中考专题冲刺

ZHONG KAO ZHUAN TI CHONG CI

主编　孙家文

数　学

中国青年出版社

中考专题冲刺

数　　学

主　编：孙家文

编　者：陈丽华　胡晓华　张文玉　李雪莹
刘春颖　田玉芳　刘爱钰　王　慧
刘凤英　柴广辉　毕　伟　洪文林

中国青年出版社

（京）新登字 083 号

图书在版编目（CIP）数据

中考专题冲刺·数学 / 杨晓东主编.—北京：中国青年出版社，2005
ISBN 7-5006-6651-9

Ⅰ. 中…　Ⅱ. 杨…　Ⅲ. 数学课—初中—习题—升学参考资料

Ⅳ. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 128299 号

*

中国青年出版社 出版 发行

社址：北京东四 12 条 21 号　　邮政编码：100708

网址：www. cyp. com. cn

编辑部电话：（010）64034349　发行部电话：（010）64010813

首钢总公司印刷厂印刷　新华书店经销

*

787×1092　1/16　6.875 印张　260 千字

2006 年 1 月北京第 1 版　　2006 年 1 月北京第 1 次印刷

印数：1—8，000 册　　定价：9.50 元

编者的话

中考前的初中数学总复习，不但要夯实初中学段的数学基础，更要总结解题规律，拓宽解题思路，深悟数学思想方法，因此必须进行专题复习。

当前数学专题存在的不足：一是不全不透，不善于深入浅出；二是不精不专，不精于提炼思想方法。本书根据初中数学教学大纲，践行新课程的理念，以中考重要题型为专题，以数学思想、解题方法为主线，目的是提高学生综合运用所学的数学知识分析解决问题的能力，发展学生的创新思想。

本书根据中考热点列出十个专题。每个专题均由“典型例题示范”、“基础提高训练”两部分组成。典型例题示范，从学生的实际出发，精选全国各地中考试题，做到选题具有针对性，例题具有典型性，解题具有示范性，每题的解前分析或解后说明具有启发性。基础提高训练，选题时力图做到由浅入深，层次清楚，类型齐全，形式多样，使同学们做到解有所思，练有所得，并有关键的提示或详尽的解答。

疏漏之处，敬请指正。

目　　录

一、方程型的综合题

方程(包括方程组、不等式)是初中代数的一条主线。方程型的综合题主要是以一元二次方程根的判别式及根与系数的关系为背景,把代数式的恒等变形、解方程(方程组)、几何图形的性质、三角函数等知识有机融合在一起,具有较强的综合性,是考查学生综合运用所学相关知识、能力的重要题型,各地中考常把这类题作为具有较强区分度的试题来考查。掌握好这部分知识,能提高学生的综合能力和应用能力,使学生面对纷繁多变的试题,胸有成竹。

典型例题示范

例 1 若关于 x 的一元二次方程 $2x^2 - 2x + 3m - 1 = 0$ 有两个实数根 x_1、x_2,且 $x_1 \cdot x_2 > x_1 + x_2 - 4$,则实数 m 的取值范围是( )。 (2005 年天津市中考题)

(A) $m > -\frac{5}{3}$　(B) $m \leqslant \frac{1}{2}$　(C) $m < -\frac{5}{3}$　(D) $-\frac{5}{3} < m \leqslant \frac{1}{2}$

解:$\because x_1$、x_2 是方程 $2x^2-2x + 3m - 1 = 0$ 两根

$\therefore x_1 + x_2 = 1, x_1 \cdot x_2 = \frac{3m-1}{2}$

又 $\because x_1 \cdot x_2 > x_1 + x_2 - 4$

$\therefore \frac{3m-1}{2} > -3$,即:$m > -\frac{5}{3}$……①

又 $\because$ 方程有两根,$\therefore \triangle \geqslant 0$

由 $\triangle = 4 - 8(3m - 1) \geqslant 0$ 得:$m \leqslant \frac{1}{2}$……②

所以由 ①、② 可得 m 的取值范围是:$-\frac{5}{3} < m \leqslant \frac{1}{2}$。故选 D。

说明:在利用根与系数的关系求字母系数的值或取值范围时,一定要考虑方程有实数根的前提条件:$\triangle \geqslant 0$,学生易忽视这个问题,应引起高度重视。

例 2 已知关于 x 的方程:$x^2 - 2(k + 1)x + k^2 + 2k - 1 = 0$……①,

(1) 求证:对于任意实数 k,方程 ① 总有两个不相等的实数根。

(2) 若 a 是关于 y 的方程:$y^2 - (x_1 + x_2 - 2k)y + (x_1 - k)(x_2 - k) = 0$……② 的一个根,其中 x_1、x_2 为方程 ① 的两个实数根,求代数式 $(\frac{1}{a} - \frac{a}{a+1}) \div \frac{4}{a+1} \cdot \frac{a^2-1}{a}$ 的值。

