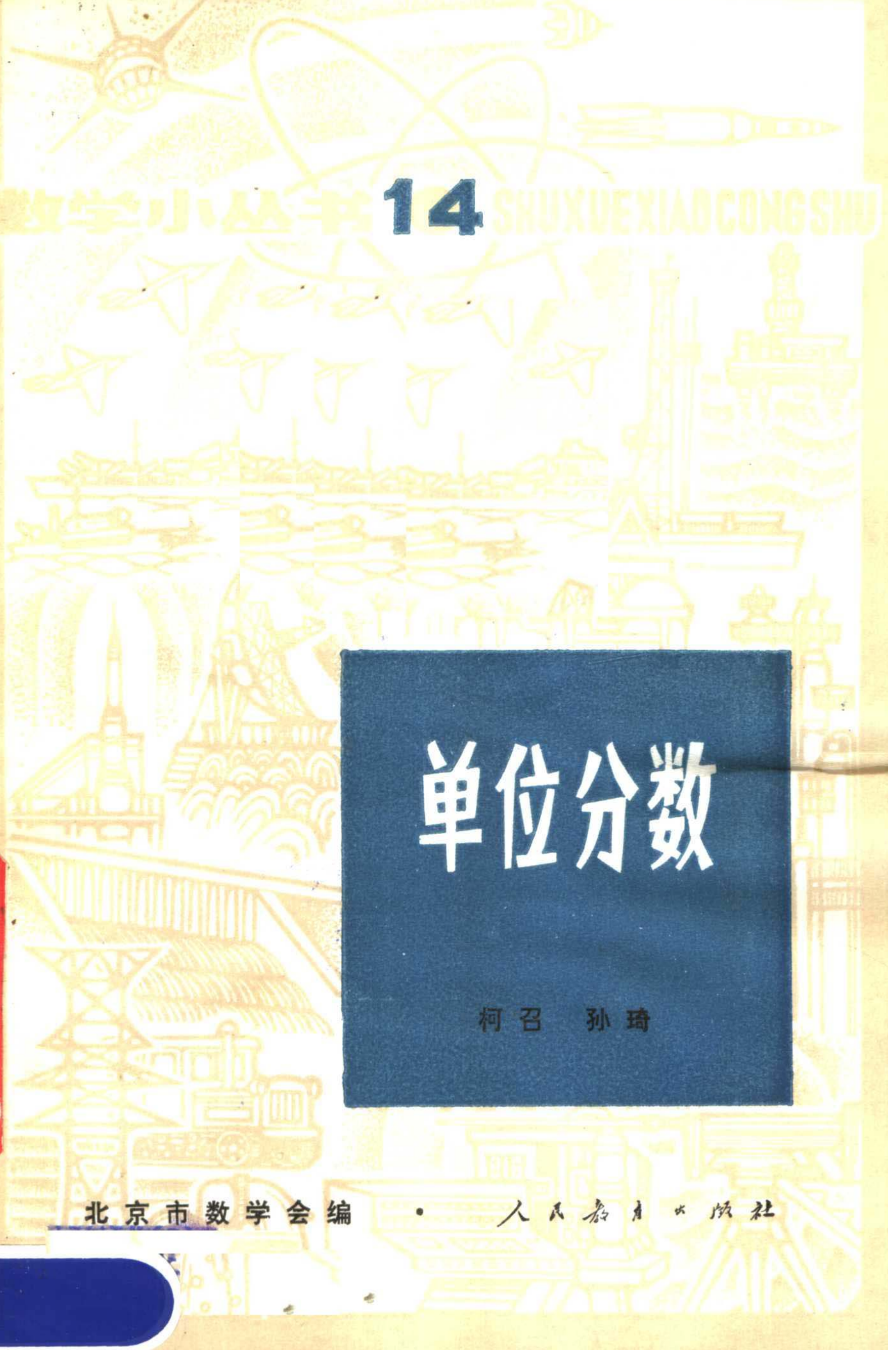

数学小丛书 14 SHUXUEXIAOCONGSHU

单位分数

柯召　孙琦

北京市数学会编 · 人民教育出版社

14

单位分数

数 学 小 丛 书

(14)

