“希望杯”数学竞赛系列丛书　　主编　周国镇

历届“希望杯”全国数学邀请赛试题精选详解

高　一

李世杰　编著

气象出版社

前　言

一个学科竞赛活动能否成功，除了评奖、组织等工作以外，命题是很关键的。“希望杯”全国数学邀请赛自1990年以来成功地举办了16届，可说是久盛不衰，这中间，试题出得好，起了特别重要的作用。中学生们都愿意研究这些试题，因为在很多试题中蕴含着的内在趣味吸引着他们，因为解答这些试题所用到的数学知识大多没有超出他们在学校里学到的数学内容，还因为在研究如何破解这些试题的过程中，自己的思维和数学能力受到了挑战，他们在经历了重重困惑、碰壁和努力之后终于获得彻悟的结果，那是多么美好的感觉！他们感受到了数学内在的魅力，数学的美，这种科学思维的美让他们感动，这种美引发的愉悦可能会引导青年人走向毕生的科学追求。

如果说“希望杯”全国数学邀请赛的全部试题都有丰富的内涵，显然是言过其实，但是其中确有那么一部分题目委实很精彩，它们有比较丰富的背景知识和比较广阔的思维空间，如果能从不同的视角和不同的层面去分析和研究它们，那么从中吸收到的知识和思维的营养必定远远超过这些题目本身。正是出于这样的认识，我们特意编辑出版了《历届“希望杯”全国数学邀请赛试题精选详解》(初一、初二、高一、高二各一册)，作者中有“希望杯”命题委员会的成员，他们中有资深的数学工作者、大学教授、杰出的中学数学教师，他们都有很好的数学功底，每年都为“希望杯”全国数学邀请赛编拟许多漂亮的题目；还有多年来对“希望杯”邀请赛历届试题深有研究的中学数学教师，他们曾经培养出金银牌选手，并对“希望杯”试题发表过颇有见地的文章。这些作者在“希望杯”命题委员会的指导下，从2000多道“希望杯”全国数学邀请赛试题中精

选出了一部分，对这些题目作了尽可能详尽的分析，力求充分展示题目的内涵，于是成就了这套书。我们期望中学生读了此书，数学水平能有显著提高，中学教师读了此书，能从中得到诸多启示，从而提高自己的教学水平。这个期望能否达到，最有权威的评判当然是本书的读者们。我们真诚地希望读者对本书的不当之处提出批评和意见，我们力求再版时努力做进一步的修改。

周国镇

2005年11月22日

注：**周国镇**　数学教育专家，《数理天地》杂志社社长兼总编；中国优选法统筹法与经济数学研究会常务理事，数学教育委员会主任；“希望杯”全国数学邀请赛组委会秘书长，命题委员会主任。

目　录

第1讲　集　　合

集合是高中数学的一个基本概念，是进一步学习函数的基础．学习集合，就要熟练地掌握集合的有关概念、性质和运算法则，并会用集合的语言和方法表示数量关系，解决数学问题．

一、基础知识

1．集合的概念

(1)在高中数学中集合是一个不定义的基本概念，课本中给出的是描述性定义：

某些指定的对象合在一起就成为一个集合，简称为集．集合常用大写英文字母 $A,B,C,\cdots$ 表示，元素常用小写英文字母 $a,b,c,\cdots$ 表示．

(2)集合中的每个对象叫做这个集合的元素．集合中的元素有三个特征：确定性，互异性，无序性．

(3)元素与集合的从属关系有属于($\in$)和不属于($\notin$)两种，分别记为 $a\in A$ 和 $a\notin A$．

(4)表示集合有三种方法：列举，描述，图示(用一条封闭曲线表示)．

(5)常用数集的记法：

$\mathbf{N}$(自然数集)，$\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$(正自然数集)，$\mathbf{Z}$(整数集)，$\mathbf{Q}$(有理数集)，$\mathbf{R}$(实数集)．

(6)集合的分类

有限集：含有有限个元素的集合．(不含任何元素的集合叫空

集，记为$\varnothing$.）

无限集：含有无限个元素的集合.

集合与集合的关系有：包含、不包含和相等. 分别记作 $A\subseteq B$，$A\nsubseteq B$和 $A=B$.