(2001 年北京海淀区中考题)

解:(1) $\because \triangle = 4(k + 1)^2 - 4(k^2 + 2k - 1) = 4(k^2 + 2k + 1 - k^2 - 2k + 1) = 870$

$\therefore$ 方程 ① 总有两个不相等的实数根

(2) $\because x_1$、x_2 是方程 ① 的两个实数根

$\therefore x_1 + x_2 = 2(k + 1), x_1 \cdot x_2 = k^2 + 2k - 1$

于是方程 ② 为:$y^2 - 2y - 1 = 0$

又 $\because a$ 是方程 ② 的一个根,$\therefore a^2 - 2a - 1 = 0$

故$(\frac{1}{a}-\frac{a}{a+1})\div\frac{4}{a+1}\cdot\frac{a^2-1}{a}=\frac{a+1-a^2}{a(a+1)}\cdot\frac{a+1}{4}\cdot\frac{a^2-1}{a}$

$=\frac{(-a^2+a+1)(a^2-1)}{4a^2}=\frac{-(a^2-a-1)(a^2-1)}{4a^2}=\frac{-a\cdot 2a}{4a^2}=-\frac{1}{2}$

说明:利用根的定义和根与系数的关系相结合,能够提高自己思维的灵活性,加快解题速度,提高准确率。

例3关于x、y的方程组$\begin{cases}x^2+y^2=4\cdots\cdots①\\y-x=n\cdots\cdots②\end{cases}$有一组实数解,反比例函数$y=\frac{1+n}{x}$的图象上有一点$(p,q)$,且$p$、$q$互为相反数,试求以$p^2$、$q^2$为两根的一元二次方程。

解:由②得:$y=x+n\cdots\cdots③$

把③代入①得:$x^2+(x+n)^2=4$

即:$2x^2+2nx+n^2-4=0\cdots\cdots④$

$\because$ 方程组有一组实数解

$\therefore$ 方程④有两个相等的实数根

于是$\triangle=4n^2-4\times2\times(n^2-4)=0$,即$n^2=8$,解得:$n=\pm2\sqrt{2}$

又$\because$ 点$(p、q)$在函数$y=\frac{1+n}{x}$的图象上

$\therefore p\cdot q=1+n=1\pm2\sqrt{2}$

又$\because p$、q互为相反数,即$p\cdot q<0,p\cdot q=1-2\sqrt{2}$

$\therefore p+q=0$,

$\because p^2+q^2=(p+q)^2-2pq=4\sqrt{2}-2$

$p^2\cdot q^2=(pq)^2=9-4\sqrt{2}$

$\therefore$ 以p^2、q^2为根的一元二次方程为:

$y^2-(4\sqrt{2}-2)y+9-4\sqrt{2}=0$

说明:①解方程组的实质是在解关于x(或y)的方程,若化简出是关于x(或y)的一元二次方程,则方程组解的问题就转化为对一元二次方程根的讨论。

②构造以p^2、q^2为根的一元二次方程实质是求出p^2+q^2与$p^2\cdot q^2$即可。

例4已知:关于x的方程$(a+2)x^2-2ax+a=0$有两个不相等实数根x_1和x_2,并且抛物线$y=x^2-(2a+1)x+2a-5$与x轴的两个交点分别位于点$(2,0)$的两旁。

(1)求实数a的取值范围。

(2)当$|x_1|+|x_2|=2\sqrt{2}$时,求a的值　　(2005年北京市中考题)

解:(1)解法一

$\because$ 关于x的方程$(a+2)x^2-2ax+a=0$有两个不相等的实数根

$\therefore\begin{cases}a+2\neq0\\\Delta_1=(-2a)^2-4a(a+2)>0\end{cases}$

解得:$a<0$,且$a\neq-2\cdots\cdots①$

设抛物线$y=x^2-(2a+1)x+2a-5$与x轴的两个交点的坐标分别为$(\alpha,0)$,$(\beta,0)$,且$\alpha<\beta$

$\therefore \alpha$、β 是关于 x 的方程 $x^2-(2a+1)x+2a-5=0$ 的两个不相等的实数根

$\because \Delta_2=[-(2a+1)]^2-4\times1\times(2a-5)$

$=(2a-1)^2+20>0$

$\therefore a$ 为任意实数……②

又 $\because \alpha+\beta=2a+1, \alpha\beta=2a-5$，且抛物线 $y=x^2-(2a+1)x+2a-5$ 与 x 轴的两个交点分别位于点(2,0)两旁

