实用数值分析解题指导

Shiyong Shuzhi Fenxi Jieti Zhidao

刘春凤 马醒花 等 编著

刘保相 审校

冶 金 工 业 出 版 社

实用数值分析解题指导

编著　刘春凤　马醒花　何亚丽
　　　米翠兰　杨爱民
审校　刘保相

北　京
冶　金　工　业　出　版　社
2006

内 容 简 介

本书共分 6 章：第一章绪论；第二章插值与拟合；第三章线性方程组的解法；第四章数值微分与数值积分；第五章非线性方程数值解法；第六章常微分方程数值解法。

本书可作为普通高校理工科学生的教学辅导用书，亦可作为数学系信息和计算科学专业、计算机系本科生的参考资料，也可供对数值计算方法有兴趣的读者阅读。

图书在版编目（CIP）数据

实用数值分析解题指导/刘春凤等编著. —北京：冶金工业出版社，2006. 6

ISBN 7-5024-3986-2

Ⅰ. 实… Ⅱ. 刘… Ⅲ. 数值计算—解题 Ⅳ. 0241-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 040657 号

出版人 曹胜利（北京沙滩嵩祝院北巷 39 号，邮编 100009）
责任编辑 杨盈园 美术编辑 李 心
责任校对 石 静 李文彦 责任印制 牛晓波
北京百善印刷厂印刷；冶金工业出版社发行；各地新华书店经销
2006 年 6 月第 1 版，2006 年 6 月第 1 次印刷
787mm × 1092mm 1/16；9 印张；213 千字；134 页；1-3000 册
19. 00 元
冶金工业出版社发行部 电话：(010)64044283 传真：(010)64027893
冶金书店 地址：北京东四西大街 46 号(100711) 电话：(010)65289081
（本社图书如有印装质量问题，本社发行部负责退换）

冶金工业出版社部分图书推荐

书名	作者
数学规划及其应用（第2版）	范玉妹　等编
模糊数学及其应用	李安贵　等编
线性代数	苏醒侨　等编
多智能体计划调度系统的理论与应用	卢虎生　等著
线性代数与解析几何	刘春凤　等编
应用数值分析	刘春凤　等编
新编大学物理教程	赵宝华　等编
大学物理实验教程	张丽慧　等编
电路实验教程	李书杰　等编
电子产品设计实例教程	孙进生　等编
单片机实验与应用设计教程	邓　红　等编
现代物理测试技术	梁志德　等编
物理化学（第2版）	梁英教　等编
物理化学（职教教材）	蓝　克　等编
分析化学实验教程	刘淑萍　等编
化学工程与工艺综合设计实验教程	孙晓然　等编
水分析化学（第2版）	聂麦茜　等编
无机非金属材料实验教程	王瑞生　主编
有机化学（第2版）	朱建光　等编
无机化学实验	姚迪民　等编
分析化学简明教程	陈华序　等编
管理系统工程基础	朱　明　等编
大学生卫生保健常识	郭凤云　等编

前　言

本书的结构和内容主要是以刘春凤教授主编的《实用数值分析教程》一书为基础而编写的。全书共分6章，包括误差概念、插值与拟合、数值微积分、非线性方程的数值解法、线性方程组的直接解法和迭代法、常微分方程的数值解法。每章设计了5个板块，分别为：

(1) 基本内容提要。这一部分列举了基本概念、重要内容、重要定理和公式，以便读者查阅。

(2) 典型例题选解。就数值分析中主要方法所涉及的、适合于理工科院校学生学习的典型题，给出了详细解答，其中不少题目是对相应内容的进一步补充。

(3) 基于Mathematica的数值计算实例。《实用数值分析教程》突出的特点是：紧密围绕数值分析的内容主线，引入了Mathematica的相关内容，并集作者多年的教学经验，编制了大量的Mathematica程序，配置了适量的应用范例。使数值分析中的诸多方法计算快捷、结果直观。本书根据《实用数值分析教程》的这一特点，为使学生更好地掌握数值计算的Mathematica程序，又编写了数量比较适当，便于学生掌握的用Mathematica实现数值计算的实例。

