新课程

人民教育出版社授权
配人教版教材使用

新精编

高中数学

第二册上

(高二上用)

XINKECHENG
XINJINGBIAN
GAOZHONGSHUXUE

浙江教育出版社

新课程 新精编

XINKECHENG
XINJINGBIAN
GAOZHONGSHUXUE

- 高中数学　第二册上
- 高中数学　第二册下 A
- 高中数学　第二册下 B
- 高中物理　第二册
- 高中化学　第二册
- 高中语文　第三册
- 高中语文　第四册
- 高中英语　第二册上
- 高中英语　第二册下
- 高中地理　选修第一册
- 高中生物　必　修
- 高中历史　世界近代现代史

ISBN 7-5338-5243-5
9 787533 852436 >

ISBN 7-5338-5243-5/G·5213
定　价：12.00 元

新课程

人民教育出版社数学室审阅

新精编

主　编　岑　申　王而冶
副主编　金才华　许芬英
编写者　陈守礼　冯　斌
　　　　金富军　戴三红
　　　　楼肇庆

高中数学

第二册上

(高二上用)

浙江教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

新课程 新精编. 高中数学. 第二册上/岑申、王而冶主编. —杭州:浙江教育出版社,2004.5(2006.6重印)

ISBN 7-5338-5243-5

Ⅰ.新… Ⅱ.岑… Ⅲ.数学课-高中-习题 Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第031927号

责任编辑:金馥菊　　责任校对:雷　坚

装帧设计:韩　波　　责任出版:程居洪

新课程　新精编　高中数学　第二册(上)

- 主　　编:岑　申　王而冶
- 审　　阅:人民教育出版社数学室
- 出版发行:浙江教育出版社
- 印　　刷:浙江印刷集团有限公司
- 开　　本:787×960　1/16
- 印　　张:12.5
- 字　　数:250 000
- 版　　次:2005年6月第1版
- 印　　次:2006年6月第3次印刷
- 印　　数:30 000
- 书　　号:ISBN 7-5338-5243-5/G·5213
- 定　　价:12.00元
- 联系电话:0571-85170300-80928
- e-mail:zjjy@zjcb.com
- 网　　址:www.zjeph.com

说 明

《新课程·新精编》丛书是在原"高中各学科精编"的基础上，根据当前新一轮课程改革的理念，结合教学的实际情况，吸收全国各地对原"高中各学科精编"的意见和建议，改版而成。新的丛书从内容到形式，从开本到版式都有了改进与创新，其主要特点有：

◆针对性。依照课程标准所倡导的理念，确定编写的指导思想；针对新教材的教学内容，在讲述学习方法时示例典型，在选编习题时突出学科重点知识和内容，注重理论联系实际、知识迁移、思维拓展等能力的训练，充分考虑习题的难易程度，并渗透高考命题的方向及要求。

◆权威性。这套丛书由来自教学一线的名师编写，人民教育出版社相关科室专家审阅，与新课程的教学理念及新教学大纲的要求一致。

◆实用性。这套丛书旨在便于教师教学和学生学习，例题和对应的练习均按课时编排。

◆创新性。每册按章编写，每章分别设有"学习导引""基础例说·基本训练""应用·拓展·综合训练""自我评估"等栏目。

"学习导引"概括本章的主要内容、目的要求、重点、难点、特点、知识的前后联系，以及在学习方法上值得注意的问题，同时列出了本章的重要定理和公式。

"基础例说·基本训练"分范例和练习两部分。围绕本节教学重点和难点，帮助学生理解概念，掌握定理、性质、方法和技巧，纠正易犯的错误，以达到夯实基础知识、熟练基本技能的目的，并在此基础上逐步培养学生综合运用知识的能力，拓宽学生的视野。

"应用·拓展·综合训练"分范例和习题两部分。该栏目内容纵揽全章，起到复习、巩固、拓展、加强应用和综合训练的作用。同时加强了数学思想、数学方法的渗透，对提高数学的应用和综合能力有较大帮助。

"自我评估"为全章知识的综合评估，分A，B两份试卷，其中A卷为基本要求，B卷为较高要求。

本次印刷时，对个别差错作了校正。

浙江教育出版社

2005年6月

目 录

MULU

第六章 不等式

学习导引

主要内容有不等式的性质、不等式的证明和解不等式.

由于人们在生活和生产实践中经常会遇到许多不相等关系,所以不等式在中学数学教学中占有很重要的地位,也是我们进一步学习高等数学和其他学科的基础和工具.