$\therefore \alpha<2, \beta>2$

于是 $(\alpha-2)(\beta-2)<0$，即 $\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4<0$

故 $2a-5-2(2a+1)+4<0$

解得：$a>-\dfrac{3}{2}$……③

由①、②、③得：$-\dfrac{3}{2}<a<0$

解法二：同解法一，得 $a<0$，且 $a\neq-2$……①

$\because$ 抛物线 $y=x^2-(2a+1)x+2a-5$ 与 x 轴的两个交点分别位于(2,0)两旁，且抛物线开响上

$\therefore$ 当 $x=2$ 时，$y<0$

故 $4-2(2a+1)+2a-5<0$

解得：$a>-\dfrac{3}{2}$……②

由①、②得：$-\dfrac{3}{2}<a<0$

(2) $\because x_1$、x_2 是关于 x 的方程 $(a+2)x^2-2ax+a=0$ 的两根

$\therefore x_1+x_2=\dfrac{2a}{a+2}, x_1\cdot x_2=\dfrac{a}{a+2}$

又 $\because -\dfrac{3}{2}<a<0$

$\therefore a+2>0$

$\therefore x_1\cdot x_2<0$

不妨设 $x_1>0, x_2<0$

$\therefore |x_1|+|x_2|=x_1-x_2=2\sqrt{2}$

于是 $x_1^2-2x_1x_2+x_2^2=8$

即 $(x_1+x_2)2-4x_1x_2=8$

故 $(\dfrac{2a}{a+2})^2-\dfrac{4a}{a+2}=8$

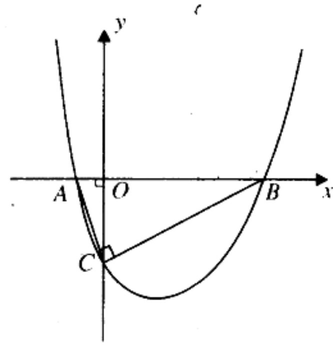
即：$a^2+5a+4=0$

解得：$a_1=-4, a_2=-1$

$\because -\dfrac{3}{2}<a<0, \therefore a=-1$

说明：解法一基本是在“数、式”范围内分析求解，解法二则是在“数、形”上观察分析求解，

充分说明了在很多问题中，"数"与"形"本来是相通的。因此，从"数"与"形"两个方面思考问题，会使我们更好地把握数学问题的本质，提高数学分析能力。



例5 如图，已知抛物线 $y = x^2 + px + q$ 与 x 轴交于 A、B 两点，交 y 轴负半轴于 c 点，且 $\angle ACB = 90°$，$\frac{1}{OA} - \frac{1}{OB} = \frac{2}{OC}$。求：$\triangle ABC$ 外接圆的面积。（1997年天津市中考题）

解：设 $A(x_1,0)$，$B(x_2,0)$，则 x_1、x_2 是方程 $x^2 + px + q = 0$ 的两根。

由图可知：$x_1 < 0, x_2 < 0, OA = -x, OB = x_2$

$\therefore x_1 + x_2 = -p, x_1 \cdot x_2 = q < 0$

又 $\because \angle ACB = 90°, OC \perp AB$

$\therefore OC^2 = OA \cdot OB$

$\because C(O,q), \therefore OC = |q| = -q$

于是 $q^2 = -x_1 \cdot x_2 = -q$

即：$q = -1$ 或 $q = 0$（舍）

又 $\because \frac{1}{OA} - \frac{1}{OB} = \frac{2}{OC}$

$\therefore \frac{OB - OA}{OA \cdot OB} = \frac{2}{OC}$

即 $\frac{x_1 + x_2}{-x_1x_2} = 2$

于是 $\frac{-p}{-q} = 2$，解得：$\therefore p = -2$

令二次方程 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 的两根为 x_1、x_2

$\because AB = |x_2 - x_1| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}$

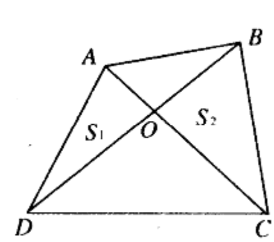
$= \sqrt{p^2 + 4} = 2\sqrt{2}$，$\triangle ABC$ 外接圆半径为 $\sqrt{2}$

$\therefore \triangle ABC$ 外接圆面积为 $\sqrt{2}$

说明： 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有着密切的关系，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴两个交点的横坐标，就是方程 $ax^2 + bx + c = 0(a \neq 0)$ 的两个实数根，此时抛物线与 x 轴交点问题就转化为对一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根的讨论问题，根的判别式根与系数关系都是研究问题的重要工具。