单 位 分 数

柯召 孙琦

北 京 市 数 学 会 编

人 民 教 育 出 版 社

1981 年 · 北京

内容提要

单位分数是分子为1、分母为自然数的分数。用单位分数表示分数，具有许多有趣的性质，由此产生一些有趣的问题，其中有的是至今尚未解决的数论问题和猜想。本书从有关单位分数的一个古老的问题谈起，讨论了单位分数的一些重要的性质和应用，最后介绍了一种有趣的无穷级数及其求和的方法。

数学小丛书

单 位 分 数

柯召 孙琦

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 1.5 字数 29,000

1981年7月第1版 1981年1月第1次印刷

印数 1—31,000

书号 7012·0442 定价 0.14 元

编者的话

数学课外读物对于帮助学生学好数学，扩大他们的数学知识领域，是很有好处的．近年来，越来越多的中学学生和教师，都迫切希望出版更多的适合中学生阅读的通俗数学读物．我们约请一些数学工作者，编了这套“数学小丛书”，陆续分册出版，来适应这个要求．

这套书打算介绍一些课外的数学知识，以扩大学生的知识领域，加深对数学基础知识的掌握，引导学生独立思考，理论联系实际．

这是我们的初步想法和尝试．热切地希望数学工作者和读者对我们的工作提出宝贵的意见和建议，更希望数学工作者为中学生写出更多更好的数学课外读物．

北京市数学会

1962年4月

前　言

1964年，北京数学会约我们写一本小册子，作为中学生课外阅读的《数学小丛书》中的一本，为此，我们编写了《单位分数》一书。后来，这套小丛书停出了，这本小册子也就未能出版。由于原稿失落，现在这本小册子是重写的。

本书的内容，仅仅用到初等数论中整除、同余式、算术基本定理等简单概念和结果。中学生阅读时，不会有多少困难。实际上，书中绝大多数内容可以说是属于算术的范围，我们认为，这是些较为有趣的问题，对于扩大读者的数学知识，以及提高解决问题的技巧和能力，都会有一定的好处。

如有不妥之处，请读者批评指正！

作　者

1980年3月于成都

目　次

一、什么是单位分数

我们把分子是1、分母是自然数的分数叫做**单位分数**，记成$\frac{1}{n}$.

人类对分数的认识就是从单位分数开始的. 大约在公元前2000年，古代埃及人就是把分子大于1的正分数表示成单位分数的和，例如$\frac{5}{6}$写成了$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$的形式. 所谓林特[1)]（*Rhind*）抄本，就记载了当时埃及人把一些分数写成单位分数的和，其中包括所有$\frac{2}{b}$（b取5到101之间的所有奇数）被表示成不同的单位分数和的表，每一个和中的单位分数都按它们的大小递减排列.

用单位分数表示分数，有许多有趣的性质，由此产生出一些有趣的问题.

尽管单位分数的概念以及把分数表示成不同的单位分数之和的问题，在古代已经提出了，但是直到今天，有关单位分数的问题，仍然引起人们的兴趣，因为它所产生的问题，有的已成为至今尚未解决的一些数论问题和猜想. 这些问题和猜想，看来并不简单，它们难住了当代许多数学家.

1） *Rhind*是十九世纪苏格兰的一位古物收集家，1855年，他买到了这种抄本，后来，人们就叫林特抄本.

二、一个古老的传说

流传着一个阿拉伯古老的传说：

一个老人有 11 匹马，他打算把$\frac{1}{2}$分给大儿子，$\frac{1}{4}$分给二儿子，$\frac{1}{6}$分给小儿子，应该怎样分呢？

11 是一个素数，它不能被 2 、4 或 6 整除，总不能把一匹马切开来分吧！一个聪明人提出这样的解决办法，"借用"一匹马，共有 12 匹，而12能被 2 、4 或 6 整除，于是大儿子分得 6 匹，二儿子分得 3 匹，小儿子分得 2 匹，而$6+3+2=11$，"借到"的一匹马即可"还去"，问题得到解决。当然，这只是一个数学游戏，不能从严格的数学意义去理解它。

我们可以把它理解为一个带有条件的把分数表示成为不同的单位分数和的问题，解决办法可从下面的关系式得出：

$$\frac{11}{12}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6},\quad 2|12,\ 4|12,\ 6|12,$$