学习目标

1. 理解不等式的性质及其证明.

2. 掌握两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数的定理,并学会简单的应用.

3. 掌握用分析法、综合法和比较法证明简单的不等式.

4. 掌握某些简单绝对值不等式和分式不等式的解法.

5. 理解含绝对值不等式的性质定理:

$$|a|-|b|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|.$$

6. 通过不等式的一些应用,理解在现实世界中量的不等与相等是对立统一的两个方面,在一定条件下它们可以互相转化.

不等式的证明和不等式的解法是本章的重点.不等式的性质及其证明,不等式的证明和含绝对值不等式的性质及其应用是本章的难点.掌握不等式的性质是学好这一章的关键.应用广泛、变换灵活是本章的特点.

学习时应注意以下几点

1. 联系已学过的一元一次不等式、一元二次不等式、方程、函数等知识,使对不等式知识有较完整的认识.

2. 不等式的证明既要重视逻辑推理的严密性,又要发展思维的灵活性和创造性.比较法是一种最基本、最主要的方法,一定要熟练掌握.在探求证明方法时,要结合运用分析与综合这两种思考方式.

3. 解不等式的主要数学思想是转化思想.特别要注意转化过程必须是等价的.

4. 在运用公式"$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$"求函数的最大、最小值时,要搞清公式的适用条件,尤其是等号成立的条件.

主要概念、定理和公式

1. 实数的大小顺序与运算性质之间的关系

$a>b\Leftrightarrow a-b>0$

$a=b\Leftrightarrow a-b=0$

$a<b\Leftrightarrow a-b<0$

2. 不等式的主要性质

(1) $a>b\Leftrightarrow b<a$

(2) $a>b,b>c\Rightarrow a>c$　　$c<b,b<a\Rightarrow c<a$

(3) $a>b\Rightarrow a+c>b+c$

$a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d$

(4) $a>b,c>0\Rightarrow ac>bc$

$a>b,c<0\Rightarrow ac<bc$

$a>b>0,c>d>0\Rightarrow ac>bd$

$a>b>0\Rightarrow a^n>b^n$ ($n\in\mathbf{N}$,且 $n>1$)

(5) $a>b>0\Rightarrow\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$ ($n\in\mathbf{N}$,且 $n>1$)

(6) $|a|-|b|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$

$|a_1+a_2+a_3|\leqslant|a_1|+|a_2|+|a_3|$

$|a|-|b|\leqslant|a-b|\leqslant|a|+|b|$

(7) $a^2+b^2\geqslant 2ab$ ($a,b\in\mathbf{R}$)

(8) $\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ ($a>0,b>0$)

基础例说·基本训练

JICHULISHUO JIBENXUNLIAN

6.1 不等式的性质

课时 1

例说

例 1 已知 $a>b>c$,比较 $a^2b+b^2c+c^2a$ 与 $ab^2+bc^2+ca^2$ 的大小.

解 $(a^2b+b^2c+c^2a)-(ab^2+bc^2+ca^2)$

$=ab(a-b)-c(a^2-b^2)+c^2(a-b)$

$=(a-b)[ab-c(a+b)+c^2]$

$=(a-b)[a(b-c)-c(b-c)]$

$=(a-b)(b-c)(a-c)$.

$\because\ a>b>c$,

$\therefore\ a-b>0,b-c>0,a-c>0$.

$\therefore\ (a-b)(b-c)(a-c)>0$.

$\therefore\ a^2b+b^2c+c^2a>ab^2+bc^2+ca^2$.

注意

比较两个代数式的大小,最基本的方法是作差与零比较.基本步骤是:①作差;②变形;③判断符号.关键是变形,其中因式分解、配方、分子(分母)有理化都是重要的变形方法.判断所作差的符号时应注意代数式字母的取值范围.

例 2 已知 a,b,x,y 都是正数,且 $x+y=1$,比较 $\sqrt{ax+by}$ 与 $x\sqrt{a}+y\sqrt{b}$ 的大小.

解 $\because\ (\sqrt{ax+by})^2-(x\sqrt{a}+y\sqrt{b})^2$

$=ax+by-ax^2-2xy\sqrt{ab}-by^2$

$=ax(1-x)+by(1-y)-2xy\sqrt{ab}$

$=axy+bxy-2xy\sqrt{ab}=xy(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0$

(当且仅当 $a=b$ 时,取"="号),

$\therefore$ 当 $a=b$ 时,$\sqrt{ax+by}=x\sqrt{a}+y\sqrt{b}$;

当 $a\neq b$ 时,$\sqrt{ax+by}>x\sqrt{a}+y\sqrt{b}$.

