一九八〇年中学生复习资料

数学

上

太原市教育局教研室

一九八〇年中学生复习资料

数　学

（上　册）

太原市教育局教研室　编

山西人民出版社

一九八〇年中学生复习资料

数　学（上册）

太原市教育局教研室编

山西人民出版社出版　（太原并州路七号）

山西省新华书店发行　太原印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张：12 1/4 字数：260千字

1980年2月第1版　1980年2月太原第1次印刷

印数：1—218.600

书号：7088·843　定价：0.83 元

目　　录

（上　册）

代　数　部　分

平面几何部分

代 数 部 分

第一章 数

一、数系表

- 复数 $a+bi$
  - 实　数 a $(b=o)$
    - 有理数
      - 整数
        - 正整数（自然数）
        - 零
        - 负整数
      - 分数—有限小数或无限循环小数
    - 无理数——无限不循环小数
  - 虚　数 $(b\neq o)$
    - 纯虚数 $a=o$
    - 混合虚数 $a\neq o$

表1——1

二、实　数

（一）概念

1.有关正整数的几个主要概念

（1）偶数：能被2整除的正整数叫偶数.

（2）奇数：不是偶数的正整数叫奇数。

（3）质数：只有1和本身能整除的正整数叫质数，也叫素数。

如：2，3，5，7，11，13，……

（4）合数：除1和本身外还有其它约数的正整数叫合数。

（5）互质数：几个正整数，除1以外没有其它公约数，这几个正整数叫互质数。

（6）能被2、3、5、7、9、11、13整除的数的特征：

能被2整除的数的特征是：这个数的末位数是0、2、4、6、8；能被5整除的数的特征是：这个数的末位数是0或5。

能被3或9整除的数的特征是：这个数各个数位上的数之和能被3或9整除。

能被11整除的数的特征是：这个数奇位上的数之和与偶位上的数之和的差（或反过来，偶位上的数之和与奇位上的数之和的差）能被11整除。

能被7、11、13、整除的数的特征是：这个数末三位数字所表示的数与末三位以前的数字所表示的数，它们的差能被7、11、13整除。

2.有理数：整数和分数统称有理数.任何一个有理数都可以写成$\frac{p}{q}$的形式（p、q为整数，$q\neq0$）.

3.数轴：具有原点、单位长度和方向的直线叫数轴.数轴上的点与实数可建立一一对应的关系.

4.倒数：1除以一个数的商叫做这个数的倒数.

5.相反数：只有符号不同的两个数叫做互为相反数.

6. 绝对值：一个数的绝对值，就是数轴上表示它的点到原点的距离。

非负数的绝对值等于它本身，负数的绝对值等于它的相反数。

即 $|a| = \begin{cases} a & (a \geqslant 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$

7. 算术根：正数的正的方根叫算术根。（0的算术根是0），记为$\sqrt[n]{A}$，其中$A \geqslant 0$，n为大于1的自然数。若$n=2$，$\sqrt{A}$表示A的算术平方根（$A \geqslant 0$）。

根据算术平方根的定义：$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & (a \geqslant 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$

（二）性质

1. 有顺序性：任意两个实数可以比较其大小。

2. 有稠密性：任意两个实数之间一定还有实数存在。

3. 有连续性：实数集合和数轴上的点能建立一一对应关系。

4. 在实数范围内，永远可施行加、减、乘（乘方）和除（除数不能为0）四种运算。

5. 在实数里，没有最小数，也没有最大数。

（三）运算

1. 运算法则（略）

2. 运算律

加法交换律：$a+b=b+a$

加法结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$

乘法交换律：$ab=ba$

乘法结合律：$(ab)c=a(bc)$

乘法对加法的分配律：$a(b+c)=ab+ac$

3.运算顺序

加法和减法为第一级运算，乘法和除法为第二级运算，乘方和开方为第三级运算。

在作混合运算时，（1）按第三级、第二级、第一级的顺序进行运算，即从高级到低级。（2）有括号时，先进行括号内运算，即从里到外。（3）若是同级运算，按从左到右的顺序进行。

三、复数

（一）概念

1.虚数单位

（1）定义：$i^2=-1$，i叫做虚数单位

（2）-1的两个平方根分[illegible] i

（3）i的幂的性质：

$i^{4n}=1$；$i^{4n+1}=i$；$i^{4n+2}=-1$；

$i^{4n+3}=-i$（n为整数）

2.复数： 形如$a+bi$的数叫做复数（其中a、b都是实数），a叫做实部，bi叫做虚部，b叫虚部的系数。

3.复数的几何表示

表示复数的坐标平面叫做复数平面。横坐标轴叫实轴，纵坐标轴叫虚数轴（如图1—1）。复数 $a+bi$ 与复数平面上的点（a，b）是一一对应的。当$b=0$时，复数$a+bi$为实数a，它与实轴上的点是一一对应的；当$a=0$时，复数$a+bi$为bi，它与