(4) 基础知识练习。这一部分是为检查读者的学习效果而设计的。通过练习，读者可以进一步加深对所学内容的理解，增强解题能力。

(5) 练习参考答案。这一部分可为读者检查对照自己练习的结果提供方便。

本书从指导课程教学、学习的角度，通过近200道典型题的解答（其中特别列举了50多道用Mathematica实现数值计算的实例），揭示了数值分析的解题方法、解题规律和解题技巧。这将有助于读者理解课程的基本概念和理论，开拓解题思路，增强数学素质，全面提升利用数学方法处理信息的综合能力。

本书可作为普通高校理工科学生的教学辅导用书，亦可作为数学系信息与计算科学专业、计算机系本科生的参考资料，也可供对数值计算方法有兴趣的读者阅读。

编　者

2006年3月

目　　录

1 绪　论

1.1 基本内容提要

1.1.1 绝对误差与相对误差

设 x^* 为准确值 x 的一个近似值，称

$$e = x - x^*$$

为近似值 x^* 的绝对误差（Absolute Error），简称误差。当 $|e| \leq \varepsilon$ 时，则称 ε 为 x^* 的一个绝对误差限。

设 x^* 为准确值 x 的近似值，称绝对误差与准确值之比为近似值 x^* 的相对误差（Relative Error），记为 e_r，即

$$e_r = \frac{e}{x} = \frac{x - x^*}{x}$$

若 $|e_r| \leq \varepsilon_r$，则称 ε_r 为 x^* 的一个相对误差限。

1.1.2 有效数字

如果近似值 x^* 的误差限是 0.5×10^{-n}，则称 x^* 准确到小数点后第 n 位，并从第一个非零数字到这一位的所有数字均称为**有效数字**。

1.1.3 有效位数与误差的关系

设近似数 x^* 具有 n 位有效数字，则有

$$|e_r| \leq \frac{1}{2a_1} \times 10^{1-n}$$

表明有效数字位数越多，x^* 的绝对误差与相对误差越小。

1.1.4 数值计算中应注意的问题

数值计算中应注意的问题如下：

（1）要使用数值稳定的计算公式；

（2）要避免两个相近的数相减；

（3）要避免除数的绝对值远小于被除数的绝对值；

（4）要防止大数“吃掉”小数的现象；

（5）要尽量简化计算步骤，减小运算次数。

1.2 典型例题选解

例 1.1 问 3.142，3.141，$\frac{22}{7}$分别作为 π 的近似值各具有几位有效数字？

解 因为 $\pi=3.14159265\cdots$

记 $x_1=3.142$，$x_2=3.141$，$x_3=\frac{22}{7}$。

由 $\pi-x_1=3.14159\cdots-3.142=-0.00040\cdots$知

$$\frac{1}{2}\times10^{-4}<|\pi-x_1|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-3}$$

因而 x_1 具有 4 位有效数字。

由 $\pi-x_2=3.14159\cdots-3.141=-0.00059\cdots$知

$$\frac{1}{2}\times10^{-3}<|\pi-x_2|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-2}$$

因而 x_2 具有 3 位有效数字。

由 $\pi-\frac{22}{7}=3.14159\cdots-3.14285\cdots=-0.00126\cdots$知

$$\frac{1}{2}\times10^{-3}<\left|\pi-\frac{22}{7}\right|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-2}$$

因而 x_3 具有 3 位有效数字。

例 1.2 已知近似数 x^* 有两位有效数字，试求其相对误差限。

解 利用有效数字与相对误差的关系。可知 $n=2$ 且这里 a_1 是 1 到 9 之间的数字。

$$|\varepsilon_r^*(x)|=\frac{|x-x^*|}{|x^*|}\leqslant\frac{1}{2a_1}\times10^{-n+1}\leqslant\frac{1}{2\times1}\times10^{-2+1}=5\%$$

例 1.3 已知近似数的相对误差限为 0.3%，问 x^* 至少有几位有效数字？

解 设 a_1 是 1 到 9 之间的数字，则有

$$\varepsilon_r^*(x)=0.3\%=\frac{3}{1000}<\frac{1}{2\times10^2}=\frac{1}{2\times(9+1)}\times10^{-1}\leqslant\frac{1}{2(a_1+1)}\times10^{-1}$$

