2006年高考
数学几何考点突破

海淀信息白皮系列资料库

高考白皮系列

《高考白皮系列》作为内部交流资料印行已经近10个年头，其间先后与全国16000所学校作过交流，受到使用学校师生的好评。一致认为：这是一套实用性强，信息量大，题型新颖的高考辅导资料。为了让更多考生受益，满足在备战高考一线拼搏的师生需求，《高考白皮系列》由开明出版社正式出版，面向全国师生公开发行。

开明出版社

总策划 王传业

本册主编 王子成 杨剑波
副主编 孙玉成 代夫珍
审 定 丁益祥

北京市海淀区学校信息中心 HAIDIAN XINXI 海淀

海淀信息白皮系列资料库

2006年高考

立体几何与解析几何考点突破

高考白皮系列

开明出版社

责任编辑　吕志敏

图书在版编目(CIP)数据
高考数学几何考点突破/王传业　主编.
北京：开明出版社，2005.6
(高考白皮系列)
ISBN 7－80205－188－6
Ⅰ.2... Ⅱ.王... Ⅲ.数学课—高中—升学参考资料 Ⅳ.G634.633
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 061161 号

高考数学几何考点突破
主编　王子成
*
开明出版社出版
(北京市海淀区西三环北路 19 号　邮编 100089)
三河市腾飞胶印厂
新华书店北京发行所经销
开本 889×1194　1/16　印张 8.25　字数 187 千字
2005 年 6 月北京第 1 版　2005 年 6 月北京第 1 次印刷
印数：00001－20000
ISBN7－80205－188－6　　定价：10.00 元

听听丛书策划者、编写者是怎么说的

——致 2006 年高考应试考生

时钟一分一秒地移向 2006 年 6 月上旬那个令高考考生激动、焦灼，同时又充斥着热切期盼、满心希望的那一刻的到来。说真的，当考生步入考场的铃声响过，当分发试卷的哨声落下，那一时刻，场内场外、此心彼心、其情其景、其想其望，有谁人能说得出？又有哪个能道得明？

学生：我有夺得高考高分、满分的可能吗？指导教师：今年的高考试题是否尽在自己的把握之中？家长：孩子的心态如何，能否得到超常发挥？社会：一年一度……。一句话，每年的高考似乎都处在人们的飘渺未知之中。

高考是虚玄的吗？试题是不可预知的吗？高考高分、满分真的那么不可企求？

且慢。“高考白皮系列”丛书的策划者、编写者有话要说。

“高考白皮系列”丛书的策划者、编写者，其中有曾参与高考命题的大擘，有来自部分省地市历年站在高考“决战”指挥前沿的各学科教研员，也有深得高考送生“三昧”的领军教师。我们认为：几年来的高考命题，尤其是部分省市自主命题以来，其试卷内容表面看来似乎犹入山阴道上，但骨子里却没有一例超出该年《考试大纲》规定的考试内容及其能力层次；试卷题型虽然各展其姿，但也无非就那么几种形式，有的只不过略略换换角度、些许变变姿态而已。为此，我们几经“会诊”，为直接参与抑或间接参与高考决战的人们开出了一贴处方，这就是：“高考白皮系列”丛书编写的指导思想和与之相应的编写体例；考生根据本系列丛书编写的指导思想、编写体例，将所给出的考点内容、试题类型、解题方法与技巧烂熟于心，就一定会一步一步地将赢得高分、满分的想望调整到志在必得之中。

为达此目的，“高考白皮系列”丛书各学科分册一律严格依据《考试大纲》规定的考试内容，精心盘察、审读、归纳、熔炼成若干个考点，进而指出认知该考点的内容方法、能力层次、角度变化及其测试手段与规律；这之后再给出测试该考点的已有试题类型、可能出现的变化形式；为调整考生对于高分、满分志在必得的平和心态，各学科分册又精心而周详地挑选、编制与考点相伍的练习，并配以简洁、精到的解析，以期最大限度地开启考生的认题、解题智力，增益高考夺魁信心。

俗云：饭是要一口一口吃的，碉堡是要一个一个攻破的；高考应试的决战也不例外。“高考白皮系列”丛书的策划者、设计者和编写者们十分看重“各个击破”的备考应试战略与战术。为了突出这一编写思想，大部分分册的书名还特意加上“考点突破”字样。我们认为，这样的备考应试战略战术及与之相适应的编写体例是科学的、可行的、从而也是最为强有实践活力的。

2006用“高考白皮系列”丛书的编写思想与编写体例，是我们多年研究、总结各地备考应试实践的结晶；是在2005年“高考白皮系列”用书基础之上的又一次彻底改进与创新，从而更具科学的严密精神、指导的领先思想、实践的高效成果，并希望给2006年高招备考应试考生带来更为直接、更为有效的切实助益。

试想：当你根据“高考白皮系列”丛书指出的路子，把“高考白皮系列”丛书各学科分册所列考点，经过一番攻城略地的战斗，将其一个一个地打扫干净之后，到那时，考生一手提着识得的知识和解题能力串，一手提着习得的题型及其变化形式串，并以超乎寻常的平常心、不焦不躁地迈进考场……步出考场，高考决战的胜利者舍你其谁？

到那时，你会禁不住欢叫起来：“哇噻！我赢了耶！”

“哇噻！我赢了耶！”这是多么美妙、悦耳的声音啊！

“高考白皮系列”丛书的策划者、编写者热切地等待着分享你那高亢、中耳、从心底发出来的、胜利者的欢快声。……

高考最终赢家，必将是“高考白皮系列”丛书的忠实考生读者！

“高考白皮系列”丛书总策划 王传业

目　录

考点1　平面、空间直线

知识要点

1. 平面的基本性质：

① 如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上的所有点都在这个平面内.

② 如果两个平面有一个公共点，那么它们还有其他公共点，这些公共点的集合是一条直线.

③ 经过不在同一条直线上的三点有且只有一个平面.

2. 公理的推论：

① 经过一直线和直线外一点有且只有一个平面.

② 经过两条相交直线有且只有一个平面.

③ 经过两条平行直线有且只有一个平面.

3. 画直观图采用斜二测画法.

4. 平行公理：平行于同一条直线的两条直线互相平行.

5. 等角定理：如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行并且方向相同，那么这两个角相等.

6. 异面直线：不同在任何一个平面内的两条直线叫异面直线.

7. 异面直线的判定：连结平面内一点与平面外一点的直线，和这个平面内不经过此点的直线是异面直线.

8. 空间两条直线的位置关系：相交、平行、异面.

9. 异面直线所成的角：已知两条异面直线 a,b，经过空间任一点 O 作直线 $a' \parallel a$,$b' \parallel b$，把 a' 与 b' 所成的锐角(或直角)叫做异面直线 a 与 b 所成的角(或夹角).

10. 两条异面直线互相垂直：如果两条异面直线所成的角是直角，那么我们就说两直线互相垂直.

11. 两条异面直线间的距离：两条异面直线的公垂线段的长度叫两异面直线的距离.