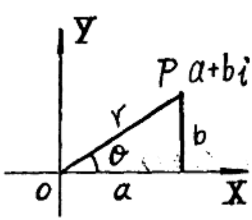

图 1—1

虚轴上的点是一一对应的。

4.复数的模数（绝对值）

$|a+bi|=r=\sqrt{a^2+b^2}$ 叫做复数 $a+bi$ 的模数，其几何意义是复数$a+bi$的对应点P到原点的距离。

5.复数的幅角

复数$a+bi$在复数平面内的对应点为P（a、b），若x轴正方向与Op所夹的角为θ，则θ叫做这个复数的幅角。不等于零的复数有无数个幅角，即$2k\pi+\theta$（k为整数），其中适合于$0\leqslant\theta<2\pi$的幅角的值θ，叫做幅角的主值。

6.复数的三种表示形式

（1）复数的代数式：$Z=a+bi$（a、b为实数）

（2）复数的三角函数式：$Z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$（$r$为模数，$\theta$为幅角）

（3）复数的指数式：$Z=re^{i\theta}$（r为模数，θ为幅角）其中$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

注意：

1.要会鉴别一个式子是不是一个复数的三角函数式。

如：① $5(\cos45°-i\sin45°)$；

② $5(\sin30°+i\cos30°)$；

③ $-5\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$；

④ $1+\cos\theta+i\sin\theta$ $\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$

以上都不是复数的三角函数式。

2.要会把复数的三种形式互化。

如：把$Z=-1+i$化为三角函数式和指数式

解 $\because r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}$，$\cos\theta=\frac{a}{r}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$$\therefore \quad \theta=\frac{3}{4}\pi$$

$$\therefore \quad Z=-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$$

$$=\sqrt{2}e^{\frac{3}{4}\pi i}$$

3.化复数的代数式为三角函数式或指数式要能正确地求出幅角。

（二）性质

1.无顺序性：复数之间没有大小的规定；

复数相等：$a+bi=c+di$，当且仅当

$$a=c,\ b=d$$

复数等于零：$a+bi=0$，当且仅当

$$a=0,\ b=0.$$

2.复数和复数平面上的点建立了一一对应关系；

3.在复数范围内，可施行加、减、乘、除（除数不得为零）、乘方和开方六种运算；

4. $a+bi$和$a-bi$称为共轭复数，两个共轭复数的和、积都是实数。

（三）复数的运算

1.加、减法

$$(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i$$

2.乘法

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

3.除法 $\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}$

$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

$(c+di\neq 0)$

乘除法亦可用三角函数式进行运算

乘法 $r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

$=r_1\cdot r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$

除法 $\dfrac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_2)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}=\dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)$

$+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$

4.乘方 $[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

(棣美弗定理)

5.开方 $\sqrt[n]{r(\cos\theta+i\sin\theta)}$

$$=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

(k取0、1、2、3、……、$n-1$)

注意:

1.复数的乘、除、乘方、开方也可以用指数式，根据指数运算法则进行运算。

2.对复数进行加、减法运算时，一般用代数式运算比较方便，进行乘、除法运算时，用三角函数式或指数式比较方便；特别是在乘方、开方时，一般都用三角函数式或指数式进行运算。

3.根式的基本性质和根式运算法则不能用在虚数的运算上。

如：$\sqrt{-a}\ \sqrt{-b} \neq \sqrt{(-a)(-b)}$ ($a>0$，$b>0$)

应该是：$\sqrt{-a}\sqrt{-b}=\sqrt{a}\,i\sqrt{b}\,i$

$=\sqrt{ab}\,i^2=-\sqrt{ab}$

4.运算过程中应注意利用i的幂的性质。

5.运算完了以后应整理成$a+bi$的形式。

四、范例

例1 计算：$\left[(-0.15)+(-0.03)-(-4)\div\left|-2\frac{1}{5}\right|\times\left(-2\frac{3}{4}\right)\right]\times\frac{1}{3}+1\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)$

解 原式$=\left[5-(-4)\times\frac{5}{11}\times\left(-\frac{11}{4}\right)\right]\times\frac{1}{3}+1\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=[5-5]\times\frac{1}{3}+1\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=0\times\frac{1}{3}+1\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)=1$

例2 求证：$\sqrt{2}$不是有理数.