例6 已知四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 相交于点0，若 $S_{\triangle AOB} = 4$，$S_{\triangle COD} = 9$，求四边形 $ABCD$ 面积 S 的最小值。

（2002年天津市中考题）



解：令：$S_{\triangle AOD} = S_1, S_{\triangle BOC} = S_2$

$\because \frac{S_1}{S_{\triangle AOB}} = \frac{OD}{OB}, \frac{S_{\triangle COD}}{S_2} = \frac{OD}{OB}$

（同高不同底的两三角形面积之比等于底之比）

$\therefore \frac{S_1}{4} = \frac{9}{S_2}$

即 $S_1 \cdot S_2 = 36$

设 $S_1 + S_2 = k$

$\therefore S_1$、S_2 可以看作是方程 $x^2 - kx + 36 = 0$ 的两个实数根

于是 $\triangle \geqslant 0$，即：$k^2 - 4 \times 36 \geqslant 0$，整理得：$k^2 \geqslant 12^2$

又 $\because k > 0$

$\therefore k \geqslant 12$

故 k 的最小值为 12，S 的最小值为 25

说明：在任意四边形中观察分析 $S_1 \cdot S_2$ 及 $S_1 + S_2$ 与已知条件的关系，从而想到构造二次方程，运用 $\triangle \geqslant 0$ 来求函数最值问题。

巩固提高训练

1. 若方程 $m^2x^2 + 2(m-1)x + 1 = 0$ 的两根互为倒数，则 $m =$ ________。

2. 若方程 $m^2x^2 - (2m-3)x + 1 = 0$ 的两个实数根的倒数和为 S，则 S 的取值范围是________。（1998 年天津市中考题）

3. 已知关于 x 的一元二次方程 $k^2x^2 + (1-2k)x + 1 = 0$ 有两个不相等的实数根 x_1、x_2，求：(1) k 的取值范围。(2) 当 $|x_1 + x_2| - 2x_1x_2 = -3$ 时，求 k 的值。

4. 已知：x_1、x_2 是一元二次方程 $4kx^2 - 4kx + k + 1 = 0$ 的两个实数根，则：(1) 是否存在实数 k 使 $(2x_1 - x_2)(x_1 - 2x_2) = -\frac{3}{2}$ 成立？若存在，求出 k 的值；若不存在，请说明理由。(2) 求使 $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} - 2$ 的值为整数的实数 k 的整数值。

5. 已知关于 x、y 的方程组 $\begin{cases} x^2 - y + k = 0 \cdots\cdots ① \\ (x-y)^2 - 2x + 2y + 1 = 0 \cdots\cdots ② \end{cases}$ 有两组不同的实数解，则：(1) 求实数 k 的取值范围。(2) 若 $\begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x = x_2 \\ y = y_2 \end{cases}$ 是方程组的两组不同实数解，是否存在 k，使得 $y_1y_2 - \frac{x_1}{x_2} - \frac{x_2}{x_1}$ 的值等于 2，若存在，求出 k 的值；若不存在，请说明理由。

6. 已知：$\triangle ABC$ 的两边 AB、AC 的长是关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (2k+3)x + k^2 + 3k + 2 = 0$ 的两个实数根，第三边 BC 长为 5，则：(1) k 为何值时，$\triangle ABC$ 是以 BC 为斜边的 $Rt\triangle$。(2) k 为值值时，$\triangle ABC$ 为等腰 $\triangle$，并求 $\triangle ABC$ 的周长。

7. 已知关于 x 的方程 $x^2 - 2mx + \frac{1}{4}n^2 = 0$，其中 m、n 分别是一个等腰三角形的腰与底边长，若方程两根差的绝对值为 8，并且等腰三角形面积为 12，求这个三角形内切圆的面积。

8. 已知二次函数 $y = ax^2 - ax + m$ 的图象交 x 轴于 $A(x_1, 0)$ 和 $B(x_2, 0)$ 两点，且 $x_1 < x_2$，交 y 轴负半轴于点 C，且 $AB = 3$，$\tan\angle BAC - \tan\angle ABC = 1$，求此二次函数解析式。（2005 年武汉市中考题）

9.已知抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2-(m+3)x+m^2-12$ 与 x 轴交于 $A(x_1,0)$、$B(x_2,0)$ 两点，$x_1<0,x_2>0$，抛物线与 y 轴交于点 C，$OB=2OA$，则：(1) 求抛物线解析式。(2) 在 x 轴上点 A 的左侧求一点 E，使 $\triangle ECO$ 和 $\triangle CAO$ 相似，并说明直线 CE 经过(1)中抛物线的顶点。