高考样板题示例(一类)

示例一

正六棱柱 $ABCDEF—A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的底面边长为1，侧棱长为$\sqrt{2}$，则这个棱柱的侧面对角线 E_1D 与 BC_1 所成的角是(　　)

A. 90°　　B. 60°　　C. 45°　　D. 30°

(02年高考·全国卷)

【解析】 连接 FE_1、FD，则由正六棱柱相关性质得 $FE_1 \parallel BC_1$. 在 $\triangle EFD$ 中，$EF = ED = 1$，$\angle FED = 120°$，$\therefore FD = \sqrt{3}$. 在 $Rt\triangle FEE_1$ 和 $Rt\triangle EE_1D$ 中，易得 $E_1F = E_1D = \sqrt{3}$.

$\therefore \triangle E_1FD$ 是等边三角形. $\therefore \angle FE_1D = 60°$.

$\therefore BC_1$ 与 E_1D 所成的角为 60°.

示例二

已知 m,n 为异面直线，$m \subset$ 平面 α，$n \subset$ 平面 β，$\alpha \cap \beta = l$，则 l(　　)

A. 与 m,n 都相交

B. 与 m,n 中至少一条相交

C. 与 m,n 都不相交

D. 至多与 m,n 中的一条相交

(02年新课程)

【答案】 B

【解析】 若 l 与 m,n 都不相交，则由于 l 与 m 同在 α 内，l 与 n 同在 β 内，所以，$l \parallel m$，$l \parallel n$，从而 $m \parallel n$，与 m,n 是异面直线矛盾，因此，l 与 m、n 两条直线至少有一条相交，得答案 B.

对应练习

练习1　给下列命题：① 和直线 a 都相交的两条直线在同一个平面内；② 三条两两相交的直线在同一个平面内；③ 有三个不同公共点的两个平面重合；④ 两两平行的三条直线确定三个平面，其中正确命题的个数是(　　)

A. 0个　　B. 1个　　C. 2个　　D. 3个

练习2　若3个平面将空间分成 n 部分，则 n 的值为(　　)

A. 4　　B. 4或6

C. 4或6或7　　D. 4或6或7或8

练习3　四面体的一个顶点 A，从其他顶点及各棱的中点取3个点，使它们和点 A 在同一个平面上，不同的取法有(　　)

A. 30种　　B. 33种　　C. 46种　　D. 39种

练习4　命题甲：空间中四点不共面，则这四点中任何三点都不共线. 它的逆命题记作乙. 则(　　)

A. 甲、乙都正确　　B. 甲、乙都不正确

C. 甲不正确，乙正确　　D. 甲正确，乙不正确

能力要求

1. 本考点考试要求:

(1)掌握平面的基本性质,会用斜二测画法画水平放置的平面图形的直观图,能够画出空间两条直线、直线和平面的各种位置关系的图形,能够根据图形想像它们的位置关系.

(2)掌握两直线平行与垂直的判定定理与性质定理,掌握两直线所成角和距离的概念,对于异面直线距离,只要求会计算已给出公垂线时的距离.

2. 利用公理来证明点和线的共面以及三点共线、三线共点.

3. 对异面直线的定义可以这样理解:"不存在这样的一个平面,使它同时经过这两条直线.

4. 异面直线的判定方法:① 定义法;② 判定定理法;③ 反证法.

5. 在作异面直线所成的角时,其关键在于 O 点的选取,应尽量选取立体几何中具有特殊性质的点才有利于计算.

6. 在做立体几何的解答题时,要做到"作、证、算"一步都不能缺.

7. 关于高考:

本考点在高考命题中,大都以选择、填空题的形式出现.

练习 5 已知直线 a 和平面 α、β,$\alpha\cap\beta=l$,$a\not\subset\alpha$,$a\not\subset\beta$,a 在 α、β 内的射影分别为直线 b 和 c,则 b、c 的位置关系是(　　)

A. 相交或平行

B. 相交或异面

C. 平行或异面

D. 相交、平行或异面

练习 6 一个正方体纸盒展开后如图 1-1 所示,在原正方体纸盒中有下列结论:①$AB\perp EF$;②AB 与 CM 成 $60°$;③EF 与 MN 是异面直线;④$MN\parallel CD$,其中正确的是(　　)

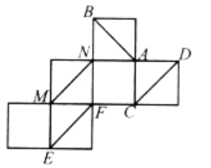

图 1-1

A. ①②

B. ③④

C. ②③

D. ①③

高考样板题示例(二类)

如图所示,在棱长为 2 的正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中,O 是底面 $ABCD$ 的中心,E,F 分别是 CC_1,AD 的中点,那么异面直线 OE 和 FD_1 所成的角的余弦值等于________.

(04 年高考 · 天津卷)

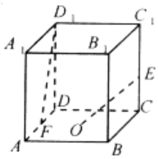

图 1-2

【答案】 $\frac{\sqrt{5}}{5}$

【解析】 连接 AC,知其必过 O,连结 AC_1,则 $OE \underline{\parallel} \frac{1}{2}AC_1$,取 BC 中点 G,连接 C_1G 知:$C_1G\parallel D_1F$,∴OE 与 FD_1 所成角即为 AC_1 与 C_1G 所成的角,即 $\angle AC_1G$ 或其补角,在 $\triangle AC_1G$ 中,$AC_1=2\sqrt{3}$,$AG=CG=\sqrt{5}$,由余弦定理可求 $\cos\angle AC_1G=\frac{\sqrt{15}}{5}$.

对应练习

练习 1 空间中有 8 个点,其中有 3 个点在一条直线上,此外再无任何三点共线,由这 8 个点可以确定________条直线,最多可确定________个平面.

练习 2 在正四棱锥 $P—ABCD$ 中,若侧面与底面所成二面角的大小为 $60°$,则异面直线 PA 与 BC 所成角的大小等于______.(结果用反三角函数值表示)

练习 3 如图 1-3 所示,正方形 $ABCD$ 所在平面与正方形 $ABEF$ 所在平面成 $60°$ 的二面角,则异面直线 AD 与 BF 所成角的余弦值是______.

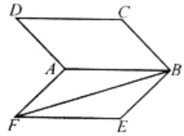

图 1-3

练习 4 已知两异面直线 a、b 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$,直线 l 分别与 a、b 所成的角都是 θ,则 θ 的取值范围是______.

高考样板题示例(三类)

正方体$ABCD—A_1B_1C_1D_1$中,对角线A_1C与平面BDC_1交于点O,AC、BD交于点M,求证:点C_1、O、M共线.

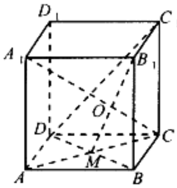

图 1-4

【解析】 如图 1-4 所示

$A_1A \parallel C_1C \Rightarrow$ 确定平面A_1C

$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}A_1C\subset \text{平面} A_1C\\ \text{又 } O\in A_1C\end{array}\right\}\Rightarrow O\in \text{平面 } A_1C\\ \text{平面 } BC_1D\cap \text{直线 } A_1C=O\\ \Rightarrow O\in \text{平面 } BC_1D\end{array}\right\}$

$\Rightarrow O$在平面A_1C与平面BC_1D的交线上.

$\left.\begin{array}{l}AC\cap BD=M\Rightarrow M\in \text{平面 } BC_1D \text{ 且 } M\in \text{平面 } AC\\ \text{平面 } BC_1D\cap \text{平面 } A_1C=C_1M\end{array}\right\}$

$\Rightarrow O\in C_1M$,即O、C_1、M三点共线.