2. 集合之间的关系

(1)规定：空集是任何集合的子集. 即$\varnothing\subseteq A$；

(2)若 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq A$，则 $A=B$；

(3)若 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$；

(4)$A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$；$A\cup B\supseteq A$，$A\cup B\supseteq B$.

(5)$A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$；

(6)$A\cup B=B\Leftrightarrow A\subseteq B$.

3. 集合的运算

有四种：

(1)交集：$A\cap B=\{x\mid x\in A$，且 $x\in B\}$；

(2)并集：$A\cup B=\{x\mid x\in A$，或 $x\in B\}$；

(3)补集：$\complement_U A=\{x\mid x\in U,x\notin A\}$；

(4)差集：$A\backslash B=\{x\mid x\in A,x\notin B\}$(一般只在竞赛试题中出现)

集合的运算性质(U 表示全集)

①等幂律：$A\cap A=A$，$A\cup A=A$；

②同一律：$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cup\varnothing=A$；$A\cap U=A$，$A\cup U=U$；

③交换律：$A\cap B=B\cap A$，$A\cup B=B\cup A$；

④互补律：$A\cup(\complement_U A)=U$，$A\cap(\complement_U A)=\varnothing$；

⑤反演律：$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=\complement_U(A\cap B)$，$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\complement_U(A\cup B)$.

4. 集合中的计数问题

(1)含有 n 个元素的集合的子集数为 2^n 个；真子集数为 2^n-1 个；非空真子集数为 2^n-2 个.

(2)若 card(A)表示有限集合 A 的元素个数，则

$$\operatorname{card}(A \cup B)=\operatorname{card}(A)+\operatorname{card}(B)-\operatorname{card}(A \cap B);$$

$$\operatorname{card}(A \cup B \cup C)=\operatorname{card}(A)+\operatorname{card}(B)+\operatorname{card}(C)-\operatorname{card}(A \cap B)$$
$$-\operatorname{card}(B \cap C)-\operatorname{card}(C \cap A)+\operatorname{card}(A \cap B \cap C)$$

注意:以上公式仅当集合 A,B,C 是有限集时成立.

二、例题

例 1 已知集合 M 满足 $\{2,5\}\subseteq M\subset\{1,2,3,4,5\}$,则不同的 M 的个数是________.

第 11 届(2000 年)试题

解 符合条件的集合有 $\{2,5\}$;$\{2,5,1\}$,$\{2,5,3\}$,$\{2,5,4\}$;$\{2,5,1,3\}$,$\{2,5,1,4\}$,$\{2,5,4,3\}$,所以不同的 M 的个数是7 个.

评析 以上用穷举法列出了符合条件的所有集合.

变换思考问题的角度,我们可把问题等价转化为:

设 $\{2,5\}\subseteq P\cup\{2,5\}\subset\{1,2,3,4,5\}$,$P\cap\{2,5\}=\varnothing$,则 $\varnothing\subseteq P\subset\{1,3,4\}$,且不同的集合 P 与不同的集合 M 构成一一对应,它们的个数均与 $\{1,3,4\}$ 的真子集个数相同,为 $2^3-1=7$ 个.

思考 上面的结论可推广为

若集合 M 满足 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\subseteq M\subseteq\{a_1,a_2,\cdots,a_n,a_{n+1},\cdots,a_{n+m}\}$,则不同的 M 的个数是 2^m 个.

若集合 M 满足 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\subseteq M\subset\{a_1,a_2,\cdots,a_n,a_{n+1},\cdots,a_{n+m}\}$,则不同的 M 的个数是 2^m-1 个.

若集合 M 满足 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\subset M\subseteq\{a_1,a_2,\cdots,a_n,a_{n+1},\cdots,a_{n+m}\}$,则不同的 M 的个数是 2^m-1 个.

若集合 M 满足 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\subset M\subset\{a_1,a_2,\cdots,a_n,a_{n+1},\cdots,a_{n+m}\}$,则不同的 M 的个数是 2^m-2 个.

当 $n=0$ 时,$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 可看做空集 $\varnothing$,上面四项分别对应:含有 m 个元素的集合,它有子集 2^m 个;真子集 2^m-1 个;非空子集

2^m-1 个;非空真子集 2^m-2 个.

