+5。\end{cases}$

$$f(k)=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(k-2)^2-2(k^2+3k+5)$$
$$=-(k+5)^2+19。$$

当 $k=-5$ 时，$(\alpha^2+\beta^2)_{\max}=19$，看起来无懈可击，实际上由于

$$\triangle=(k-2)^2-4(k^2+3k+5)\geqslant 0,$$

$$\text{所以}\quad -4\leqslant k\leqslant -\frac{4}{3}。$$

即　$k=-5\notin[-4,-\frac{4}{3}]$，因此函数 $f(k)$ 最值应为端点的函数值。

$f(-4)=-(-4+5)^2+19=18$，

$f(-\frac{4}{3})=-(-\frac{4}{3}+5)^2+19=\frac{50}{9}$，

所以　$(\alpha^2+\beta^2)_{\max}=f(-4)=18$。

由此可见，求二次函数的最值时，不仅要注意自变量的取值范围，而且还要对极值点是否是最值点、还是端点是最值点，作出判断。

[**例 1**]　窗框问题。

有 l 米长的钢材，要做成如图 1－1 所示的窗架，上半部为半圆，下半部为六个全等小矩形组成的矩形。试问小矩形的长、宽比为多少时，窗所通过的光线最多，并具体算出窗框面积的最大值。

［解］ 设小矩形长为 x，宽为 y，则由图形条件可得：

$11x+\pi x+9y=l$ 。

所以 $9y=l-(11+\pi)x$ 。

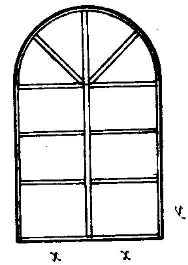

图 1－1

要窗所通过的光线最多，即要窗框面积最大，则

$$S=\frac{\pi x^2}{2}+6xy$$
$$=\frac{\pi x^2}{2}+\frac{2}{3}[lx-(11+\pi)x^2]$$
$$=-\frac{44+\pi}{6}\left(x-\frac{2l}{44+\pi}\right)^2+\frac{2l^2}{3(44+\pi)} 。$$

所以当 $x=\frac{-2l}{44+\pi}, y=\frac{l-(11+\pi)x}{9}=\frac{(22-\pi)l}{9(44+\pi)}$，

即 $\frac{x}{y}=\frac{18}{22-\pi}$时，面积 S 有最大值。

即 $S_{\max}=\frac{2l^2}{3(44+\pi)}$ 。 （注：$18:(22-\pi)\approx1:1$。）

将这题改变一下：如果窗框面积一定，要求周长最小值，即使窗框材料最省，那么同样列出相依的函数关系有

$$S=\frac{\pi}{2}x^2+6xy,$$

$$6y=\frac{S}{x}-\frac{\pi}{2}x,$$

而 $l=(11+\pi)x+9y$，

所以 $l=\frac{44+\pi}{4}x+\frac{3S}{2x}$。

这个函数不是二次函数，但可用基本不等式法或△法来求最值，这个问题以后再来解决。

［例 2］ 流量问题。

沟渠的截面（如图 1－2 所示）的等腰梯形，且两腰与下底长之和为 6 米，上底长（沟阔）为一腰与下底长之和，试问等腰梯形的腰与上下底长各为多少时，水流量为最大、并求出截面面积 S 的最大值。

[解]　设等腰梯形腰长为 x，上底为 z，下底为 y，高为 h，则

$$\begin{cases}2x+y=6\ ,\\ x+y=z\ 。\end{cases}$$

$$h^2=x^2-(\frac{z-y}{2})^2=x^2-(\frac{x}{2})^2=\frac{3x^2}{4}\ 。$$

所以　$h=\frac{\sqrt{3}}{2}x$ 。

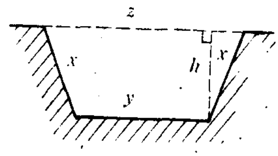

图 1—2

$$S=\frac{y+z}{2}h=\frac{6-2x+6-x}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$=-\frac{3\sqrt{3}}{4}x^2+3\sqrt{3}x$$

$$=-\frac{3\sqrt{3}}{4}(x-2)^2+3\sqrt{3}\ 。$$

当 $x=2,y=2,z=4$ 时，截面 S 有最大值 $3\sqrt{3}$（米²）。

如果应用对称理论，等腰梯形以上底为对称轴得出凸六边形 $ABCDEF$（如图 1—3），那么，它的周长是 $2(2x+y)=12$，根据等周等积理论 $ABCDEF$ 必为正六边形，即 $x=y=2$，$S_{截}=\frac{1}{2}S_{正六边形}=3\sqrt{3}$（米²），