证明点共线的问题,一般转化为证明这些点是某两个平面的公共点,这样可根据公理 2 证明这些点都在这两个平面的公共直线上.

对应练习

练习 1 如图 1-5 所示,$\alpha\cap\beta=l$,$AC\subset\alpha$,$BD\subset\beta$,两点A,$B\in l$,两点C,$D\notin l$.

求证:两直线AC与BD是异面直线

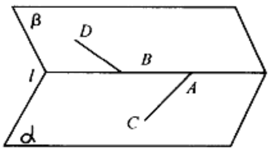

图 1-5

练习 2 如图 1-6 所示,在四面体$ABCD$中,E、F分别是BC、DA的中点,若$AC=\frac{1}{2}BD=2$,$EF=\sqrt{3}$,求AC与BD所成角的大小.

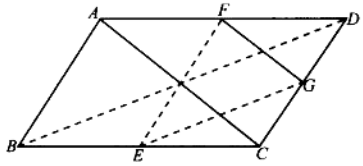

图 1-6

练习 3 已知空间四边形$ABCD$中,E、H分别是边AB、AD的中点,F、G分别是边BC、CD上的点,且$\frac{CF}{CB}=\frac{CG}{CD}=\frac{2}{3}$(如图 1-7 所示),求证:三条直线$EF$、$GH$、$AC$交于一点.

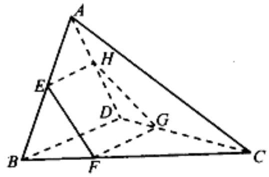

图 1-7

练习 4 已知三直线a、b、c互相平行,且分别与直线l相交于A、B、C三点,求证:四条直线a、b、c、l必共面.

考点 2　直线与平面、平面与平面平行

知识要点

1. 直线和平面的位置关系：

<table>
<tr><th colspan="2">位置关系</th><th>表示方法</th><th>公共点个数</th></tr>
<tr><td colspan="2">直线在平面内</td><td>$a \subset \alpha (a \cap \alpha = a)$</td><td>无穷多个</td></tr>
<tr><td rowspan="3">直线不在平面内</td><td>直线与平面相交 斜交</td><td>$a \cap \alpha = A$</td><td>一个</td></tr>
<tr><td>直线与平面相交 垂直相交</td><td>$a \perp \alpha$</td><td>一个</td></tr>
<tr><td>直线与平面平行</td><td>$a \parallel \alpha$</td><td>无</td></tr>
</table>

2. 直线与平面平行：

(1) 定义：一条直线和一个平面没有公共点叫直线与平面平行.

(2) 判定：如果平面外的一条直线和平面内的一条直线平行，那么这条线和这个平面平行.

符号语言：$l \not\subset \alpha, m \subset \alpha$，且 $l \parallel m \Rightarrow l \parallel \alpha$

(3) 性质

① 直线和平面平行的性质定理：

如果一条直线和一个平面平行，经过这条直线的平面和这个平面相交，那么这条直线和交线平行.

符号语言：$l \parallel \alpha, l \subset \beta, \alpha \cap \beta = m \Rightarrow l \parallel m$

② 如果一条直线和一个平面平行，那么夹在它们之间的平行线段相等.

3. 两个平面的位置关系

<table>
<tr><th colspan="2">位置关系</th><th>表示方法</th><th>公共点个数</th></tr>
<tr><td colspan="2">两平面平行</td><td>$\alpha \parallel \beta$</td><td>无</td></tr>
<tr><td rowspan="2">两平面相交</td><td>斜交</td><td>$\alpha \cap \beta = l$</td><td>无穷多个</td></tr>
<tr><td>垂直相交</td><td>$\alpha \perp \beta$</td><td>无穷多个</td></tr>
</table>

4. 两个平面平行

(1) 判定

① 如果一个平面内的两条相交直线和另一个平面内两条直线平行，那么这两个平面平行.

② 如果一个平面内的两条相交直线都和另一个平面平行，那么这两个平面平行.

③ 垂直于同一条直线的两个平面平行.

④ 平行于同一个平面的两个平面平行.

高考样板题示例（一类）

示例一

在下列条件中，可判断平面 α 与 β 平行的是（　　）

A. α、β 都垂直于平面 γ

B. α 内存在不共线的三点到 β 的距离相等

C. l、m 是 α 内两条直线，且 $l \parallel \beta, m \parallel \beta$

D. l、m 是两条异面直线，且 $l \parallel \alpha, m \parallel \alpha, l \parallel \beta, m \parallel \beta$

（03 年高考・上海卷）

【答案】 D

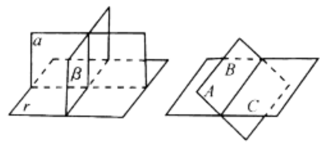

图 2-1

【解析】 如图 2-1 所示，A 选项中 α、β 的位置不确定. B 选项中 α、β 可能是相交的. C 选项中，增加条件 l 与 m 相交，则有 $\alpha \parallel \beta$.

示例二

在下列关于直线 l、m 与平面 α、β 的命题中，真命题是（　　）

A. 若 $l \subset \beta, \alpha \perp \beta$，则 $l \perp \alpha$

B. 若 $l \perp \beta$，则 $l \perp \alpha$

C. 若 $l \perp \beta$ 且 $\alpha \perp \beta$，则 $l \perp \alpha$

D. 若 $\alpha \cap \beta = m$ 且 $1 \parallel m$，则 $l \parallel \alpha$

（04 年高考・上海卷）

【答案】 B

【解析】 由一条直线垂直于两个平行平面中的一个，必垂直于另一个. 知 B 正确.

对应练习

练习 1　已知 α、β 是不同的两个平面，直线 $a \subset \alpha$，直线 $b \subset \beta$. 命题 p：a 与 b 无公共点；命题 q：$\alpha \parallel \beta$. 则，p 是 q 的（　　）

A. 充分而不必要的条件

B. 必要而不充分的条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要的条件

练习 2　已知 m、n 是不重合的直线，α、β 是不重合的平面，有下列命题：

① 若 $m \cap \alpha, n \parallel \alpha$，则 $m \parallel n$

② 若 $m \parallel \alpha, m \parallel \beta$，则 $\alpha \parallel \beta$

(2) 性质

① 两个平面平行，其中一个平面内的直线必平行于另一个平面.

② 如果两个平行平面同时和第三个平面相交，那么它们的交线互相平行.

③ 一条直线垂直于两个平行平面中的一个平面，它也垂直于另一个平面.

④ 夹在两个平行平面间的平行线段都相等.

能力要求

1. 本考点考试要求

掌握直线和平面、平面和平面的判定和性质定理

2. 证明直线和平面平行的方法有：

① 依定义采用反证法；② 判定定理法(线 // 线 ⇒ 线 // 面)；③ 面面平行的性质定理(面 // 面 ⇒ 线 // 面)

3. 根据条件应用性质，是证明几何题的必由之路，而辅助线和辅助面的作出则是应用性质的自然结果. 在利用直线与平面平行的性质定理时，关键是找出或作出过该直线与已知平面相交的平面，从而实现线面平行到线线平行的转化. 在利用平面与平面平行的性质时，关键是找出与已知两平面相交的平面，这样由面面平行可得到线面平行或线线平行.