例 2 集合 $S=\{1,2,3,4,5,6\}$,A 是 S 的一个子集,当 $x\in A$ 时,若有 $x-1\notin A$,且 $x+1\notin A$,则称 x 为 A 的一个“孤立元素”,那么 S 无“孤立元素”的 4 元子集的个数是________.

第 14 届(2003 年)试题

解 4 个元素为连续自然数的子集有 3 个:$\{1,2,3,4\}$,$\{2,3,4,5\}$,$\{3,4,5,6\}$;不都连续的子集也有 3 个:$\{1,2,4,5\}$,$\{1,2,5,6\}$,$\{2,3,5,6\}$,所以 S 无“孤立元素”的 4 元子集的个数是 6 个.

评析 这是一个新定义问题,题中定义了“孤立元素”x:$x\in A$,$x-1\notin A$,且 $x+1\notin A$,属于即时性学习的试题.从反面思考,如果集合 A 中不含有“孤立元素”,则对任意 $x\notin A$,必有 $x-1\in A$,或 $x+1\in A$,即 A 中任一元素,至少有另一个与它是连续相连的.

因此,6 个单元素子集 $\{1\}$,$\{2\}$,$\{3\}$,$\{4\}$,$\{5\}$,$\{6\}$ 中的元素都是“孤立元素”.

思考 可以进一步写出所有的 S 无“孤立元素”的子集:

二个元素的子集有 5 个:$\{1,2\}$,$\{2,3\}$,$\{3,4\}$,$\{4,5\}$,$\{5,6\}$;

三个元素的子集有 4 个:$\{1,2,3\}$,$\{2,3,4\}$,$\{3,4,5\}$,$\{4,5,6\}$;

五个元素的子集有 4 个:$\{1,2,3,4,5\}$,$\{2,3,4,5,6\}$,$\{1,2,4,5,6\}$,$\{1,2,3,5,6\}$;

六个元素的子集有 1 个:$\{1,2,3,4,5,6\}$.

因此 S 无“孤立元素”的子集共有:$5+4+6+4+1=20$ 个.

进一步可知 S 有“孤立元素”的子集数:$2^6-20=44$ 个.

值得继续研究的是推广问题:集合 $\{1,2,3,4,5,\cdots,n\}$ 无“孤立元素”的子集的个数有多少个?

我们可列出前面几个:

n	1	2	3	4	5	6	…
无“孤立元素”的子集个数 a_n	0	1	3	6	11	20	…

对 k 个元素的子集个数 b_n 和 b_{n+1} 的关系，当 $k\leqslant 6$ 时，可以比较容易求出.

二个元素的子集多 1 个：$\{n,n+1\}$，$b_{n+1}=b_n+1$；

三个元素的子集多 1 个：$\{n-1,n,n+1\}$，$b_{n+1}=b_n+1$；

四个元素的子集多 $n-2$ 个：$\{1,2,n,n+1\}$，$\{2,3,n,n+1\}$，…，$\{n-2,n-1,n,n+1\}$，$b_{n+1}=b_n+n-2$；

五个元素的子集多 $2n-7$ 个：

$\{1,2,3,n,n+1\}$，$\{2,3,4,n,n+1\}$，…，$\{n-3,n-2,n-1,n,n+1\}$，共 $n-3$ 个；

$\{1,2,n-1,n,n+1\}$，$\{2,3,n-1,n,n+1\}$，…，$\{n-4,n-3,n-1,n,n+1\}$，共 $n-4$ 个；

六个元素的子集多 $\frac{1}{2}(n^2-2n-3)$ 个：

$\{1,2,3,n-1,n,n+1\}$，$\{2,3,4,n-1,n,n+1\}$，…，$\{n-5,n-4,n-3,n-1,n,n+1\}$，共 $n-5$ 个；

$\{1,2,3,4,n,n+1\}$，$\{1,2,4,5,n,n+1\}$，…，$\{n-4,n-3,n-2,n-1,n,n+1\}$，共 C_{n-1}^2 个；

$$C_{n-1}^2+(n-5)=\frac{1}{2}(n^2-2n-3)$$

但 k 较大时，至今还没有找到这样的一个递推公式能给出后续答案.

例 3 如果在关于 x 的三个方程 $x^2+4ax-4a+3=0$，$x^2+(a-1)x+a^2=0$，$x^2+2ax-2a=0$ 中，至少有一个二次方程有实数解，则实数 a 的取值范围是________.