设 x^* 具有 n 位有效数字，令 $-n+1=-1$，则 $n=2$，从而 x^* 至少具有两位有效数字。

例 1.4 设近似数 $x^*=0.0670$ 是“四舍五入”得到的。试确定其有效数字的位数，并说明 x^* 是否为有效数。

解 因为 $x^*=0.0670$ 是“四舍五入”得到的，所以 x^* 的绝对误差限不超过 x^* 最末位的半个单位，即

$$|e(x^*)|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-4}$$

也可写为

$$|e(x^*)|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-1-3}$$

于是由定义可知 x^* 具有3位有效数字，分别是6，7，0。

由于 x^* 从第一个非零数字开始，以后各位数字均为有效数字，故近似数 x^* 是有效数。

注：由本例题不难进一步判断，任何“四舍五入”所得的近似数均为有效数。

例1.5　计算$\frac{1}{759}-\frac{1}{760}$，视已知数为精确值，用4位浮点数计算。

解　因为

$$\frac{1}{759}-\frac{1}{760}=0.1318\times10^{-2}-0.1316\times10^{-2}=0.2\times10^{-5}$$

结果只有一位有效数字，有效数字大量损失，造成相对误差扩大，若通分后再计算，即

$$\frac{1}{759}-\frac{1}{760}=\frac{1}{759\times760}=\frac{1}{0.5768\times10^{6}}=0.1734\times10^{-5}$$

就得到4位有效数字的结果。

此例说明，在数值计算中，要特别注意两相近数作减法运算时，有效数字常会严重损失，遇到这种情况，一般采取两种方法：第一，应多保留几位有效数字；第二，将算式恒等变形，然后再进行计算。

例如，当 x 接近于0，计算$\frac{1-\cos x}{\sin x}$时，应先把算式变形为

$$\frac{1-\cos x}{\sin x}=\frac{1-\cos^2 x}{\sin x(1+\cos x)}=\frac{\sin x}{1+\cos x}$$

再计算。

又例如，当 x 充分大时，应作变换

$$\sqrt{1+x}-\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}$$

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x(x+1)}$$

例1.6　设 x_1^*，x_2^* 分别是 x_1，x_2 的近似值。试证乘积 $x_1^*x_2^*$ 的绝对误差与相对误差有如下近似表达式

$$e(x_1^*x_2^*)\approx x_2^*e(x_1^*)+x_1^*e(x_2^*)$$

$$e_r(x_1^*x_2^*)\approx e_r(x_1^*)+e_r(x_2^*)$$

证明　取$f(x_1,x_2)=x_1x_2$，则

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=x_2,\quad \frac{\partial f}{\partial x_2}=x_1$$

应用上述近似公式，有

$$e(x_1^*x_2^*)\approx x_2^*e(x_1^*)+x_1^*e(x_2^*)$$

$$e_r(x_1^*x_2^*)\approx\frac{x_2^*x_1^*}{x_1^*x_2^*}e_r(x_1^*)+\frac{x_1^*x_2^*}{x_1^*x_2^*}e_r(x_2^*)$$

即

$$e_r(x_1^* x_2^*) \approx e_r(x_1^*) + e_r(x_2^*)$$

例1.7　计算 $a = (\sqrt{2}-1)^6$，取$\sqrt{2}\approx 1.4$，采用下列算式计算：

(1) $\dfrac{1}{(\sqrt{2}+1)^6}$;

(2) $99-70\sqrt{2}$;

(3) $(3-2\sqrt{2})^3$;

(4) $\dfrac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}$。

问哪一个得到的结果更好？

解　显然

$$a = (\sqrt{2}-1)^6 = \frac{(\sqrt{2}-1)^6(\sqrt{2}+1)^6}{(\sqrt{2}+1)^6} = \frac{1}{(\sqrt{2}+1)^6}$$

$$(\sqrt{2}-1)^6 = [(\sqrt{2}-1)^2]^3 = (3-2\sqrt{2})^3 = 99-70\sqrt{2}$$

$$(\sqrt{2}-1)^6 = \frac{1}{(\sqrt{2}+1)^6} = \frac{1}{[(\sqrt{2}+1)^2]^3} = \frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}$$