10.已知关于 x 的方程 $x^2-(p+q+1)x+p=0(q\geqslant 0)$ 的两个实数根为 α、β，且 $\alpha\leqslant\beta$。(1) 试用 α,β 的代数式表示 p 和 q。(2) 求证：$\alpha\leqslant 1\leqslant\beta$。(3) 若以 α、β 为坐标的点 $M(\alpha,\beta)$ 在 $\triangle ABC$ 的三条边上运动，且 $\triangle ABC$ 顶点的坐标分别为 $A(1,2)$、$B(\frac{1}{2},1)$、$C(1,1)$，问是否存在点 M，使 $p+q=\frac{5}{4}$，若存在，求出点 M 的坐标；若不存在，请说明理由。(2003年天津市中考题)

11.已知矩形对角线长为10，它的两邻边长分别为 a、b，且满足 $a^2-ma+3m+6=0$，$b^2-mb+3m+6=0$，求该矩形的周长和面积。

12.已知实数 a、b、c 满足 $a+b+2c=1\cdots\cdots(1)$，$a^2+b^2+6c+\frac{3}{2}=0\cdots\cdots(2)$。求：$a\cdot b\cdot c$ 的值。

参考答案

1.设 x_1、x_2 是关于 x 的方程 $m^2x^2+2(m-1)x+1=0$ 两根

由题意得：$\begin{cases}x_1\cdot x_2=\frac{1}{m^2}=1\\ m^2\neq 0\\ \triangle=4(m-1)^2-4m^2\geqslant 0\end{cases}$　　解得：$m=-1$

2.设 x_1、x_2 是方程 $m^2x^2-(2m-3)x+1=0$ 两根

$\therefore x_1+x_2=\frac{2m-3}{m^2},x_1\cdot x_2=\frac{1}{m^2}$

$\because$ 方程有两根

$\therefore\begin{cases}m^2\neq 0\\ \triangle=(2m-3)^2-4m^2\geqslant 0\end{cases}$　　解得：$m\leqslant\frac{3}{4}$，且 $m\neq 0$。

又 $\because S=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}=2m-3$

$\therefore S\leqslant-\frac{3}{2}$，且 $S\neq-3$

3.(1) $\because$ 方程有两个不等实根

$\therefore\begin{cases}k^2\neq 0\\ \triangle=(1-2k)^2-4k^2>0\end{cases}$　　解得：$k<\frac{1}{4}$，且 $k\neq 0$

(2) $\because x_1$、x_2 是方程 $k^2x^2+(1-2k)x+1=0$ 两根

$\therefore x_1+x_2=\frac{2k-1}{k^2},x_1x_2=\frac{1}{k^2}$

$\because k<\frac{1}{4}$，且 $k\neq 0$

$\therefore 2k-1<0, x_1+x_2<0$

于是 $|x_1+x_2|-2x_1x_2=\dfrac{1-2k}{k^2}-\dfrac{2}{k^2}=-3$

即 $3k^2-2k-1=0$

$(3k+1)(k-1)=0$

解得：$k_1=-\dfrac{1}{3}, k_2=1$

$\because k<\dfrac{1}{4}$，且 $k\neq 0$

$\therefore k=-\dfrac{1}{3}$

4.(1) 假使存在满足条件的 k 使 $(2x_1-x_2)(x_1-2x_2)=-\dfrac{3}{2}$

$\because x_1$、x_2 是方程 $4kx^2-4kx+k+1=0$ 两根

$\therefore x_1+x_2, x_1\cdot x_2=\dfrac{k+1}{4k}$

又 $\because (2x_1-x_2)(x_1-2x_2)=2x_1^2+2x_2^2-5x_1x_2$

$=2(x_1+x_2)^2-4x_1x_2-5x_1x_2$

$=2-\dfrac{9k+9}{4k}=-\dfrac{3}{2}$

$\therefore k=\dfrac{9}{5}$

$\because$ 方程有两个实根

$\therefore \begin{cases} k\neq 0 \\ \Delta=16k^2(k+1)\geqslant 0 \end{cases}$ 解得：$k<0$

故不存在满足条件的 k 使 $(2x_1-x_2)(x_1-2x_2)=-\dfrac{3}{2}$

(2) $\because \dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}-2=\dfrac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}-2=\dfrac{(x_1x+_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}-2$