证明 设$\sqrt{2}$是有理数，即$\sqrt{2}=\frac{p}{q}$，其中p、q是自然数，且p、q互质

$\therefore\ \left(\frac{p}{q}\right)^2=2$

$\therefore\ p^2=2q^2$，即p^2是偶数，p必是偶数。

设$p=2k$（k为自然数）

$(2k)^2=2q^2$，$q^2=2k^2$，$\therefore q$也是偶数。

$\therefore$ p、q都是偶数，这与p、q互质的假设矛盾。

因此，$\sqrt{2}$不是有理数。

例3 当K为何值时，$(2K^2-5K+2)+(3K^2-4K-4)i$为（1）实数；（2）虚数；（3）纯虚数；（4）零

解 $\because$ $(2K^2-5K+2)+(3K^2-4K-4)i$

$$=(2K-1)(K-2)+(3K+2)(K-2)i$$

（1）当$K=2$或$K=-\dfrac{2}{3}$时，是实数；

（2）当$K\neq2$且$K\neq-\dfrac{2}{3}$时，是虚数；

（3）当$K=\dfrac{1}{2}$时，是纯虚数；

（4）当$K=2$时，是零。

例4 a为何实数时，$\sqrt{lg\dfrac{3}{2-a}}$为虚数？

解 $\begin{cases} lg\dfrac{3}{2-a}<0 \\ \dfrac{3}{2-a}>0 \end{cases}$

$\because$ 解得$a<-1$，

$\therefore$ 当$a<-1$时$\sqrt{lg\dfrac{3}{2-a}}$是虚数

例5 计算，$\dfrac{3-4i}{1+2i}+(4+i^{11})-(1-i)^{10}$

解 原式$=\dfrac{(3-4i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}+(4-i)-[(1-i)^2]^5$

$$= \frac{-5-10i}{5} + (4-i) - (-2i)^5$$

$$= -1-2i+4-i+32i = 3+29i$$

注意：本例最后一项的变形方法仅当实部和虚部系数相等时运用。

例6 计算 $(1+\sqrt{3}i)^{10}$。

解 $\because$ $1+\sqrt{3}\,i = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

$\therefore$ $(1+\sqrt{3}i)^{10} = [2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})]^{10}$

$$= 2^{10}(\cos\frac{10\pi}{3} + i\sin\frac{10\pi}{3})$$

$$= 1024(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = -512 - 512\sqrt{3}\,i$$

例7 求复数 $\dfrac{a^2-b^2+2abi}{ab\sqrt{2}+\sqrt{a^4+b^4}\,i}$ 的模数（a、b 为实数）

解 $\because$ $|a^2-b^2+2abi| = \sqrt{(a^2-b^2)^2+(2ab)^2}$

$$= a^2+b^2$$

$$|ab\sqrt{2}+\sqrt{a^4+b^4}\,i|$$

$$= \sqrt{(ab\sqrt{2})^2 + (\sqrt{a^4+b^4})^2}$$

$$= a^2+b^2$$

$\therefore$ $\left|\dfrac{a^2-b^2+2abi}{ab\sqrt{2}+\sqrt{a^4+b^4}\,i}\right|$

$$= \frac{|a^2-b^2+2abi|}{|ab\sqrt{2}+\sqrt{a^4+b^4}\,i|}$$

$$=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=1$$

例 8 已知x、y是共轭复数，且$(x+y)^2-3xyi=4-6i$，求x、y的值.

解 ∵ x、y是共轭复数，则$x+y$、xy均为实数，

$$\therefore \begin{cases}(x+y)^2=4\\-3xy=-6\end{cases}$$

解此方程组得$\begin{cases}x=1+i\\y=1-i\end{cases}$ $\begin{cases}x=1-i\\y=1+i\end{cases}$

$\begin{cases}x=-1+i\\y=-1-i\end{cases}$ $\begin{cases}x=-1-i\\y=-1+i\end{cases}$

例 9 求虚数$a+bi$（且 $b\neq0$，a、b 为实数）的平方根.

解 设$a+bi$的平方根为$x+yi$（x、y为实数），

∴ $a+bi=(x+yi)^2=x^2-y^2+2xyi$

$$\therefore \begin{cases}x^2-y^2=a\cdots\cdots(1)\\2xy=b\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

∵ $(x^2+y^2)^2=(x^2-y^2)^2+(2xy)^2=a^2+b^2$

$x^2+y^2>0$

∴ $x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}\cdots\cdots(3)$

解（1）、（3）得：

$$\begin{cases}x^2=\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}\\y^2=\dfrac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}\end{cases}$$