4. 判定两平面平行的方法

① 根据定义采用反证法；② 判定定理法.

5. 理清线线、线面、面面平行的相互转化关系

线线平行 ⇌ 线面平行 ⇌ 面面平行

6. 熟练掌握平面与平面的平行关系，或者反过来由后者判定前者，这是一种最基本和最常见的题型，对于空间两平面的平行、垂直问题的常用解法、思路，要善于总结归纳. 注意掌握此类问题的通性通法、相关题型及常用解题思路方法. 另外要能够灵活地作出辅助线或辅助面来解决问题. 对此要注意：① 辅助线、辅助面要作得有理有据，不能随意作；② 辅助线、辅助面具有的性质，一定要以某一性质定理为依据，决不能主观臆断.

7. 关于高考

本考点在高考命题中可能在选择题、填空题中出现；或出现在立体几何解答题中.

③ 若 $\alpha \cap \beta = n, m \parallel n$，则 $m \parallel \alpha$ 且 $m \parallel \beta$

④ 若 $m \perp \alpha, m \perp \beta$，则 $\alpha \parallel \beta$.

其中真命题的个数是(　　)

A. 0　　B. 1　　C. 1　　D. 3

练习 3　如果两直线 $a \parallel b$，且 $a \parallel$ 平面 α，则 b 与 α 的位置关系(　　)

A. 相交　　B. $b \parallel \alpha$

C. $b \subset \alpha$　　D. $b \parallel \alpha$ 或 $b \subset \alpha$

练习 4　已知 a, b, c 是三条不重合的直线，α, β, γ 是三个不重合的平面

① $a \parallel c, b \parallel c \Rightarrow a \parallel b$

② $a \parallel \gamma, b \parallel \gamma \Rightarrow a \parallel b$

③ $a \parallel c, \alpha \parallel c \Rightarrow a \parallel \alpha$

④ $a \parallel \gamma, \alpha \parallel \gamma \Rightarrow a \parallel \alpha$

⑤ $a \not\subset \alpha, b \subset \alpha, a \parallel b \Rightarrow a \parallel \alpha$

其中正确的命题是(　　)

A. ①⑤　　B. ①②　　C. ②④　　D. ③⑤

练习 5　在下列条件下，能够判定平面 M 与平面 N 平行的是(　　)

A. M、N 都垂直于平面 Q

B. M 内不共线的三点到 N 的距离相等

C. l, m 是 M 内两条直线，且 $l \parallel N, m \parallel N$

D. l, m 是两条异面直线，且 $l \parallel M, m \parallel M, l \parallel N, m \parallel N$

练习 6　下列命题中. 正确的是(　　)

A. 平面 $\alpha \perp \beta$，直线 $m \parallel \alpha$，则 $m \perp \beta$

B. $l \perp$ 平面 α，平面 $\beta \parallel$ 直线 l，则 $\alpha \perp \beta$

C. 直线 l 是平面 α 的一条斜线，且 $l \subset \beta$，则 α 与 β 必不 垂直

D. 一个平面内的两条直线与另一个平面内的两条直线分别平行. 则这两个平面平行

高考样板题示例(二类)

如图 2-2 所示四个正方体图形中，A、B 为正方体的两个顶点，M、N、P 分别为其所在棱的中点，能得出 $AB \parallel$ 面 MNP 的图形的序号是________.(写出所有符合要求的图形序号)

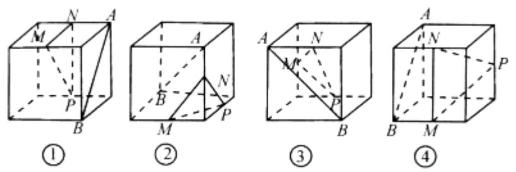

图 2-2

(04 年模拟 · 西城卷)

【答案】　①③

【解析】　① ∵ 面 $AB \parallel$ 面 MNP，∴ $AB \parallel$ 面 MNP.

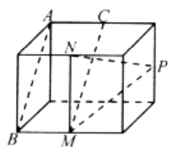

图 2-3

② 过 N 点作 AB 的平行线交底面正方形的中心 O，$NO \not\subset$ 面 MNP，∴ AB 与面 MNP 不平行.

③ 易知 $AB \parallel MP$，$\therefore AB \parallel$ 面 MNP.

④ 过 M 作 $MC \parallel AB$，$\because MC \not\subset$ 面 MNP，$\therefore AB$ 与面 MNP 不平行.

对应练习

练习1 在正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为 DD_1 的中点，则 BD_1 与平面 ACE 的位置关系是________.

练习2 已知 a、b 是异面直线，且 $a \subset$ 平面 α，$b \subset$ 平面 β，$a \parallel \beta$，$b \parallel \alpha$，则平面 α 与平面 β 的位置关系是________.

练习3 若平面 $\alpha \parallel$ 平面 β，点 A、$C \in \alpha$，点 B、$D \in \beta$，且 $AB = 48$，$CD = 25$，又 CD 在平面 β 内的射影长为 7，则 AB 和平面 β 所成角的度数是________.

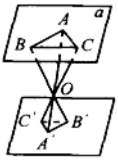

图 2-4

练习4 如图 2-4 所示，平面 $\alpha \parallel$ 平面 β，$\triangle ABC$、$\triangle A'B'C'$ 分别在 α、β 内，线段 AA'，BB'，CC' 共点于 O，O 在 α、β 之间，若 $AB = 2$，$AC = 1$，$\angle BAC = 60°$，$OA : OA' = 3 : 2$，则 $\triangle A'B'C'$ 的面积为________.

高考样板题示例(三类)

示例一

如图 2-5 所示，$ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 是正四棱柱，侧棱长为 1，底面边长为 2，E 是棱 BC 的中点.

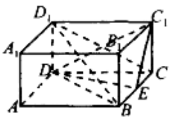

图 2-5

(1) 求三棱锥 $D_1—DBC$ 的体积；

(2) 证明 $BD_1 \parallel$ 平面 C_1DE；

(3) 求面 C_1DE 与面 CDE 所成二面角的正切值.

(03 年春季高考·北京卷)

【解析】 (1) $V_{D_1-DBC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = \frac{2}{3}$.

(2) 记 D_1C 与 DC_1 的交点为 O，连接 OE.

$\because O$ 是 CD_1 的中点，E 是 BC 的中点，

$\therefore EO \parallel BD_1$.

$\therefore BD_1 \not\subset$ 平面 C_1DE，$EO \subset$ 平面 C_1DE.

$\therefore BD_1 \parallel$ 平面 C_1DE.

(3) 过 C 作 $CH \perp DE$ 于 H，连接 C_1H，在正四棱柱 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，$C_1C \perp$ 平面 $ABCD$.

$\therefore C_1H \perp DE$，

$\therefore \angle C_1HC$ 是面 C_1DE 与面 CDE 所成二面角的平面角.