所以(1)≡(2)≡(3)≡(4)，这4个算式是恒等的，但当取$\sqrt{2}\approx 1.4$计算时，因为算式(2)、式(3)都涉及到两个相近数相减，使有效数字丢失，而算式(1)在分母算式上的乘幂数比算式(4)大，所以算式(4)最好。事实上，当取$\sqrt{2}\approx 1.4$时，有$|\Delta x| < 0.015$，再由$f(x)$的误差$|f(x+\Delta x)-f(x)| \approx |f'(1.4)||\Delta x|$也可直接估计出每个算式的误差，显然，算式(4)误差最小。

具体计算可得：

(1) $\dfrac{1}{(\sqrt{2}+1)^6} \approx 5.2\times 10^{-3}$;

(2) $99-70\sqrt{2} \approx 1.0$;

(3) $(3-2\sqrt{2})^3 \approx 8.0\times 10^{-3}$;

(4) $\dfrac{1}{(3+2\sqrt{2})^3} \approx 5.1\times 10^{-3}$。

比较可得用算式 (4) 所得的结果更接近于 a。

例1.8　建立积分 $I_n = \int_0^1 \dfrac{x^n}{x+5}\mathrm{d}x \quad n = 0,1,\cdots,20$ 的递推关系式，并研究它的误差传递。

解　由

$$I_n + 5I_{n-1} = \int_0^1 \frac{x^n + 5x^{n-1}}{5+x}\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{n-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{n}$$

和

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{x+5}\mathrm{d}x = \ln 6 - \ln 5$$

可建立下列递推公式

$$\begin{cases} I_0 = \ln 6 - \ln 5 \\ I_n = \dfrac{1}{n} - 5I_{n-1} \quad (n = 1,2,\cdots,20) \end{cases} \tag{$*$}$$

计算出 I_0 后，由递推关系式可逐次求出 I_1，I_2，…，I_{20}的值。但在计算 I_0 时有舍入误差，因此在使用递推关系式中，实际算出的都是近似值 I_n^* $(n = 1,2,\cdots,20)$。即

$$\begin{cases} I_0^* = I_0 - e_0 \\ I_n^* = \dfrac{1}{n} - 5I_{n-1}^* \quad (n = 1,2,\cdots,20) \end{cases}$$

现在来研究误差是如何传递的。

设 I_0^* 有误差 e_0，假设计算过程中不产生新的舍入误差，则由式（$*$）可得

$$e_n = I_n - I_n^* = -5I_{n-1} + 5I_{n-1}^* = -5e_{n-1} \quad (n = 1,2,\cdots)$$

从而有

$$e_n = (-5)^n e_0$$

即原始数据 I_0^* 的误差 e_0 对第 n 步的影响使该误差扩大了 5^n 倍。当 n 较大时，误差将淹没真值，因此递推公式（$*$）是数值不稳定的。

现在从另一方向使用这一公式

$$I_{n-1} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{n} - I_n\right) \quad (n = 20,19,\cdots,1) \tag{$**$}$$

只要给出 I_{20}的一个近似值 I_{20}^*，即可递推得到 I_{19}^*，I_{18}^*，…，I_0^*，类似于上面的推导可得

$$e_{n-1} = -\frac{1}{5}e_n, \quad e_0 = \left(-\frac{1}{5}\right)^n e_n$$

每递推一步误差缩小到原值的$\frac{1}{5}$，所以递推公式（$**$）是数值稳定的。

由于 $x \in [0,1]$ 时

$$\frac{x^n}{6} < \frac{x^n}{5+x} < \frac{x^n}{5}$$

所以有估计式

$$\frac{1}{6(n+1)} < I_n < \frac{1}{5(n+1)}$$

于是

$$\frac{1}{6 \times 21} < I_{20} < \frac{1}{5 \times 21}$$

取

$$I_{20} \approx \frac{\dfrac{1}{126} + \dfrac{1}{105}}{2} \approx 0.0087301587$$

可得另一算法：$\begin{cases} I_{20} \approx 0.0087301587 \\ I_{n-1} = \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{n} - I_n\right) \qquad (n = 20,19,\cdots,1) \end{cases}$