$=\dfrac{4k-(k+1)}{k+1}=-\dfrac{4}{k+1}$

$\because -\dfrac{4}{k+1}$ 为整数，且 k 为整数

$\therefore k+1=\pm 1$，或 $k+1=\pm 2$，或 $k+1=\pm 4$

又 $\because k<0$

$\therefore k=-2$，或 $k=-3$，或 $k=-5$

5.(1) 由 ② 得：$(x-y)^2-2(x-y)+1=0$，即：$(x-y-1)^2=0$

解得：$y=x-1$……③

把 ③ 代入 ① 得：$x^2-x+1+k=0$……④

$\because$ 方程组有两组不同实数解

$\therefore$ 方程 ④ 有两个不等实数根

故 $\Delta=1-4(1+k)>0$

即 $k < -\frac{3}{4}$

(2) 假设存在满足条件的 k 使 $y_1y_2 - \frac{x_1}{x_2} - \frac{x_2}{x_1} = 2$ 成立

$\because x_1、x_2$ 是方程④的两根

$\therefore x_1 + x_2 = 1, x_1 \cdot x_2 = 1 + k$

又 $\because y = x - 1$

$\therefore y_1 = x_1 - 1, y_2 = x_2 - 1$

$\therefore y_1y_2 - \frac{x_1}{x_2} - \frac{x_2}{x_1}$

$= (x_1 - 1)(x_2 - 1) - \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2}$

$= x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1 - \frac{(x_1 + x_2)^2}{x_1x_2} + 2$

$= 1 + k - 1 + 1 - \frac{1}{1 + k} + 2$

$= 3 + k - \frac{1}{1 + k} = 2$

即 $k^2 + 2k = 0$

解得: $k = 0$ 或 $k = -2$

又 $\because k < -\frac{3}{4}$

$\therefore k = -2$

故存在 $k = -2$ 时,使 $y_1y_2 - \frac{x_1}{x_2} - \frac{x_2}{x_1} = 2$

6. (1) $\because AB、AC$ 是方程 $x^2 - (2k + 3)x + k^2 + 3k + 2 = 0$ 两根

$\therefore AB + AC = 2k + 3, AB \cdot AC = k^2 + 3k + 2$

又 $\because \triangle ABC$ 是以 BC 为斜边的直角三角形

$\therefore AB^2 + AC^2 = BC^2$

$\therefore (AB + AC)^2 - 2AB \cdot AC = 25$

$\therefore (2k + 3)^2 - 2(k^2 + 3k + 2) = 25$

即 $k^2 + 3k - 10 = 0$

$(k + 5)(k - 2) = 0$

$k_1 = -5, k_2 = 2$

又 $\because AB > 0, AC > 0$

$\therefore AB + AC = 2k + 3 > 0$

即 $k = 2$

又 $\because \triangle = (2k + 3)^2 - 4(k^2 + 3k + 2) = 1 > 0$

$\therefore$ 当 $k = 2$ 时, $\triangle ABC$ 是以 BC 为斜边的 $Rt\triangle$

(2) $\because \triangle = 1 > 0$

$\therefore$ 方程 $x^2-(2k+3)x+k^2+3k+2=0$ 有两个不等实根

即 $AB\neq AC$

又 $\because\triangle ABC$ 为等腰三角形

$\therefore BC=5$ 是等腰三角形的一腰

即 AC 或 BC 中有一边必为 5，方程有一根为 5

于是 $25-5(2k+3)+k^2+3k+2=0$

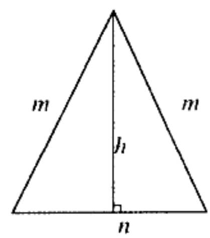
$k^2-7k+12=0$

解得：$k_1=3,k_2=4$

于是 $AC+AB=9$ 或 11

故 $\triangle ABC$ 周长为 14 或 16

7. 设：x_1、x_2 是方程 $x^2-2mx+\frac{1}{4}n^2=0$ 两根



$\therefore x_1+x_2=2m, x_1\cdot x_2=\frac{1}{4}n^2$

于是 $|x_1-x_2|=\sqrt{4m^2-n^2}=8$

$\because$ 在等腰 $\triangle$ 中，$h=\sqrt{m^2-(\frac{1}{2})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4m^2-n^2}=4$