第 9 届(1998 年)山西、江西、天津赛区试题

解 三个方程至少有一个方程有实根的反面情况仅有一种：三个方程均没有实根. 先求出反面情况时 a 的取值范围，则所得范围的补集就是正面情况的答案.

设三个方程均无实根，则有

$$\begin{cases}\Delta_1 = 16a^2 - 4(-4a+3) < 0 \\ \Delta_2 = (a-1)^2 - 4a^2 < 0 \\ \Delta_3 = 4a^2 - 4(-2a) < 0\end{cases},$$

$$\text{解得}\begin{cases}-\dfrac{3}{2} < a < \dfrac{1}{2} \\ a < -1 \text{ 或 } a > \dfrac{1}{3}\text{，即} -\dfrac{3}{2} < a < -1. \\ -2 < a < 0\end{cases}$$

所以当 $a \geqslant -1$ 或 $a \leqslant -\frac{3}{2}$ 时，三个方程至少有一个方程有实根.

评析　"至少"、"至多"型问题常可从反面思考，有可能使情况变得简单一些. 本题还用到了"判别式法"、"补集法"(全集 U)，也可以从正面直接求解，即分别求出三个方程有实根时($\Delta \geqslant 0$)a 的取值范围，再将三个范围并起来，即求集合的并集.

解　由三个二次方程的判别式大于或等于零，得到

$$16a^2 - 4(3-4a) \geqslant 0, (a-1)^2 - 4a^2 \geqslant 0, 4a^2 + 8a \geqslant 0$$

求出解集后求它们的并集，得 $a \in (-\infty, -\frac{3}{2}] \cup [-1, +\infty)$.

两种解法，都要求对不等式解集的交、并、补概念和运算理解透彻.

思考　在数学解题中经常使用反面思考的方法，这包括反证法. 牛顿曾经说过："反证法是数学家最精良的武器之一."一般来讲，反证法常用来证明的题型有：命题的结论以"否定形式"、"至少"或"至多"、"惟一"、"无限"形式出现的命题；或者否定结论更明显、更具体、更简单的命题；或者直接证明难以下手的命题，改变其思维方向，从结论入手进行反面思考，问题可能解决得十分干脆.

例 4　函数 $y=f(2^x)$ 的定义域是$(-1,1)$，设函数 $y=f(\log_x 2)$ 的定义域为 A，则 $A \cap \mathbf{Z}=$________.(其中 $\mathbf{Z}$ 表示整数集合)

第 3 届(1992 年)试题

解　因为 $-1<x<1$，所以 $\frac{1}{2}<2^x<2$，

由 $\frac{1}{2}<\log_x 2<2$，$\frac{1}{2}<\frac{\lg 2}{\lg x}<2$，

解得 $\sqrt{2}<x<4$，又因 $x\in\mathbf{Z}$，所以，$x=2,3$，$A\cap\mathbf{Z}=\{2,3\}$.

评析 求复合函数的定义域，一般可根据对应法则所作用的对象的取值范围来确定，通常要转化为求不等式(组)的解，如含有参数，则还要分类讨论. 其结果要用集合或区间表示.

思考 一般地，如果复合函数 $f[g(x)]$ 的定义域为 D，记 $M=\{u\mid u=g(x),x\in D\}$，$f[\varphi(x)]$ 的定义域为 A，则 $A=\{x\mid\varphi(x)\in M\}$.

例 5 f 是 $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 上的一一映射，函数 $y=f(x)$ 严格递增，方程 $x=f(x)$ 的解集为 P，方程 $x=f[f(x)]$ 的解集为 Q，则(　　)

(A) $P\subsetneqq Q$.　　　　(B) $P=Q$.

(C) $Q\subsetneqq P$.　　　　(D) $P\not\subseteq Q$ 且 $Q\not\subseteq P$.

第 1 届(1990 年)试题

解 任取 $x_0\in P$，$x_0=f(x_0)$，有 $x_0=f[f(x_0)]$，所以 $x_0\in Q$. 这表明 $P\subseteq Q$；另一方面，任取 $y_0\in Q$，则 $y_0=f[f(y_0)]$. 下面用反证法证明 $y_0=f(y_0)$.