这里，记号 $b|a$ 表示整数 $b\neq o$ 整除整数 a。

现在，我们把这个传说略为改动一下：

一个老人有若干匹马，记为 n，他把马分给三个儿子，大儿子得 x 匹，二儿子得 y 匹，小儿子得 z 匹，并且满足 $x|n+1$，$y|n+1$，$z|n+1$，$x>y>z$，问老人的马的匹数，即 n，有多少种可能？

这容易化成一个单位分数的问题，设

$$n+1=xa,\ n+1=yb,\ n+1=zc,$$

这里 a,b,c 表示整数（本书常用字母 a、b、c、……表示整数）。故由 $x+y+z=n$ 得

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{n}{n+1},a|n+1,b|n+1,c|n+1,a<b<c. \quad (1)$$

现在，就来给出（1）中的 n 能够取多少个自然数值。

很明显，因为 $\frac{n}{n+1}<1$，故 $a\geqslant2$. 我们来证明不可能有 $a>2$. 在证明之前，先介绍初等数论中一个重要定理，即算术基本定理：

设正整数 $n>1$，如果不计素因数的次序，则只有一种方法把 n 分解成素因数的连乘积。

由此定理可知，如果 $n>1$，把 n 的相同的素因数合并成幂数形状，则 n 只能分解成一种形式：

$$n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_s^{a_s},\quad s\geqslant1,$$

这里 $p_1,\cdots,p_s$ 是不同的素数，$p_1<\cdots<p_s$，$a_1,\cdots,a_s$ 都是正整数，我们把 $n=p_1^{a_1}\cdots p_s^{a_s}$ 叫作 n 的标准分解式。例如 1650 的标准分解式为

$$1650=2\times3\times5^2\times11.$$

如果（1）中 $a>2$，设 $M=abc$，分三种情形来讨论：

1） 如果 $M=P_1^{a_1}\cdots p_s^{a_s}$ 是M的标准分解式，p_1，$\cdots$，p_s 是奇素数，当 $s\geqslant2$ 时，则由 $p_1p_2\mid M=abc$，$a|n+1$，$b|n+1$，$c|n+1$，总有 $p_1p_2\mid n+1$，而 $p_1\geqslant3$，$p_2\geqslant5$，故 $n+1\geqslant p_1p_2\geqslant15$；当 $s=1$ 时，可设 $a=p_1^{e_1},b=p_1^{e_2},c=p_1^{e_3}$，由 $2<a<b<c$，故 $e_3>e_2>e_1\geqslant1$ 是正整数，$e_3\geqslant3$，故 $p_1^3|c$，而 $c|n+1$，于是 $n+1\geqslant p_1^3\geqslant27$。

2） 如果 $M=2^a$，类似 1） 中 $s=1$ 的讨论知 $2^4|c$，故有

$n+1\geqslant 16$。

3） 如果 $M=2^{\alpha}p_1^{\alpha_1}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 是M的标准分解式，当 $s\geqslant 2$ 时，则由 $2p_1p_2\mid M=abc$, $a\mid n+1$, $b\mid n+1$, $c\mid n+1$，总有 $2p_1p_2\mid n+1$，而 $2p_1p_2\geqslant 2\times 3\times 5=30$，于是$n+1\geqslant 2p_1p_2\geqslant 30$；当 $s=1$ 时，由 $2<a<b<c$, $a\mid n+1$, $b\mid n+1$, $c\mid n+1$，总有 $2p_1^2\mid n+1$ 或 $2^2p_1\mid n+1$，故有 $n+1\geqslant 12$。

总之，归纳以上三种情形，我们得出 $n+1\geqslant 12$，由(1)得

$$\frac{11}{12}\leqslant 1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leqslant\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{47}{60},$$

这是矛盾的。

因此，$a=2$，代入(1)得

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1},\ b\mid n+1,\ c\mid n+1,\ 2<b<c. \qquad (2)$$

如果 $b\geqslant 5$，当 $n+1\geqslant 8$ 时，由(2)得

$$\frac{3}{8}=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\leqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leqslant\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{11}{30},$$

这是矛盾的。故 $n+1<8$，由此和 $5\leqslant b<c\mid n+1$，得出

$$8>n+1\geqslant c\geqslant b+1\geqslant 6,$$

故有 $n+1=6, b=5$，但$5\nmid n+1=6$（符号$\nmid$表示不整除）或 $n+1=7$，$b=5$ 或 $n+1=7$，$b=6$，都与 $b\mid n+1$ 矛盾。故有 $b=3$ 或 $b=4$。