又 $\because S_\triangle=\frac{1}{2}hn=12$

$\therefore n=6$

$\sqrt{4m^2-36}=8$ $\therefore m=\pm5$（舍去负值） $\therefore m=5$

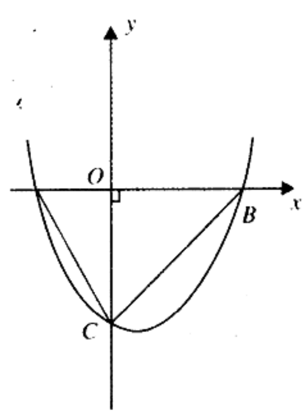
设内切圆半径为 r

$\therefore S=\frac{1}{2}(2m+n)r=12$

$\therefore r=\frac{3}{2}$

$\therefore S$ 内切圆 $=\frac{9}{4}$

8. $\because$ 抛物线 $y=ax^2-ax+m$ 与 x 轴交于 $A(x_1,0)$、$B(x_2,0)$



$\therefore x_1$、x_2 是方程 $ax^2-ax+m=0$ 的两根

于是 $x_1+x_2=1$……①，$x_1,x_2=\frac{m}{a}$……②

又 $\because AB=|x_1-x_2|=3$

$x_1<x_2$

$\therefore x_2-x_1=3$……③

由①、③得：$x_1=-1,x_2=2$

$\therefore$ 交点坐标为：$A(-1,0)$、$B(2,0)$

$\because tan\angle BAC\frac{OC}{OA}, tan\angle ABC=\frac{OC}{OB}$

$\therefore \dfrac{OC}{OA}-\dfrac{OC}{OB}=1$

$\therefore OC=2$

又 $\because C$ 在 y 轴负半轴上

$\therefore C$ 点坐标为 $(0,-2)$

于是抛物线解析式为 $y=a(x+1)(x-2)$，过 $C(0,-2)$

$\therefore a=1$

故此二次函数解析式为 $y=x^2-x-2$

9.(1) $\because$ 抛物线 $y=-\dfrac{1}{2}x^2-(m+3)x+m^2-12$ 与 x 轴交于 $A(x_1,0)$、$B(x_2,0)$

$\therefore x_1$、x_2 是方程 $-\dfrac{1}{2}x^2-(m+3)x+m^2-12=0$ 的两根

于是 $x_1+x_2=-2(m+3)\cdots\cdots①$，$x_1,x_2=-2(m^2-12)\cdots\cdots②$

$\because x_1<0, x_2>0$

$\therefore OA=-x_1, OB=x_2$

又 $\because OB=2OA$

即 $x_2=-2x_1\cdots\cdots③$

把③代入①②得：

$$\begin{cases}-x_1=-2(m+3)\\ -2x_1^2=-2(m^2-12)\end{cases}$$

整理得：$m^2+8m+16=0$

解得：$m=-4$

故抛物线解析式为：$y=-\dfrac{1}{2}x^2+x+4$

(2) 令：$-\dfrac{1}{2}x^2+x+4=0$

于是 $x^2-2x-8=0$

$x_1=4 \qquad x_2=-2$

$\therefore A(-2,0), B(4,0), C(0,4)$

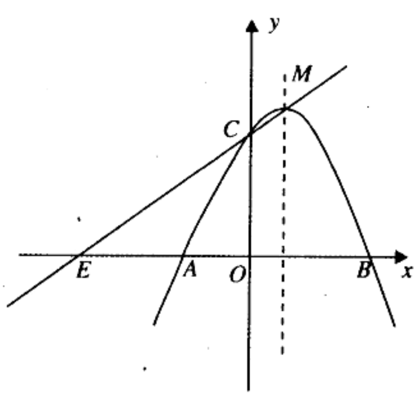
设：$E(a,0) \quad (a<-2)$

$\because \triangle AOC \backsim \triangle COE$

$\therefore \dfrac{OC}{OE}=\dfrac{OA}{OC}$

$OE=\dfrac{OC^2}{OA}=\dfrac{16}{2}=8$

$\therefore E(-8,0)$



过点 C,E 直线为：$y=\dfrac{1}{2}x+4$

又 $\because$ 顶点 $M(1,4\dfrac{1}{2})$

$\therefore$ 当 $x=1$ 时，$y=4\frac{1}{2}$

故直线 CE 过抛物线顶点 M

10.(1) 由于 α、β 为方程 $x^2-(p+q+1)x+p=0(q\geqslant 0)$ 的两根

$\alpha+\beta=p+q+1, \alpha\beta=p$

于是 $p=\alpha\beta, q=\alpha+\beta-p-1=\alpha+\beta-\alpha\beta-1$

(2) $\because (1-\alpha)(1-\beta)=1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta=-q$