注意

当直接作差变形与零比较有困难时,可考虑在等价的前提下,转换成其他代数式的比较.如本例要比较的两个代数式非负,就转换成比较它们的平方.

例 3 在等比数列 $\{a_n\}$ 和等差数列 $\{b_n\}$ 中,$a_1=b_1>0,a_3=b_3>0,a_1\neq a_3$,试比较 a_5 与 b_5 的大小.

解 设公比是 q,公差是 d,则

$a_3=a_1q^2,b_3=b_1+2d=a_1+2d$.

$\because\ a_3=b_3$,

$\therefore\ a_1q^2=a_1+2d$,即 $2d=a_1(q^2-1)$.

又 $\because\ a_1\neq a_3=a_1q^2,a_1>0$, $\therefore\ q^2\neq 1$.

$b_5-a_5=(a_1+4d)-a_1q^4$

$=a_1+2a_1(q^2-1)-a_1q^4$

$=-a_1(q^2-1)^2<0$,故 $b_5<a_5$.

注意

当碰到变量比较多不易比较大小时,可采用消元、换元等方法,运用主元与转化思想,使变量减少.本题就是通过 d 与 q 的关系,消去 d,最后变为 q 的多项式得到解决.

训练

A 组

1. 比较$(x+5)(x-1)$与$(x+2)^2$的大小.
2. 设$n\in\mathbf{N}^*$,试比较$n+1$与$\frac{81}{4n+4}$的大小.
3. 若$P=\sqrt{x+2}+\sqrt{x+5}$,$Q=\sqrt{x+3}+\sqrt{x+4}$ $(x\geqslant-2)$,试比较P与Q的大小.

B 组

4. 已知$-\frac{1}{2}<a<0$,$A=1+a^2$,$B=1-a^2$,$C=\frac{1}{1+a}$,$D=\frac{1}{1-a}$,试将A,B,C,D按大小顺序排列.
5. 已知$ab>0$,比较$\frac{b^2}{a}+\frac{a^2}{b}$与$a+b$的大小.
6. 甲、乙两人沿着同一条路同时从A地出发走向B地.甲用速度v_1与$v_2(v_1\neq v_2)$各走路程的一半,乙用速度v_1和v_2各走全程所需时间的一半,试判断甲、乙两人谁先到达B地,并证明你的结论.
7. 设$x\in(0,1)$,$a>0$,$a\neq1$,比较$|\log_a(1-x)|$与$|\log_a(1+x)|$的大小.

课时 2

例说

例 4 已知$a>b$,$c>d$,则下列命题中正确的是(　　)

(A) $a-c>b-d$　(B) $\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$

(C) $ac>bd$　　(D) $c-b>d-a$.

解 $\because$ $a>b$, $\therefore$ $-b>-a$.

又$\because$ $c>d$, $\therefore$ $c-b>d-a$.

正确选项是 D.

注意

两个异向不等式不能直接进行加法运算,必须先化为同向不等式,才可以相加,所得不等式与原不等式同向.两个同向不等式相乘、除时,不等号方向不一定同向.“如果$a>b,c>d$,那么$ac>bd$”是假命题.只有当所有字母a,b,c,d都为正数时,才成为真命题.

例 5 设$A=a+d$,$B=b+c$,a,b,c,d均为正数,且$ad=bc$,a是a,b,c,d中最大的一个,试比较A与B的大小.

解 $\because$ $ad=bc$, $\therefore$ $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$.

$\because$ $a>b>0$, $\therefore$ $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}>1$.

又$d>0$, $\therefore$ $c>d$.

同理可证　$b>d$.

$\therefore$ $A-B=(a+d)-(b+c)$

$=\frac{bc}{d}+d-b-c=\left(\frac{bc}{d}-b\right)+(d-c)$

$=b\left(\frac{c}{d}-1\right)+(d-c)=\frac{1}{d}(c-d)(b-d)>0$,

$\therefore$ $A>B$.

注意

当题设中含有“相等”和“不等”的诸多条件时,要充分利用这些相等和不等的关系,推出一些新的相等和不等的关系式,为最后作差比较时提供依据.如本例由ad

$=bc, a>b>0, d>0$，推出 $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}, c>d$，$b>d$ 等.

例 6 已知 $\alpha,\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，求 $\alpha+\beta,\alpha-\beta$，$\frac{\alpha}{\beta}$ 的取值范围.