即　　$S_{max}=3\sqrt{3}$（米²）。

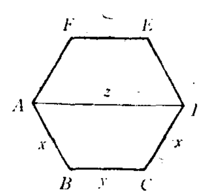

图 1—3

这样就可以不用代数方法，直接用几何图形的特殊性质求解，比较简捷。

将题目改变一下：如果截面积一定，且 $x+y=z$，要求两腰与下底和 l 最小值。那么同样可列出 $l=2x+y$ 的函数式：

$$S=\frac{y+z}{2}h=\frac{y+z}{2}\sqrt{x^2+(\frac{z-y}{2})^2}$$

$$=\frac{x+2y}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

所以　$\frac{4S}{\sqrt{3}x}-x=2y$.　即　$y=\frac{2S}{\sqrt{3}x}-\frac{x}{2}$。

$$l=2x+y=2x+\frac{2S}{\sqrt{3}x}-\frac{x}{2}=\frac{3x}{2}+\frac{2S}{\sqrt{3}x}。$$

这个函数求最小值显然也可用基本不等式或△法求得，以后将专门介绍这一类函数求最值方法。

二、三角函数法

设函数　$y=a\sin x+b$　$(a\neq 0)$

(1) $a>0$，当 $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in z)$时，$y_{极大}=a+b$；

当 $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in z)$时，$y_{极小}=-a+b$；

(2) $a<0$，当 $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in z)$时，$y_{极大}=-a+b$；

当 $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in z)$时，$y_{极小}=a+b$ 。

对于 $y=a\cos x+b$ 也可类同讨论它的结论。

[**例 3**]　内接正方形问题。

有批四角都有些缺损的正方形铁片(如下图示)。现要在正方形四边上各取一点作出内接正方形，求出它的最小值，且算出至少能利用的材料利用率。

[**解**]　设内接正方形边与原正方形边夹角为 α，内接正方形边长为 x，原正方形边长为 a，则

$$x\cos\alpha+x\sin\alpha=a\ ,$$

$$x=\frac{a}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{a}{\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})}。$$

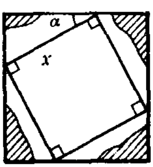

图 1—4

所以　$S_{内接正方形}=x^2=\dfrac{a^2}{2\sin^2(\alpha+\frac{\pi}{4})}$ 。

当 $\alpha=\frac{\pi}{4}$时，$S_{内接正方形}$有最小值$\frac{a^2}{2}$ 。

如果原正方形四边中点连结的正方形材料不缺损的话，那么

这批材料利用率至少达到 $\frac{a^2}{2}\div a^2=50\%$。

本题也可直接求解：

$S_{\text{内接正方形}}=x^2=\left(\frac{a}{\sin\alpha+\cos\alpha}\right)^2=\frac{a^2}{1+\sin2\alpha}$。

同样可得出当 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 时，$(S_{\text{内接正方形}})_{\min}=\frac{a^2}{2}$。

［**例 4**］ 条件极值问题。

某一质点在椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ 轨道上运动，试确定目标函数：质点的横坐标与它的纵坐标两倍之差的最大值与最小值。