当 $b=3$ 时，由(2)得

$$\frac{1}{c}=\frac{1}{6}-\frac{1}{n+1},\ c\mid n+1,\ c>3. \qquad (3)$$

再由(3)可得

$$\frac{1}{c}=\frac{1}{6}-\frac{1}{n+1}\geqslant\frac{1}{6}-\frac{1}{c}$$

和

$$\frac{1}{6}-\frac{1}{c}=\frac{1}{n+1}>0,$$

故

$$7\leqslant c\leqslant 12.$$

$c=7$，代入（3）得出

$$n=41,\ a=2,\ b=3,\ c=7;$$

$c=8$，代入（3）得出

$$n=23,\ a=2,\ b=3,\ c=8;$$

$c=9$，代入（3）得

$$n=17,\ a=2,\ b=3,\ c=9;$$

$c=10$，11，无满足条件的解；

$c=12$，代入（3）得出

$$n=11,\ a=2,\ b=3,\ c=12.$$

当 $b=4$ 时，由（2）得

$$\frac{1}{c}=\frac{1}{4}-\frac{1}{n+1},\ c\mid n+1,\ c>4; \qquad (4)$$

再由（4）得

$$\frac{1}{c}=\frac{1}{4}-\frac{1}{n+1}\geqslant\frac{1}{4}-\frac{1}{c},$$

故

$$5\leqslant c\leqslant 8.$$

$c=5$，代入（4）得

$$n=19,\ a=2,\ b=4,\ c=5;$$

$c=6$，代入（4）得

$$n=11,\ a=2,\ b=4,\ c=6;$$

$c=7$，无解；

$c=8$，代入（4）得

$$n=7,\ a=2,\ b=4,\ c=8.$$

总起来，我们证明了这个问题中马的匹数共有六种可能，而分法共有七种：

	n	a	b	c
1	7	2	4	8
2	11	2	4	6
3	11	2	3	12
4	17	2	3	9
5	19	2	4	5
6	23	2	3	8
7	41	2	3	7

三、镶地板和铺路

大家一定看见过有些建筑物的地板是用各种正多边形的砖板镶成的；有的城市的街道是用各种正多边形的石板铺成的；……。

用这些正多边形的建筑材料来铺满地面，可以有哪些形式呢？这个问题和单位分数有关。

下面，我们把这些建筑材料统称为砖。如果要求把这些正多边形的砖铺满地面，就必须使拼凑在每一顶点处的几块

砖的各角和为2π。

众所周知，一个正$n(n\geqslant3)$边形各内角的和是$(n-2)\pi$，所以每一个内角为

$$\alpha_n=\frac{n-2}{n}\pi,$$

这里$\alpha_n<\pi$。

设在某一点有k块砖拼凑在一起，它们的边数分别为$x_1,x_2,\cdots,x_k$，则有

$$\alpha_{x_1}+\cdots+\alpha_{x_k}=2\pi,$$

即得

$$\frac{x_1-2}{x_1}\pi+\cdots+\frac{x_k-2}{x_k}\pi=2\pi,$$

故有

$$\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_k}=\frac{k-2}{2},\quad x_j\geqslant3(j=1,\cdots,k).\qquad(1)$$

由(1)可得$k\geqslant3$，以及

$$\frac{k-2}{2}=\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_k}\leqslant\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3}=\frac{k}{3},$$

故有

$$k\leqslant6.$$

这就证明了铺地时，在每一顶点周围砖的块数至少三块，最多六块。

现在就来分别讨论。

$k=3$的情形：

由(1)得

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{1}{2},\quad x_j\geqslant3(j=1,2,3).\qquad(2)$$