由此可见，对于同一数学问题，使用的算法不同，效率也大不相同，只有选用数值稳定性好的算法，才能求得较准确的结果。

1.3 基于 Mathematica 的数值计算实例

例 1.9 计算 e，π 有 $n(n = 1,2,\cdots,10)$ 位有效数字的近似值，并列表。

解 Mathematica 程序

```
Table[{N[E,n],N[Pi,n]},{n,1,10}];
TableForm[%]
```

运行结果：

3.	3.
2.7	3.1
2.72	3.14
2.718	3.142
2.7183	3.1416
2.71828	3.14159
2.718282	3.141593
2.7182818	3.1415927
2.71828183	3.14159265
2.718281828	3.141592654

例 1.10 用程序计算 $\sqrt{1500}$，$\sqrt[6]{12}$有 $n(n = 10,11,\cdots,15)$ 位有效数字的近似值。

解 Mathematica 程序

```
Table [ {N [Sqrt [1500], n], N [12^ (1/6), n]}, {n, 10, 15}];
TableForm [%]
```

运行结果：

38.72983346	1.513085749
38.729833462	1.5130857494
38.7298334621	1.51308574942
38.72983346207	1.513085749423
38.729833462074	1.5130857494229
38.7298334620742	1.5130857494229

例 1.11 计算 cos75.5°，arctan 34.7°，$\log_5 79$ 的近似值。

解 Mathematica 程序

```
{Cos [75.5 Degree], ArcTan [34.7 Degree], Log [5, 79]} //N;
TableForm [%]
```

运行结果：

0.25038

四、人体个体因素的影响

由于作业者的个体条件不同，如年龄、性别、健康状况、中枢神经系统、习惯性及致敏等情况不同，在同样的作业条件下，接触同样的毒物时，有些人发生中毒，而另一些人则不发生中毒。

人体解毒和排毒的能力是因人而异的，解毒、排毒能力较弱的人，易产生中毒。在疲劳状态下，人体对毒物的解毒、排毒能力降低，容易发生中毒。营养不良、酒后工作等对毒物的敏感性增强，容易发生中毒。有些人对某种毒物会产生过敏反应，而产生中毒症状。

由于人体对毒物的耐受性不同，在同样中毒的情况下，其病情轻重也不相同。青少年由于各器官发育还不健全，易发生中毒。妇女在经期、孕期、哺乳期内，因内分泌和植物神经系统等功能的改变对毒物的敏感性会增高。长期接触毒物后，有些人的耐受能力有所提高，这种提高称为“适应性”。

毒物对某些组织或器官有“选择性”或“亲和力”，而当人体的这些器官或组织不健康或损伤时，则更易产生中毒。

第五节　毒性指标与分级

一、毒性指标

毒物的毒性是指毒物对机体产生损害和病理变化的能力。工业毒物对人体都有一定的毒性作用，然而，如果进入人体毒物的剂量不够，则毒物的毒性再高也不致引起中毒。为了用一定数值表示毒物的毒性程度，在毒理学上，采用毒物引起实验动物的毒性反应所需的用量来推断毒物对人体的毒性作用。毒物引起机体毒性反应的用量，常用剂量与浓度表示。

剂量：毒物引起一定毒性作用效应的量称做剂量，其表示方法是单位体重摄入的毒物量（mg/kg）。

质量浓度：单位体积空气中含有毒性物质的量称作质量浓度，常用 mg/m^3 表示。

毒性指标是指在急性中毒实验中，对动物一次染毒后观察两周内的死亡情况的测定数据。毒性指标一般用绝对致死量（或浓度）、半数致死量（或浓度）、最小致死量（或浓度）、最大耐受量（或浓度）、阈浓度（剂量）、无反应浓度（剂量）等表示。