解 由已知可得

$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi, \frac{\pi}{2}<\beta<\pi, -\pi<-\beta<-\frac{\pi}{2}$，

$\frac{1}{\pi}<\frac{1}{\beta}<\frac{2}{\pi}$.

$\therefore\ \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\pi+\pi$，

即 $\pi<\alpha+\beta<2\pi$；

$\frac{\pi}{2}-\pi<\alpha-\beta<\pi-\frac{\pi}{2}$，

即 $-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$；

$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\pi}<\frac{\alpha}{\beta}<\pi\cdot\frac{2}{\pi}$，

即 $\frac{1}{2}<\frac{\alpha}{\beta}<2$.

注意

本题求 $\alpha+\beta,\alpha-\beta,\frac{\alpha}{\beta}$ 的范围，所采用的方法是依据不等式的性质，将两个不等式同向相加或相乘，所得的不等式必定成立. 但能否保证 $\alpha+\beta,\alpha-\beta,\frac{\alpha}{\beta}$ 取遍求得的范围的所有值呢？对此，以 $\alpha+\beta$ 为例，作如下说明：由 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$①，$\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$②，①+②，得 $\pi<\alpha+\beta<2\pi$③，同样依据不等式性质，由③和①能推出②，由③和②能推出①，这就是说对于区间 $(\pi,2\pi)$ 内的任何一个值，只要在区间 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 内任取一 α 值，必定可以在区间 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 取得一个适当的 β 值，使得 $\alpha+\beta$ 等于区间 $(\pi,2\pi)$ 内任取的这个值. 也可先在区间 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 内任取一个 β 值，再取适当 α 值. 这就说明 $\alpha+\beta$ 能取遍区间 $(\pi,2\pi)$ 内的所有值，对 $\frac{\alpha}{\beta}$ 也可以用同样的方法来说明. 因此本例所采用的方法是可靠的.

但在有另外附加条件的情况下，运用上述的方法就可能产生问题. 请读者自己思考.

训练

A 组

8. 下列推导不正确的是（　　）
   (A) $c-a<c-b\Rightarrow a>b$
   (B) $\frac{c}{a}<\frac{c}{b}, c>0\Rightarrow a>b$
   (C) $a>b>0, c>d>0\Rightarrow\sqrt{\frac{a}{d}}>\sqrt{\frac{b}{c}}$
   (D) $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}\ (n\in\mathbf{N}^*, n>1)\Rightarrow a<b$
9. 若 a,b 是任意实数，且 $a>b$，则（　　）
   (A) $a^2>b^2$
   (B) $\frac{b}{a}<1$
   (C) $\lg(a-b)>0$
   (D) $\left(\frac{1}{2}\right)^a<\left(\frac{1}{2}\right)^b$
10. 用不等号（“$>$”或“$<$”）填空：
   (1) $a>b>0, c<d<0$，则 $\frac{a}{d}$ ________ $\frac{b}{c}$；

(2) 若 $a \neq b$，则 a^2+3b^2 ________ $2b(a+b)$；

(3) a,b,c,d 均为负实数，且 $a>b$，$c>d$，则 ac ________ bd.

11. 已知“$a>b, a-\frac{1}{a}>b-\frac{1}{b}$”同时成立，则 ab 应满足的条件是________.

B 组

12. 已知三个不等式：① $ab>0$；② $-\frac{c}{a}<-\frac{d}{b}$；③ $bc>ad$. 以其中两个做条件，余下一个做结论，则可以组成________个真命题.

13. 已知 $-1<a+b<3$，且 $2<a-b<4$，则 $2a+3b$ 的取值范围是________.

14. 已知 $a>b>0, c<d<0, e<0$，求证：

(1) $\frac{e}{a-c}>\frac{e}{b-d}$； (2) $\sqrt[3]{\frac{a}{d}}<\sqrt[3]{\frac{b}{c}}$.

15. 设 $60<x<84, 28<y<32$，求 $x+y$，$x-\frac{1}{4}y$ 及 $\frac{x}{y}$ 的取值范围.

课时 3

例说

例 7 设 $p: \begin{cases} x_1>3, \\ x_2>3, \end{cases}$ $q: \begin{cases} x_1+x_2>6, \\ x_1 \cdot x_2>9, \end{cases}$ 那么 p 是 q 成立的什么条件？

解 由 $p \Rightarrow q$，即 $\begin{cases} x_1>3 \\ x_2>3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2>6, \\ x_1 \cdot x_2>9, \end{cases}$ 知 p 是 q 的充分条件；但 $q \nRightarrow p$，例如取 $x_1=10, x_2=1$，满足 $\begin{cases} x_1+x_2>6, \\ x_1 \cdot x_2>9, \end{cases}$ 不满足 $x_2>3$. 故 p 是 q 成立的充分非必要条件.