［**解**］ 引入椭圆的参数方程，问题转化为求三角函数的极值。设椭圆参数方程为

$\begin{cases}x=3\cos t\\ y=4\sin t\end{cases}$ 其中 t 为参数

目标函数 $S=x-2y$

$=3\cos t-8\sin t$

$=\sqrt{73}\cos(t+\varphi)$，

这里 $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{8}{3}$

。

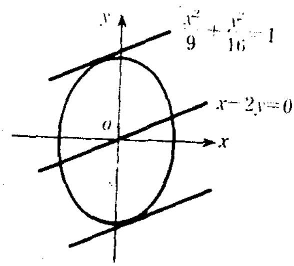

图 1—5

(1) 当 $t+\varphi=2k\pi$，$t=2k\pi-\varphi$ 时，

$x=3\cos t=3\cos(2k\pi-\varphi)=3\cos\varphi=\frac{9}{\sqrt{73}}$，

$y=4\sin t=4\sin(2k\pi-\varphi)=-4\sin\varphi=\frac{-32}{\sqrt{73}}$。

$S_{\max}=\sqrt{73}$， 即 $(x-2y)_{\max}=\sqrt{73}$。

(2) 当 $t+\varphi=(2k+1)\pi$， $t=(2k+1)\pi-\varphi$ 时，

$x=3\cos t=3\cos[(2k+1)\pi-\varphi]=-3\cos\varphi=\frac{-9}{\sqrt{73}}$，

$y=4\sin t=4\sin[(2k+1)\pi-\varphi]=4\sin\varphi=\frac{32}{\sqrt{73}}$，

$S_{\min}=-\sqrt{73}$， 即 $(x-2y)_{\min}=-\sqrt{73}$。

由于目标函数 $S=x-2y$，从图形 1-5 中可分析出：当点在第四象限可能达到最大值，而点在第二象限可能达到最小值。因此，作出椭圆平行 $x-2y=0$ 的切线，两切点就是我们所求的极值点，这种解法称为图形分析法。

三、基本不等式法

（1）若 x、y 为实数，则 $x^2+y^2\geqslant 2xy$ （当且仅当 $x=y$ 时，等号成立）。

（2）若 x、y 为正数，则 $\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}$ （当且仅当 $x=y$ 时，等号成立）。

推广：1）若 x、y、z 为正数，则 $\frac{x+y+z}{3}\geqslant\sqrt[3]{xyz}$

（当且仅当 $x=y=z$ 时等号成立）

2）若 x_1，x_2，…，x_n 为正数，则 $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$。（当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时，等号成立）。

（3）若 x、y 为非零同号的实数，则 $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\geqslant 2$ （当且仅当 $x=y$ 时，等号成立）

在［例 1］中提到过求 $l=\frac{44+\pi}{4}x+\frac{3S}{2x}$ 的最小值，运用基本不等式法就可求得：

$$\frac{44+\pi}{4}x+\frac{3S}{2x}\geqslant 2\sqrt{\frac{44+\pi}{4}\cdot\frac{3S}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{6S(44+\pi)}。$$

等号成立条件：$\frac{44+\pi}{4}x=\frac{3S}{2x}$，则 $x=\sqrt{\frac{6S}{44+\pi}}$，$y=\frac{(22-\pi)\sqrt{6S}}{18\sqrt{44+\pi}}$。

当 $\frac{x}{y}=\frac{18}{22-\pi}$ 时，$l_{\min}=\frac{1}{2}\sqrt{6S(44+\pi)}$。

［例 5］ 圆锥改成圆柱问题。

已知高为 h，底面半径为 a 的圆锥模型，圆锥顶有些损坏(如图 1—6 所示)。现要将它改成圆柱体的模型，要求

(1) 圆柱的侧面积最大时，圆柱底面半径与高；

(2) 圆柱体积最大时，圆柱底面半径与高。

[解] 设圆柱的半径为 r，高为 x。

(1) $\dfrac{r}{a}=\dfrac{h-x}{h}$,

$$x=\frac{ah-rh}{a}=\frac{(a-r)h}{a},$$

所以 $$S_{侧}=2\pi rx=2\pi r\,\frac{(a-r)h}{a}$$

$$=-\frac{2\pi h}{a}(r^2-ar)$$

$$=-\frac{2\pi h}{a}\left(r-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{\pi ha}{2}。$$

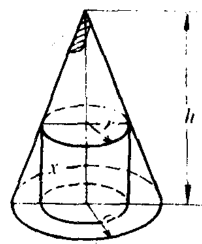

图 1—6

当 $r=\dfrac{a}{2}$，$x=\dfrac{h}{2}$ 时，作出的内接圆柱侧面积为最大，即

$$(S_{侧})_{\max}=\frac{\pi ha}{2}。$$

(2) $$V=\pi r^2x=\pi r^2\,\frac{(a-r)h}{a}$$

$$=\frac{\pi h}{2a}r^2\cdot(2a-2r)$$

$$\leqslant\frac{\pi h}{2a}\left(\frac{r+r+2a-2r}{3}\right)^3=\frac{4}{27}\pi ha^2。$$

当 $r=r=2a-2r$，即 $r=\dfrac{2a}{3}$，$x=\dfrac{\left(a-\dfrac{2a}{3}\right)}{a}h=\dfrac{1}{3}h$ 时，作出内接圆柱体积最大，$V_{\max}=\dfrac{4}{27}\pi h^2a$。

如上述，运用基本不等式(2)来求极值，必须注意：

1) x、y、z 为正实数；

2)和一定时，积有最大值；积一定时，和有最小值；

3)当且仅当各元素相等时等号成立。

如果忽视上述条件，那么就会出差错。