（1）半数致死剂量（浓度）：使半数实验动物死亡的最小剂量或最低浓度，用 LD_{50} 或 LC_{50} 表示。

（2）绝对致死剂量(浓度)：使全部实验动物死亡的最小剂量或最低浓度，用 LD_{100} 或 LC_{100} 表示。

（3）最低致死剂量(浓度)：刚刚使实验动物死亡一只的剂量或浓度，用 MLD 或 MLC 表示。

（4）最大耐受剂量(浓度)：使实验动物全部存活的最大剂量或最高浓度，用 LD_0 或 LC_0 表示。

（5）急性阈浓度（剂量）：急性阈浓度是指一次染毒后，引起机体对毒性反应的最小浓度或剂量，用 LiMac 表示。

（6）慢性阈浓度（剂量）：慢性阈浓度是指长期反复染毒引起机体反应的最小浓度，用 LiMch 表示。

（2）为使$\sqrt{70}$的近似值的相对误差小于0.1，问查开方表时，要取几位有效数字？

（3）利用4位数字用表求$x=1-\cos 2°$的近似值，采用下面等式计算：

1）$1-\cos 2°$；

2）$2\sin^2 1°$。

问哪一个结果较好？

（4）求方程$x^2-56x+1=0$的两个根，使它至少具有4位有效数字（已知$\sqrt{783}\approx 27.982$）。

（5）数列$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$满足递推公式

$$x_n = 10x_{n-1} - 1 \qquad (n = 1,2,\cdots),$$

若取$x_0=\sqrt{2}\approx 1.41$（3位有效数字），问按上述递推公式，从x_0计算到x_{10}时误差有多大？这个计算过程稳定吗？

（6）如果近似值$x^* = \pm(a_1 + a_2\times 10^{-1} + a_3\times 10^{-2} + \cdots + a_n\times 10^{n-1})\times 10^m$的相对误差限小于$\frac{1}{2(a_1+1)}\times 10^{-n+1}$，证明：这个数具有$n$位有效数字。

1.5 基础知识练习参考答案

（1）0.005

（2）取3位有效数字

（3）1）有一位有效数字；2）有两位有效数字。显然2）式较好。

（4）用解二次代数方程$ax^2+bx+c=0$的两个求根公式，有

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{56+\sqrt{56^2-4}}{2} = 28+\sqrt{783}\approx 55.983$$

$$x_2 = \frac{c}{ax_1} = \frac{1}{28+\sqrt{783}} \approx \frac{1}{55.983} \approx 0.017863$$

（5）$10^{10}\varepsilon < 10^{10}\times\frac{1}{2}\times 10^{-2} = \frac{1}{2}\times 10^{8}$

2 插值与拟合

2.1 基本内容提要

2.1.1 插值法的定义

设函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义，且已知在点 $a \leqslant x_0 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant b$ 上的值 $f(x_i) = y_i (i = 0,1,\cdots,n)$，若存在一简单函数 $\varphi(x)$，使

$$\varphi(x_i) = y_i (i = 0,1,\cdots,n)$$

成立，就称 $\varphi(x)$ 为 $f(x)$ 的**插值函数**（Interpolating Function），点 $x_i (i = 0,1,\cdots,n)$ 为**插值节点**（Interpolation Knot），包括插值节点的区间 $[a, b]$ 称为**插值区间**（Interpolation Interval），求插值函数 $\varphi(x)$ 的方法称为**插值法**（Interpolation Method）。若 $\varphi_n(x)$ 为次数不超过 n 的代数多项式

$$\varphi_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

其中的 $a_i (i = 0,1,\cdots,n)$ 为实数，就称 $\varphi_n(x)$ 为**插值多项式**（Interpolation Ploynomial），相应的插值法称为多项式插值。若 $\varphi_n(x)$ 为分段的多项式，就称为**分段插值**（Piecewise Interpolation）。

2.1.2 插值多项式的误差估计

若在 $[a,b]$ 上用 $\varphi_n(x)$ 近似 $f(x)$，则

$$R_n(x) = f(x) - \varphi_n(x)$$

称为插值多项式的**截断**误差（或余项）。

2.1.3 Lagrange 插值多项式

给定 $(x_i, f(x_i))(i = 0,1,\cdots,n)$，多项式

$$\varphi_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)$$

称为 $f(x)$ 关于 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 的 n 次 Lagrange 插值多项式。

2.1.4 差商（Divided Difference）的定义

设有函数 $f(x), x_0, x_1, x_2, \cdots$ 为一系列互不相等的点，称

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j} \quad (i \neq j)$$