$\because DC = 2$，$CC_1 = 1$，$CE = 1$，

$\therefore CH = \dfrac{CD \cdot CE}{DE} = \dfrac{2 \times 1}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$，

$\tan \angle C_1HC = \dfrac{C_1C}{CH} = \dfrac{1}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

即面 C_1DE 与面 CDE 所成二面角的正切值为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

示例二

如图 2-6 所示，正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，M、N、E、F 分别是棱 A_1B_1、A_1D_1、B_1C_1、C_1D 的中点.

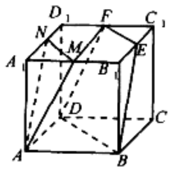

图 2-6

求证：平面 $AMN \parallel$ 平面 $EFDB$；

(03 年全国大联考)

【解析】 如图所示，(1) 连接 MF.

$\because M$、F 是 A_1B_1、C_1D_1 的中点，四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 为正方形，

$\therefore MF \underline{\parallel} A_1D_1$. 又 $A_1D_1 \underline{\parallel} AD$

$\therefore MF \underline{\parallel} AD$.

$\therefore$ 四边形 $AMFD$ 是平行四边形.

$\therefore AM \parallel DF$.

$\because DF \subset$ 平面 $EFDB$，$AM \not\subset$ 平面 $EFDB$.

$\therefore AM \parallel$ 平面 $EFDB$.

同理，$AN \parallel$ 平面 $EFDB$.

又 AM、$AN \subset$ 平面 AMN，$AM \cap AN = A$.

$\therefore$ 平面 $AMN \parallel$ 平面 $EFDB$.

证明面面平行，转化成证明线面平行，进而转化为证明线线平行.

对应练习

练习1 已知：$ABCD$ 是平行四边形，点 P 是平面 $ABCD$ 外一点，M 是 PC 的中点，在 DM 上取一点 G，过 G 和 AP 作平面交平面 BDM 于 GH，

求证：$AP \parallel GH$.

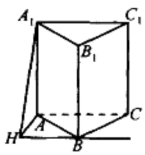

图 2-7

练习2 如图 2-7 所示，$A_1B_1C_1—ABC$ 是直三棱柱，过 A_1、B、C_1 的平面和平面 ABC 的交线为 l.

(1) 判定 l 与直线 A_1C_1 的位置关系，并给以证明.

(2) 当 $AA_1 = 1$，$AB = 4$，$BC = 3$，$\angle ABC = 90°$ 时. 求 A_1 到 l 的距离.

练习3 已知正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$，求证：平面 $ACB_1 \parallel$ 平面 A_1DC_1.

练习4 如图 2-8所示，已知平面 $\alpha \parallel$ 平面 $\beta \parallel$ 平面 γ，且 β 位于 α 与 γ 之间. 点 A、$D \in \alpha$，C、$F \in \gamma$，$AC \cap \beta = B$，$DF \cap \beta = E$.

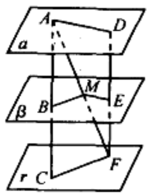

图 2-8

(1) 求证：$\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{DE}{EF}$；

(2) 设 AF 交 β 于 M，$AD \not\parallel CF$，α 与 β 间距离为 h'，α 与 γ 间距离为 h，当 $\dfrac{h'}{h}$ 的值是多少时，$S_{\triangle BEM}$ 的面积最大？

考点3　直线与平面、平面与平面的垂直

知识要点

1. 直线与平面的垂直

(1) 定义：如果一条直线和一个平面内的任何一条直线都垂直，那么就称这条直线和这个平面垂直.

(2) 判定定理：如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直，那么这条直线垂直于这个平面.

(3) 性质定理：垂直于同一个平面的两条直线平行.

2. 直线和平面的距离的定义：一条直线和一个平面平行，这条直线上任一点到这个平面的距离叫做这条直线和平面的距离.

3. 射影：自一点 P 向平面 α 引垂线，垂足叫点 P 在平面 α 内的正射影.

4. 两个平面垂直.

(1) 定义：两个平面相交成直二面角叫做两个平面互相垂直.

(2) 判定定理：如果一个平面经过另一个平面的垂线，那么这两个平面互相垂直.

(3) 性质定理：如果两个平面垂直，那么一个平面内垂直于它们交线的直线垂直于另一个平面.

能力要求

1. 本考点考试要求

(1) 理解直线和平面垂直的概念

(2) 掌握直线和平面垂直的判定定理和性质定理.

2. 证明线面垂直的方法

(1) 利用线面垂直的定义：

a 与 α 内任何直线垂直 $\Rightarrow a\perp\alpha$；

(2) 利用判定定理：

$$\left.\begin{array}{l} m、n\subset\alpha, m\cap n=A \\ l\perp m, l\perp n \end{array}\right\}\Rightarrow l\perp\alpha;$$

(3) 利用课本例题的结论：

$a\parallel\beta, a\perp\alpha\Rightarrow b\perp\alpha$；

(4) 利用面面平行的性质定理：

$\alpha\parallel\beta, a\perp\alpha\Rightarrow a\perp\beta$；

(5) 利用面面垂直的性质定理：

$\alpha\perp\beta, \alpha\cap\beta=l, a\subset\alpha, a\perp l\Rightarrow a\perp\beta$.

3. 证明面面垂直的方法

(1) 利用定义：判定两平面相交所成的二面角为直角.

高考样板题示例（一类）

示例一

如图3-1，定点 A 和 B 都在平面 α 内，定点 $P\notin\alpha$，$PB\perp\alpha$，C 是 α 内异于 A 和 B 的动点，且 $PC\perp AC$. 那么，动点 C 在平面 α 内的轨迹是(　　)

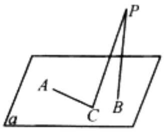

图 3-1

A. 一条线段，但要去掉两个点

B. 一个圆，但要去掉两个点

C. 一个椭圆，但要去掉两个点

D. 半圆，但要去掉两个点

（04年高考·天津卷）

【答案】 B

【解析】 如图3-1，由三垂线定理知 $BC\perp AC$，$\therefore C$ 点的轨迹是以 AB 为直径的圆，但 C 与 A、B 不重合，$\therefore C$ 在平面 α 内的轨迹是一个圆，但要去掉两个点.

示例二

设 m、n 是两条不同的直线，α、β、γ 是三个不同的平面，给出四个命题：

① 若 $m\perp\alpha$，$n\parallel\alpha$，则 $m\perp n$

② 若 $\alpha\parallel\beta$，$\beta\parallel\gamma$，$m\perp\alpha$，则 $m\perp\gamma$

③ 若 $m\parallel\alpha$，$n\parallel\alpha$，则 $m\parallel n$

④ 若 $\alpha\perp\gamma$，$\beta\perp\gamma$，则 $\alpha\parallel\beta$

其中正确命题的序号是(　　)

A. ①和②　　B. ②和③　　C. ③和④　　D. ①和④

（04年高考·北京卷）

【答案】 A

【解析】 由直线与平面垂直性质可知①②正确，③中 m 与 n 可能相交或异面，故③错，④中 α 与 β 可能相交，故④错.