假设 $y_0\neq f(y_0)$，当 $y_0>f(y_0)$ 时，由于函数 $y=f(x)$ 是严格递增的，则有 $f(y_0)>f[f(y_0)]=y_0$，但这与所设 $y_0>f(y_0)$ 矛盾！

可见 $y_0<f(y_0)$，由严格递增还可知：$f(y_0)<f[f(y_0)]=y_0$，又与所设 $y_0<f(y_0)$ 矛盾. 可见只有 $y_0=f(y_0)$，这表明 $y_0\in P$，即又有 $Q\subseteq P$.

由 $P\subseteq Q$，且 $Q\subseteq P$，知 $P=Q$. 选(B).

评析 要判断集合 P 与集合 Q 之间的关系，必须根据集合的定义进行证明. 本题求解的关键是由 $y_0=f[f(y_0)]$ 猜测出 $y_0=f(y_0)$，然后用反证法、分类讨论等数学思想方法进行求解.

注 反证法是从反面的角度思考问题的间接证明方法，即：肯定题设而否定结论，从而导出矛盾推理而得. 法国数学家阿达玛(Hadamard)对反证法的实质作过概括："若肯定定理的假设而否

定其结论，就会导致矛盾”．具体地讲，反证法就是从否定命题的结论入手，并把对命题结论的否定作为推理的已知条件，进行正确的逻辑推理，使之得到与已知条件、已知公理、定理、法则或者已经证明为正确的命题等相矛盾，矛盾的原因是假设不成立，所以肯定了命题的结论，从而使命题获得了证明．

反证法的依据是：逻辑思维规律中的“矛盾律”和“排中律”．在同一思维过程中，两个互相矛盾的判断不能同时都为真，至少有一个是假的，这就是逻辑思维中的“矛盾律”；两个互相矛盾的判断不能同时都假，简单地说“A 或者非 A”，这就是逻辑思维中的“排中律”．反证法在其证明过程中，得到矛盾的判断，根据“矛盾律”，这些矛盾的判断不能同时为真，必有一假，而已知条件、已知公理、定理、法则或者已经证明为正确的命题都是真的，所以“否定的结论”必为假．

再根据“排中律”，结论与“否定的结论”这一对立的互相否定的判断不能同时为假，必有一真，于是我们得到原结论必为真．所以反证法是以逻辑思维的基本规律和理论为依据的．

反证法的证题模式可以简要地概括为“否定→推理→否定”．即从否定结论开始，经过正确无误的推理导致逻辑矛盾，达到新的否定，可以认为反证法的基本思想就是“否定之否定”．应用反证法证明的主要三步是：否定结论→推导出矛盾→结论成立．实施的具体步骤是：

第一步，反设：作出与求证结论相反的假设；

第二步，归谬：将反设作为条件，并由此通过一系列的正确推理导出矛盾；

第三步，结论：说明反设不成立，从而肯定原命题成立．

在应用反证法证题时，一定要用到“反设”进行推理，否则就不是反证法．用反证法证题时，如果欲证明的命题只有一种情况，那么只要将这种情况驳倒了就可以，这种反证法又叫“归谬法”；如果结论的反面情况有多种，那么必须将所有的反面情况一一驳倒，才能推断原结论成立，这种证法又叫“穷举法”．

思考 注意到本题是一个选择题，因此也可利用求解选择题的特殊化技巧，排除错误的选择支.

解 取特殊函数，令 $f(x)=2x$，则 $f[f(x)]=4x$，方程 $x=f(x)$ 的解集 $P=\{0\}$，方程 $x=f[f(x)]$ 的解集 $Q=\{0\}$，于是 $P=Q$，排除(A)、(C)、(D). 选(B).

本题的结果太奇妙了！自然会启发我们思考如下一些问题：

(1)题设条件"f 是$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$上的一一映射，函数 $y=f(x)$ 严格递增"是否可减弱？当函数 $y=f(x)$ 不是严格递增时，结论还成立吗？

答案是否定的. 请看：

反例 当 $f(x)=x^2-2$ 时，$f(x)=x$ 即 $x^2-2=x$，解集 $P=\{-1,2\}$；$f[f(x)]=x$ 即 $(x^2-2)^2-2=x$，求解这一方程可用增元法，转化为方程组来解.