$\because q\geqslant 0$

$\therefore (1-\alpha)(1-\beta)\leqslant 0$

又 $\because \alpha\leqslant\beta$

$\therefore \alpha\leqslant 1\leqslant\beta$

(3) 解法一：若使 $p+q=\frac{5}{4}$ 成立，则 $\alpha+\beta=p+q+1=\frac{9}{4}$

① 当点 $M(\alpha,\beta)$ 在 BC 边上运动时

由 $B(\frac{1}{2},1)$、$C(1,1)$ 得：$\frac{1}{2}\leqslant\alpha\leqslant 1, \beta=1$

而 $\alpha=\frac{9}{4}-\beta=\frac{5}{4}>1$

故在 BC 边上不存在满足条件的点 M

② 当点 $M(\alpha,\beta)$ 在 AC 边上运动时，

由 $A(1,2)$、$C(1,1)$ 得：$1\leqslant\beta\leqslant 2, \alpha=1$

于是 $\beta=\frac{9}{4}-\alpha=\frac{5}{4}$

故在 AC 边上存在满足条件的点 M，坐标为 $(1,\frac{5}{4})$

③ 当点 $M(\alpha,\beta)$ 在 AB 边上运动时，

由 $A(1,2)$、$B(\frac{1}{2},1)$ 得：$\frac{1}{2}\leqslant\alpha\leqslant 1, 1\leqslant\beta\leqslant 2$

过 M 作 $MN\parallel BC$ 交 AC 于 N

$\therefore N(1,\beta), \frac{MN}{BC}=\frac{AN}{AC}$

由平面几何知识：$\dfrac{1-\alpha}{1-\frac{1}{2}}=\dfrac{2-\beta}{2-1}$

$\therefore \beta=2\alpha$

由 $\begin{cases}\beta=2\alpha\\ \alpha+\beta=\frac{9}{4}\end{cases}$ 解得：$\begin{cases}\alpha=\frac{3}{4}\\ \beta=\frac{3}{2}\end{cases}$

又 $\because \frac{1}{2}<\frac{3}{4}<1, 1<\frac{3}{2}<2$

$\therefore$ 在 AB 边上存在满足条件的点 M，坐标为 $(\frac{3}{4},\frac{3}{2})$

综上所述，当 M 在 $\triangle ABC$ 三边上运动时，存在点$(1,\frac{5}{4})$和点$(\frac{3}{4},\frac{3}{2})$，使 $p+q=\frac{5}{4}$ 成立

解法二：在平面直角坐标系中画出 $\triangle ABC$

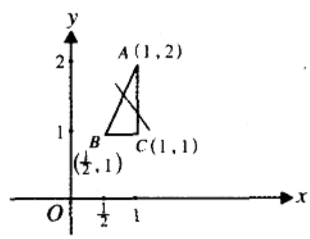
由 $p+q=\frac{5}{4}$ 得：$\alpha+\beta=p+q+1=\frac{9}{4}$

$\therefore \beta=-\alpha+\frac{9}{4}$

画出直线 $\beta=-\alpha+\frac{9}{4}$ 可知：它与线段 AB、AC 有交点，而与线段 BC 无交点

$\because$ 线段 AB 为：$\beta=2\alpha \quad (\frac{1}{2}\leqslant\alpha\leqslant1)$

线段 AB 为：$\alpha=1 \quad (1\leqslant\beta\leqslant2)$



由$\begin{cases}\beta=-\alpha+\frac{9}{4}\\ \beta=2\alpha(\frac{1}{2}\leqslant\alpha\leqslant1)\end{cases}$ 得：$\alpha=\frac{3}{4},\beta=\frac{3}{2}$

由$\begin{cases}\beta=-\alpha+\frac{9}{4}\\ \alpha=1(1\leqslant\beta\leqslant2)\end{cases}$ 得：$\alpha=1,\beta=\frac{5}{4}$

综上所述，所 M 在 $\triangle ABC$ 三边上运动时，存在点$(\frac{3}{4},\frac{3}{2})$和点$(1,\frac{5}{4})$使 $p+q=\frac{5}{4}$ 成立

11. ① 若 $a=b$，则矩形为正方形

$\therefore 2a^2=100$ 　　即 $a=5\sqrt{2}$

$\therefore C_{矩}=4a=20\sqrt{2},S_{矩}=a^2=50$

② 若 $a\neq b$，由已知得：

a、b 是方程 $x^2-mx+3m+6=0$ 两根

又 $\because a^2+b^2=100$

即 $(a+b)^2-2ab=100$

$\therefore m^2-6m-112=0$

$(m-14)(m+8)=0$

$\therefore m_1=14,m_2=-8$

$\because a>0,b>0$

$\therefore a+b>0,a\cdot b>0$

于是 $m=14$

又 $\because \triangle=m^2-4\times(3m+6)$

当 $m=14$ 时，$\triangle=196-4\times23>0$

$\therefore a+b=14,a\cdot b=48$

故 $C_{矩}=2(a+b)=28,S_{矩}=ab=48$

12. 由(1)：$a+b=1-2c$