示例三

关于直线 a、b、l 以及平面 M、N，下列命题中正确的是(　　)

A. 若 $a\parallel M$，$b\parallel M$，则 $a\parallel b$

B. 若 $a\parallel M$，$b\perp a$，$b\perp M$

C. 若 $a\subset M$，$b\subset M$，且 $l\perp a$，$l\perp b$，则 $l\perp M$

D. 若 $a\perp M$，$a\parallel N$，则 $M\perp N$

（03年春季高考·上海卷）

【答案】 D

【解析】 A选项中，若 $a\parallel M$，$b\parallel M$，则有 $a\parallel b$ 或 a 与 b 相交或 a 与 b 异面. B选项中，b 可能在 M 内，可能与 M 平行，b 可能与 M 相交. C选项中须增加 a 与 b 相交，则 $l\perp M$. D选项证明如

(2) 利用判定定理：一面经过另一面的垂线.

4. 面面垂直的性质定理给出了作面的垂线的一种方法，在解题时要注意灵活使用. 其思路是：先确定面面垂直，后在一面内作交线的垂线，则得面的垂线. 这一思路在求角或距离时应用较广泛，在垂直转化中也可以作一种思路.

5. 垂直转化

线线垂直、线面垂直、面面垂直之间可以任意转化. 其方向是：

线线垂直 $\Longrightarrow$ 线面垂直 $\Longrightarrow$ 面面垂直

每一垂直的判定就是从某一垂直开始转向另一垂直，最终达到目的. 由引转化可以看出：线面垂直是核心，而难点却是线线垂直，至于面面垂直，在很大程度上是为"线面垂直"服务的，即是最方便、快捷得到线面垂直，进而刻画相关空间角或距离的途径.

6. 立体几何中的重点是线面垂直：重要的射影概念(方法)、点面、线面、面面距离，斜线与平面所成的角，二面角平面角的刻画等重点内容无不与线面垂直有直接关系. 熟练证明，灵活运用线面垂直关系，是提高解决空间问题的一大关键.

7. 平行与垂直在一定条件下也可以相互转化. 如：

① 如果两条平行直线中的一条直线垂直于一个平面，那么另一条也垂直于这个平面.

即 $\left.\begin{matrix} a \parallel b \\ a \perp \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow b \perp \alpha$

② 垂直于同一条直线的两个平面平行.

即 $\left.\begin{matrix} a \perp \alpha \\ a \perp \beta \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha \parallel \beta$

③ 垂直于同一个平面的两条直线平行.

即 $\left.\begin{matrix} a \perp \alpha \\ b \perp \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \parallel b$

8. 关于高考

本考点是高考中必考内容，题目涉及填空、选择以及解答，平行和垂直两大关系是立体几何的核心，是高考的重点考察对象.

下：$\because a \parallel N$，过 a 作平面 α 与 N 相交于 c，则 $c \parallel a$，$\therefore c \perp M$ 故 $M \perp N$ $\therefore$ 选 D.

对应练习

练习 1 室内有一根直尺，无论怎样放置，在地面上总有这样的直线，它与直尺所在的直线(　　)

A. 异面　　B. 相交　　C. 平行　　D. 垂直

练习 2 如果平面 $\alpha \perp$ 平面 β，且交线为 l，$M \in \alpha$，，$M \in b$，则 $l \perp b$ 是 $b \perp \beta$ 的(　　)

A. 充分非必要条件　　B. 必要非充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分又不必要条件

练习 3 已知平面 α、β、γ，直线 l、m 满足：$l \perp m$，$\alpha \perp \gamma$，$\gamma \cap \beta = l$，那么在：①$\beta \perp \gamma$；②$l \perp \alpha$；③$m \perp \beta$，可以由上述已知条件推出的只有(　　)

A. ① 和 ②　B. ② 和 ③　C. ① 和 ③　D. ③

练习 4 已知平面 α 与平面 β 相交，直线 $m \perp \alpha$，则(　　)

A. β 内必存在直线与 m 平行，且存在直线与 m 垂直

B. β 内不一定存在直线与 m 平行，不一定存在直线与 m 垂直

C. β 内不一定存在直线与 m 平行，但必存在直线与 m 垂直

D. β 内必存在直线与 m 平行，不一定存在直线与 m 垂直

练习 5 已知直线 l、m，平面 α、β. 且 $l \perp \alpha$，$m \subset \beta$，给出下列四个命题：

① 若 $\alpha \parallel \beta$，则 $l \perp m$；② 若 $l \perp m$，则 $\alpha \parallel \beta$；③ 若 $\alpha \perp \beta$，则 $l \parallel m$；④ 若 $l \parallel m$，则 $\alpha \perp \beta$.

其中正确命题的个数是(　　)

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

练习 6 已知三条直线 m、n、l，三个平面 α、β、γ. 下面四个命题中正确的是(　　)

A. $\left.\begin{matrix} \alpha \perp \beta \\ \beta \perp \gamma \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha \parallel \beta$　　B. $\left.\begin{matrix} m \parallel \beta \\ l \perp m \end{matrix}\right\} \Rightarrow l \perp \beta$

C. $\left.\begin{matrix} m \parallel \gamma \\ n \parallel \gamma \end{matrix}\right\} \Rightarrow m \parallel n$　　D. $\left.\begin{matrix} m \perp \gamma \\ n \perp \gamma \end{matrix}\right\} \Rightarrow m \parallel n$

高考样板题示例(二类)

示例一

如图 3-2，在直四棱柱 $A_1B_1C_1D_1 - ABCD$ 中，当底面四边形 $ABCD$ 满足条件______时，有 $A_1C \perp B_1D_1$(注：填上你认为正确的一种条件即可，不必考虑所有可能的情形).

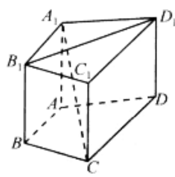

图 3-2

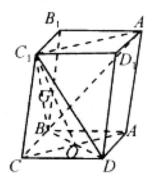

图 3-3

(04 年高考 · 全国卷)

【答案】 $AC \perp BD$

【解析】 $AC \perp BD$（任何能推导出 $AC \perp BD$ 的其它条件，如 $ABCD$ 为正方形、菱形等）如图 3-3.

示例二

已知 a、b 为不垂直的异面直线，α 是一个平面，则 a、b 在 α 上的射影有可能是________.

① 两条平行直线

② 两条互相垂直的直线

③ 同一条直线

④ 一条直线及其外一点

在上面结论中，正确结论的编号是________（写出所有正确结论的编号）.

（04 年高考·全国卷 Ⅰ）

【答案】 ①②④

【解析】 如图：由图可知①②④正确，而对于③两条射影若是同一条直线，则两直线必共面这与 a、b 异面矛盾，∴③错，故正确答案：①②④.

对应练习

练习 1　如图 3-4，已知矩形 $ABCD$ 中，$AB = 3$，$BC = a$，若 $PA \perp$ 平面 AC，在 BC 边上取点 E，使 $PE \perp DE$，则满足条件的 E 点有两个时，a 的取值范围是________.

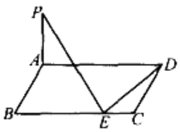

图 3-4

练习 2　在正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，O 是底面 $ABCD$ 的中心，E 是 DD_1 的中点，P 是棱 A_1B_1 上的一动点，则 OP 与 AE 的关系是________.

练习 3　正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，M、N 分别是 A_1A、AB 上的点，若 $\angle NMC_1 = 90°$，那么 $\angle NMB_1 =$ ________.