设 $y=x^2-2$，则 $\begin{cases}y=x^2-2\\ x=y^2-2\end{cases}$，

可求得 $Q=\left\{-1,2,\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2},\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$，因此 $P\neq Q$.

(2)拓广："方程 $x=f[f(x)]$ 的解集为 Q"改为一般形式"方程 $x=f\{f\cdots[f(x)]\}$ (n 个 f) 的解集为 Q"，结论不变.

(3)延伸：将条件"方程 $x=f(x)$ 的解集为 P，方程 $x=f[f(x)]$ 的解集为 Q"改为"不等式 $x\geqslant f(x)$ 的解集为 P，不等式 $x\geqslant f[f(x)]$ 的解集为 Q"，结论不变，仍成立 $P=Q$. 只要将上述证明过程修改即可.

证明 任取 $x_0\in P$，$x_0\geqslant f(x_0)$，有 $x_0\geqslant f(x_0)\geqslant f[f(x_0)]$，所以 $x_0\in Q$. 这表明 $P\subseteq Q$；另一方面，任取 $y_0\in Q$，则 $y_0\geqslant f[f(y_0)]$. 下面用反证法证明 $y_0\geqslant f(y_0)$.

假设 $y_0<f(y_0)$，由于函数 $y=f(x)$ 是严格递增的，则有 $y_0<f(y_0)<f[f(y_0)]$，但这与题设 $y_0\geqslant f[f(y_0)]$ 矛盾！可见 $y_0\geqslant f(y_0)$，这表明 $y_0\in P$，即又有 $Q\subseteq P$.

由 $P\subseteq Q$，且 $Q\subseteq P$，知 $P=Q$.

还可将它拓广到 n 个 f 的情形，留给读者自行解决.

(4)本题及(2)、(3)中的结论可作为小定理在解题中应用，如：

①解方程：$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}=x$；

②解不等式：$(x^3-6)^3-6>x$

③当 $f(x)$ 是增函数时，方程组 $\begin{cases} f(x)=g(x) \\ f^{-1}(x)=g(x) \end{cases}$ 与 $g(x)=x$ 同解.

这些结果真是太奇妙了！

例 6 设 $f(x)=\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^2-2$，$x\in[-2,+\infty)$，则方程 $f(x)=f^{-1}(x)$ 的解集是________.

第 4 届(1993 年)试题

解 由于 $f(x)=\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^2-2$ 在区间 $x\in[-2,+\infty)$ 上是增函数，根据上题的结果，方程 $f(x)=f^{-1}(x)$ 即 $f[f(x)]=x$ 与 $f(x)=x$ 同解. $f(x)=x$ 即 $\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^2-2=x$，得 $x_1=-2$，$x_2=2$，所以欲求方程的解集为 $\{-2,2\}$.

评析 本题给出的方程，也可以用增元法转化为方程组直接求解.

记 $y=f(x)$，由于 $x\in[-2,+\infty)$，所以 $y\in[-2,+\infty)$. 方程 $f(x)=f^{-1}(x)$，即 $y=f^{-1}(x)$，$x=f(y)$，于是原方程就转化为

$$\begin{cases} y=\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^2-2 \\ x=\left(1+\dfrac{y}{2}\right)^2-2 \end{cases}$$

两式相减，得 $y-x=\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^2-\left(1+\dfrac{y}{2}\right)^2$，变形后可得 $(x-y)(8+x+y)=0$，因 $8+x+y\neq0$，所以 $x=y$. 于是方程 $f(x)=f^{-1}(x)$

同解于 $\left(1+\frac{x}{2}\right)^2-2=x$，下略.

思考

(1)如果把题目改为：设 $f(x)=\left(1+\frac{x}{2}\right)^2-2, x\in[-2,+\infty)$，则不等式 $f(x)\geqslant f^{-1}(x)$ 的解集是________.

类似可得：不等式 $f(x)\geqslant f^{-1}(x)$ 与 $f(x)\geqslant x$ 的解集同为 $[-2,2]$.

(2)方程 $\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x$ 的实数解最多有________个，若方程有实数解，则 a 的取值范围是________.