设(2)的一组解为(x_1,x_2,x_3)，首先来求出(2)的全部整数解。

1. 设$x_1=x_2=x_3$，由(2)得解

$$(x_1,x_2,x_3)=(6,6,6).$$

这组解给出的正多边形可以铺满地面，拼法如图1。

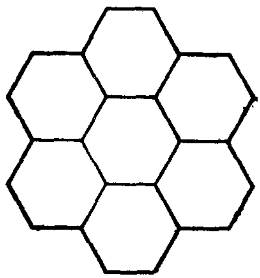

图 1

2. 设x_1,x_2,x_3中恰有两个相等，不失一般性，可设$x_1=x_2\neq x_3$，(2)化为

$$\frac{2}{x_1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{x_3},$$

即

$$x_3=2+\frac{8}{x_1-4},$$

故得$x_1-4=\pm1$，$x_1-4=\pm2$，$x_1-4=\pm4$，$x_1-4=\pm8$，易知 $x_1-4=-1$，-2，-4，-8时，都不是(2)的解。而$x_1-4=2$时，$x_1=x_2=x_3=6$，由此仅得出

$$(x_1,x_2,x_3)=(5,5,10),\ (8,8,4),\ (12,12,3).$$

于是x_1,x_2,x_3中恰有两个相等时，(2)的全部解为

$$(5,5,10),\ (5,10,5),\ (10,5,5),$$

(8,8,4)， (8,4,8)， (4,8,8)，

(12,12,3)，(12,3,12)，(3,12,12)。

请读者注意，并非(2)的每一组解给出的正多边形都能铺满地面，例如解(5,5,10)就不能铺满地面．这是因为，对于一个固定的正五边形，它的每一个顶点是由它本身和另一个正五边形、以及正十边形拼成，因此围绕此固定的正五边形的正五边形和正十边形分别没有两个相连，故知这些正五边形的总数和正十边形的总数是相等的，然而被包围的固定正五边形的边数是奇数，这是矛盾的。

而对于解(8,8,4)，(8,4,8)，(4,8,8)和解(12,12,3)，(12,3,12)，(3,12,12)给出的正多边形分别能铺满地面．拼法如图2和图3．

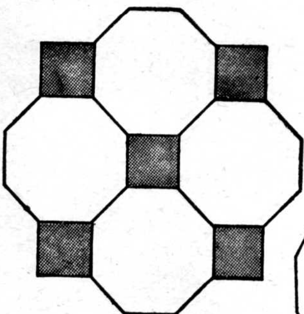

图 2

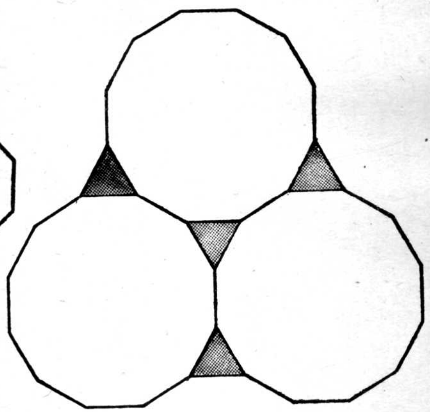

图 3

3． 设 x_1，x_2，x_3 两两不相等，不失一般性，可设 $x_1 < x_2 < x_3$。由(2)可得

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}<\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_1}=\frac{3}{x_1},$$

即得

$$x_1\leqslant 5.$$

类似前面对于解(5,5,10)不能铺满地面的讨论可知，x_1必须是偶数，同理，x_2,x_3都是偶数。由$3\leqslant x_1\leqslant 5$知，$x_1=4$，代入(2)得

$$\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{1}{4},\quad 3\leqslant x_2<x_3.$$

由

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}<\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_2}=\frac{2}{x_2},$$

故

$$x_2<8,$$

推出 $x_2=6$，代入$\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{1}{4}$，得 $x_3=12$。于是 x_1,x_2,x_3 两两不相等的全部解为

(4,6,12)，(4,12,6)，(6,4,12)，

(6,12,4)，(12,6,4)，(12,4,6)。

这些解给出的正多边形都能铺满地面，它们对应同一拼法，如图 4．

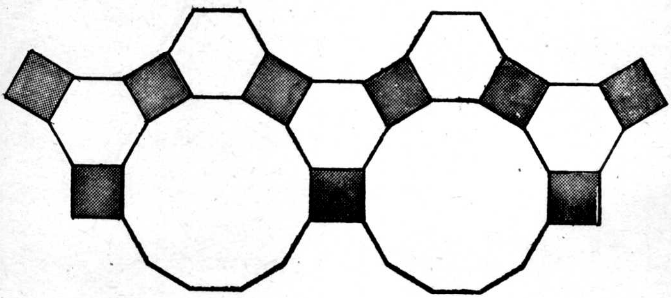

图 4