练习 4　正三角形 ABC 的边长为 a，$AD \perp BD$，D 为垂足. 沿 AD 将 $\triangle ABC$ 折起，使 $\angle BDC = 90°$，则折起后点 B 到直线 AC 的距离等于________.

高考样板题示例（三类）

示例一

如图 3-5，已知平行六面体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是菱形，且 $\angle C_1CB = \angle C_1CD = \angle BCD = 60°$.

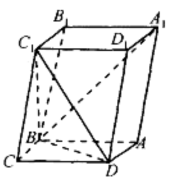

图 3-5

(1) 证明：$C_1C \perp BD$；

(2) 假定 $CD = 2$，$CC_1 = 5$，记面 C_1BD 为 α，面 CBD 为 β，求二面角 α-BD-β 的平面角的余弦值；

(3) 当 $\dfrac{CD}{CC_1}$ 的值为多少时，能使 $A_1C \perp$ 平面 C_1BD？请给出证明.

（00 年高考·天津卷）

【解析】 (1) 连接 A_1C_1、AC，AC 和 BD 交于 O，连接 C_1O.

∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴ $AC \perp BD$，$BC = CD$，

又 ∵ $\angle BCC_1 = \angle DCC_1$，$C_1C = C_1C$，

∴ $\triangle C_1BC \cong \triangle C_1DC$，∴ $C_1B = C_1D$，

∵ $DO = OB$，∴ $C_1O \perp BD$，

但 $AC \perp BD$，$AC \cap C_1O = O$，

∴ $BD \perp$ 平面 AC_1. 又 $C_1C \subset$ 面 AC_1，

∴ $C_1C \perp BD$.

(2) 由(1)知 $AC \perp BD$，$C_1C \perp BD$，

∴ $\angle C_1OC$ 是二面角 α-BD-β 的平面角.

在 $\triangle C_1BC$ 中，$BC = 2$，$C_1C = \dfrac{3}{2}$，$\angle BCC_1 = 60°$，

∴ $C_1B^2 = 2^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 - 2\times2\times\dfrac{3}{2}\times\cos60° = \dfrac{13}{4}$.

∵ $\angle OCB = 30°$，∴ $OB = \dfrac{1}{2}BC = 1$.

∴ $C_1O^2 = C_1B^2 - OB^2 = \dfrac{13}{4} - 1 = \dfrac{9}{4}$，

∴ $C_1O = \dfrac{3}{2}$. 即 $C_1O = C_1C$.

作 $C_1H \perp OC$，垂足为 H.

∴ 点 H 是 OC 的中点，且 $OH = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $\cos\angle C_1OC = \dfrac{OH}{C_1O} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

(3) 当 $\dfrac{CD}{CC_1} = 1$ 时，能使 $A_1C \perp$ 平面 C_1BD.

证明一：∵ $\dfrac{CD}{CC_1} = 1$，

∴ $BC = CD = C_1C$，又 $\angle BCD = \angle C_1CB = \angle C_1CD$，由此可推得 $BD = C_1B = C_1D$.

∴ 三棱锥 $C—C_1BD$ 是正三棱锥.

设 A_1C 与 C_1O 相交于 G.

∵ $A_1C_1 \parallel AC$ 且 $A_1C_1 : OC = 2:1$，

∴ $C_1G : GO = 2:1$.

又 C_1O 是正三角形 C_1BD 的边 BD 上的高和中线，

∴ 点 G 是正三角形 C_1BD 的中心，

∴ $CG \perp$ 平面 C_1BD. 即 $A_1C \perp$ 平面 C_1BD.

证明二：由(1)知 $BD \perp$ 平面 AC_1，

∴ $A_1C \subset$ 平面 AC_1，

∴ $BD \perp A_1C$.

当 $\dfrac{CD}{CC_1} = 1$ 时，平行六面体的六个面是全等的菱形，同 $BD \perp A_1C$ 的证法，可得 $BC_1 \perp A_1C$.

又 $BD \cap BC_1 = B$，∴ $A_1C \perp$ 平面 C_1BD.

证明线线垂直，转化为一直线垂直于经过另一直线的平面. 第 3 问的解法用的逆向思维，即把 $A_1C \perp$ 平面 C_1BD 看成条件，得到 $\dfrac{CD}{CC_1}$ 的值，然后再给出证明.

示例二

如图 3-6，在正三棱锥 $A—BCD$ 中，$\angle BAC = 30°$，AB

$=a$，平行于 AD、BC 的截面 $EFGH$ 分别与 AB、BD、DC、CA 交于 E、F、G、H 四点.

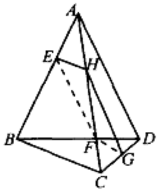
图 3-6

(1) 试判断四边形的形状，并说明判断理由；

(2) 设 P 点是棱 AD 上的点，当 AP 为何值时，平面 $PBC\perp$ 平面 $EFGH$？请说明理由.

(04 年模拟 · 黄冈卷)

【解析】 (1) 四边形 $EFGH$ 是一矩形，下面给出证明：

$\because AD\parallel$ 面 $EFGH$，面 $ACD\cap$ 面 $EFGH=HG$，$AD\subset$ 面 ACD

$\therefore AD\parallel HG$，同理 $FE\parallel AD$，$\therefore HG\parallel EF$，同理 $EH\parallel FG$

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是一个平行四边形.

又三棱锥 $A—BCD$ 是一个正三棱锥，$\therefore A$ 点在底面 BCD 上的射影 O 点必是 $\triangle BCD$ 的中心，

$\therefore OD\perp BC$，$AD\perp BC$，$\therefore HG\perp HE$，

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是一个矩形.

(2) 作 $CP\perp AD$ 于 P，连 BP，$\because AD\perp BC$，

$\therefore AD\perp$ 面 BCP，$\because HG\parallel AD$，

$HG\perp$ 面 BDP，$HG\subset$ 面 $EFGH$，

$\therefore$ 面 $BCP\perp$ 面 $EFGH$

在 $Rt\triangle APC$ 中，$\angle CAP=30°$，$AC=a$，

$\therefore AP=\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

示例三

在直角梯形 $ABCD$ 中，如图 3-7，$\angle D=\angle BAD=90°$，$AD=\frac{1}{2}AB=a$，将 $\triangle ADC$ 沿 AC 折起，使 D 到 D'，记面 ACD' 为 α，面 ABC 为 β，面 BCD' 为 γ.

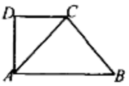
图 3-7

(1) 若二面角 α-AC-β 为直二面角，求二面角 β-BC-γ 的大小；

(2) 若二面角 α-AB-β 为 60°，求三棱锥 D'-ABC 的体积.

(02 年春季高考 · 京皖卷)

【解析】 (1) 在直角梯形 $ABCD$ 中，由已知 $\triangle DAC$ 为等腰直角三角形，如图 3-8.

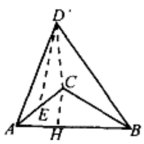
图 3-8

$\therefore AC=\sqrt{2}a$，$\angle CAB=45°$.

过 C 作 $CH\perp AB$，由 $AB=2a$，可推得 $AC=BC=\sqrt{2}a$. $\therefore AC\perp BC$.