第 14 届(2003 年)试题

解　用增元法. 由 $\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x$，得 $\sqrt{a+x}=-x^2+a(x\geqslant 0)$. 令 $y=\sqrt{a+x}=-x^2+a(x\geqslant 0)$. 下略.

答案：实数解最多有 2 个，a 的取值范围是 $[1,+\infty)\cup\{0\}$.

当然也可以数形结合，借助函数图像进行判别.

第 2 讲　函数及其图像

函数是高中数学的重点内容，是高中数学的基础，是联结其他数学分支内容的一条主线，应用十分广泛. 函数思想巧妙深奥，是解决数学问题的一种重要思想.

一、基础知识

1. 函数的定义

设 A,B 都是非空的数集，如果按某个确定的对应关系 f，使对

于集合 A 中的任意一个数 x，在集合 B 中都有惟一确定的数 $f(x)$ 与它对应，那么就称 $f:A\rightarrow B$ 是从 A 到 B 的函数，记作 $y=f(x)$，其中 $x\in A,y\in B$.

(1)函数的实质是两个非空数集之间的对应法则. 表示函数常用的方法有解析法、列表法、图像法等.

(2)函数的三要素：对应法则、定义域和值域.

对于函数 $y=f(x)$，自变量 x 的取值范围就是定义域，全体函数值所组成的集合就是值域，函数值的集合 C 满足 $C\subseteq B$.

求函数的定义域主要考虑：

分母不为零；

偶次根式的被开方数非负；

函数本身的规定；

问题的实际意义等.

抽象函数、复合函数的定义域的求法只须遵循使解析式 $y=f(x)$ 或 $y=f[g(x)]$ 有意义的原则，常转化为求不等式组解的问题. 需要注意的是，定义域须用集合或区间表示.

求函数的值域的常用方法有：配方法，单调函数法，判别式法，图像法，反函数法等.

(3)函数相等

"三要素"都相同的两个函数相等.

如果函数的定义域和对应法则确定了，那么函数的值域也就随之确定. 因此，定义域和对应法则都相同的两个函数相等.

2. 映射

设集合 A,B 非空，如果按照某对应法则 f，对于集合 A 中任何一个元素，在集合 B 中都有惟一确定的元素和它对应，那么这样的对应叫做集合 A 到集合 B 的映射.

映射是函数概念的推广(集合 A,B 未必是数集)；函数是一类特殊的映射，函数是两个非空数集之间的映射. 判断集合 A 到 B 的

对应关系是否为映射,必须按照"存在且惟一"原则.

3. 函数图像的常用画法

(1)列表描点法;

(2)用函数性质法;

(3)利用已知曲线法(如作函数 $y=\sqrt{16+2x^2}$ 的图像可利用双曲线来画);

(4)几何法(如利用三角函数线作正弦函数图像);

(5)图像变换法(如平移变换,对称变换).

4. 反函数的定义

若式子 $y=f(x)$ 表示 y 是自变量 x 的函数,设它的定义域为 A,值域为 C. 根据式子 $y=f(x)$ 解出 x,得到式子 $x=\varphi(y)$. 如果对于 y 在 C 中的任何一个值,通过式子 $x=\varphi(y)$,x 在 A 中都有惟一确定的值和它对应,那么式子 $x=\varphi(y)$ 就表示 x 是自变量 y 的函数,这样的函数 $x=\varphi(y)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的本义反函数,记作 $x=f^{-1}(y)(y\in C)$.

习惯上,我们用 x 表示自变量,用 y 表示函数. 为此,将 $x=f^{-1}(y)(y\in C)$ 改写为 $y=f^{-1}(x)(x\in C, y\in A)$,这叫做函数 $y=f(x)$ 的矫形反函数,通常称为函数 $y=f(x)$ 的反函数.

(1)值得注意的是,并非所有函数都有反函数. 只有一一对应的函数才有反函数.

(2)互为反函数的定义域与值域的关系.

反函数的定义域与值域正好是原函数的值域与定义域.

(3)求反函数的基本步骤.

如果函数 $y=f(x)$ 存在反函数,求反函数可分三步:

第一步将 $y=f(x)$ 看成方程,解出 $x=f^{-1}(y)$;

第二步将 x,y 互换,得到 $y=f^{-1}(x)$;

第三步指出反函数的定义域(通过求原函数的值域获得).

(4)互为反函数的图像间的关系.