取 AC 的中点 E，连接 $D'E$，则 $D'E\perp AC$，

又 $\because$ 二面角 α-AC-β 为直二面角，$\therefore D'E\perp\beta$

又 $\because BC\subset$ 平面 β，$\therefore BC\perp D'E$.

$\therefore BC\perp\alpha$.

而 $D'C\subset\alpha$，$\therefore BC\perp D'C$.

$\therefore\angle D'CA$ 为二面角 β-BC-γ 的平面角.

由于 $\angle D'CA=45°$，$\therefore$ 二面角 βBC-γ 为 45°.

(2) 取 AC 的中点 E，连结 $D'E$，再过 D. 作 $D'O\perp\beta$，垂足为 O，连结 OE，$\because AC\perp D'E$，$\therefore AC\perp OE$

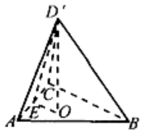
图 3-9

$\therefore D'EO$ 为二面角 α-AC-β 的平面角，如图 3-9

$\therefore\angle D'EO=60°$. 在 $Rt\triangle D'OE$ 中，

$D'E=\frac{1}{2}AC=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，$D'O=\frac{\sqrt{2}}{2}a\cdot\sin60°=\frac{\sqrt{6}}{4}a$.

$\therefore V_{D'-ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot D'O=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}AC\cdot BC\cdot D'O=\frac{1}{6}\times\sqrt{2}a\times\sqrt{2}a\times\frac{\sqrt{6}}{4}a=\frac{\sqrt{6}}{12}a^3$.

对应练习

练习 1 已知新三棱柱 $ABC—A_1B_1C_1$ 的侧面 A_1ACC_1 与底面 ABC 垂直，$\angle ABC=90°$，$BC=2$，$AC=2\sqrt{3}$，且 $AA1_{\perp}A_1C$，$AA_1=A_1C$.

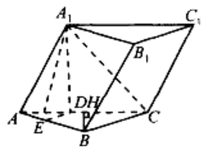
图 3-10

(1) 求侧棱 A_1A 与底面 ABC 所成角的大小；

(2) 求侧面 A_1ABB_1 与底面 ABC 所成二面角的大小；

(3) 求侧棱 B_1B 和侧面 A_1ACC_1 的距离.

练习 2 如图 3-11 已知正四棱柱 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$，$AB=1$，$AA_1=2$，点 E 为 CC_1 中点，点 F 为 BD_1 中点.

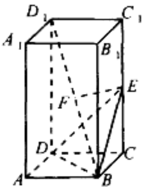
图 3-11

(1) 证明 EF 为 BD_1 与 CC_1 的公垂线；

(2) 求点 D_1 到面 BDE 的距离.

练习 3 如图 3-12 所示，已知 $PA\perp$ 矩形 $ABCD$ 所在平面，M、N 分别是 AB、PC 的中点.

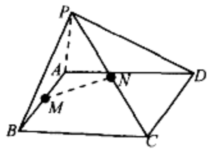
图 3-12

(1) 求证：$MN\parallel$ 平面 PAD；

(2) 求证：$MN\perp CD$；

(3) 若 $\angle PDA=45°$，求证：$MN\perp$ 平面 PCD.

练习 4 如图 3-13 正方形 $ABCD$、$ABEF$ 的边长都是 1，而且平面 $ABCD$、$ABEF$ 互相垂直，点 M 在 AC 上移动，点 N 在 BF 上移动，若 $CM=BN=a(o<a<\sqrt{2})$.

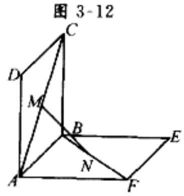
图 3-13

(1) 求 MN 的长；

(2) 当 a 为何值时，MN 的长最小；

(3) 当 MN 长最小时，求面 MNA 与面 MNB 所成的二面角 α 的大小.

考点 4　三垂线定理及其逆定理

知识要点

1. 斜线在平面上的射影

(1) 掌握点在平面上的射影、斜线在平面上的射影的概念，是确定斜线和平面所成角的基础，射影的概念是建立在线面垂直的基础上的，所以只有找到了过斜线上除斜足以外任一点作已知平面的垂线的垂足，才能确定出斜线和平面所成的角.

(2) 斜线和平面所成的角：平面的一条斜线和它在平面上的射影所成的锐角，叫做这条直线和这个平面所成的角.

(3) 直线在平面内或直线和平面平行，说直线和平面成 $0°$ 角，直线和平面垂直，说直线和平面成 $90°$. 可见，直线和平面所成的角的范围为 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$.

(4) 最小角定理：平面的斜线和平面所成的角是它和平面内经过斜足的直线所成的一切角中最小的角.

2. 三垂线定理

三垂线定理：在平面内的一条直线，如果和这个平面的一条斜线的射影垂直，那么它和这条斜线垂直.

三垂线定理的逆定理：在平面内的一条直线，如果和这个平面的一条斜线垂直，那么它也和这条斜线的射影垂直.

能力要求

1. 本考点考试要求：

掌握三垂线定理及其逆定理

2. 求斜线与平面所成角的思路类似于求异面直线所成的角："一作、二证、三计算". 在"作角"时依定义关键是作射影，由射影定义知关键作过斜线上一点到面的垂线. 在解题时注意挖掘题设中两个

高考样板题示例(一类)

示例一

如图 4-1，正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，保持 $AP\perp BD_1$，则动点 P 的轨迹是(　　)

A. 线段 B_1C

B. 线段 BC_1

C. BB_1 中点与 CC_1 中点连成的线段

D. BC 中点与 B_1C_1 中点连成的线段

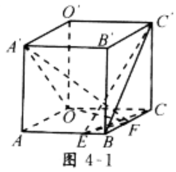

图 4-1

(04 年模拟 · 郑州卷)

【答案】 A

【解析】 本题转化为求 AP 运动所形成的面与 BD_1 垂直. 易证 $BD_1\perp$ 面 AB_1C. ∴ 动点 P 的轨迹是线段 B_1C.

示例二

在图 4-2 的四个正方体中，能得出 $AB\perp CD$ 的是(　　)

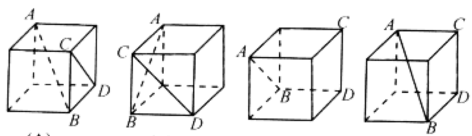

图 4-2

(02 年高考 · 北京卷)

【答案】 A

【解析】 ∵CD 在平面 $ABCD$ 内，AB 是平面 BCD 的斜线，由三垂线定理可得 A.

对应练习

练习 1　两条异面直线在同一平面内的射影是(　　)

A. 两相交直线

B. 两平行直线

C. 一条直线和不在这条直线上的一个点

D. 以上位置都有可能

练习 2　若直线 l 与平面 α 成角为 $\frac{\pi}{3}$，直线 a 在平面 α 内，且与直线 l 异面，则直线 l 与直线 a 所成的角的取值范围是(　　)

A. $\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]$　B. $\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$　C. $\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$　D. $\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$

练习 3　如果三棱锥 $S—ABC$ 的底面是不等边三角形，侧面与底面所成的二面角都相等，且点 S 在底面上的射影 O 在 $\triangle ABC$ 内部，那么 O 是 $\triangle ABC$ 的(　　)

A. 重心　　B. 垂心　　C. 外心　　D. 内心