注意

$\begin{cases} x_1>3, \\ x_2>3 \end{cases}$ 的充要条件是 $\begin{cases} (x_1-3)+(x_2-3)>0, \\ (x_1-3)(x_2-3)>0. \end{cases}$

例 8 设 $f(x)$ 是不含常数项的二次函数，且 $1 \leqslant f(-1) \leqslant 2, 2 \leqslant f(1) \leqslant 4$，求 $f(2)$ 的取值范围.

分析 本题的一种错误解法是：

设 $f(x)=ax^2+bx$，由已知得

$1 \leqslant a-b \leqslant 2$， ①

$2 \leqslant a+b \leqslant 4$. ②

由①，②得 $\frac{3}{2} \leqslant a \leqslant 3, 0 \leqslant b \leqslant \frac{3}{2}$. ③

$\because$ $f(2)=4a+2b$，结合③，得 $6 \leqslant f(2) \leqslant 15$.

其错误的原因在于：由①②可得③，但由③不能得①②，即③是①②的必要不充分条件. 正确的解法是：先将 $f(2)$ 表示成 $f(-1)$，$f(1)$ 的函数式，再由 $f(-1)$，$f(1)$ 的范围结合不等式的性质求出 $f(2)$ 的取值范围.

解法 1 设 $f(x)=ax^2+bx$.

$\because \begin{cases} f(-1)=a-b, \\ f(1)=a+b, \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} a=\frac{1}{2}[f(1)+f(-1)], \\ b=\frac{1}{2}[f(1)-f(-1)]. \end{cases}$

$\therefore$ $f(2)=4a+2b=3f(1)+f(-1)$.

又 $6 \leqslant 3f(1) \leqslant 12, 1 \leqslant f(-1) \leqslant 2$，

$\therefore\quad 7\leqslant f(2)\leqslant 14.$

解法2 设 $f(2)=\alpha f(1)+\beta f(-1)$.

$\because\quad 4a+2b=\alpha(a+b)+\beta(a-b)$,

即 $4a+2b=(\alpha+\beta)a+(\alpha-\beta)b$,

$\therefore\ \begin{cases}4=\alpha+\beta,\\ 2=\alpha-\beta,\end{cases}\ \therefore\ \begin{cases}\alpha=3,\\ \beta=1.\end{cases}$

以下同解法1.

训练

A 组

16. 若 $a,b\in\mathbf{R}$,则下列命题中真命题是( )

(A) 若 $|a|>b$,则 $a^2>b^2$

(B) 若 $a<b<0$,则 $b^2>a^2$

(C) 若 $a>|b|$,则 $a^2>b^2$

(D) 若 $a>b$,则 $\left(\frac{1}{2}\right)^a>\left(\frac{1}{2}\right)^b$

17. $x>2$ 是 $\frac{2}{x}<1$ 的( )

(A) 充分必要条件

(B) 充分非必要条件

(C) 必要非充分条件

(D) 既非充分也非必要条件

18. $\begin{cases}1<x+y<3,\\ 0<xy<2\end{cases}$ 是 $\begin{cases}0<x<1,\\ 1<y<2\end{cases}$ 的________条件.

19. 已知 $-3<x<y<1$, $-4<z<0$,则 $(x-y)z$ 的取值范围是________.

B 组

20. a,b 为实数,则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ 成立的一个充分非必要条件是( )

(A) $b<a<0$　　(B) $a<b$

(C) $b(a-b)>0$　　(D) $a>b$

21. 已知 $f(x)=ax^2-c$,且 $-4\leqslant f(1)\leqslant -1$, $-1\leqslant f(2)\leqslant 5$,求 $f(3)$ 的取值范围.

22. 在△ABC 中,若 $c^2=a^2+b^2$,则△ABC 为直角三角形.若 $c^n=a^n+b^n$ $(n>2)$,试判断△ABC 的形状,并说明理由.

23. 某商厦计划出售 A 型电子琴和 B 型洗衣机.商厦根据实际情况和市场需求,得到有关数据如下表(单位:百元):

	A 型电子琴	B 型洗衣机
单位进价	30	20
单位工资支出	5	10
单位利润	6	8

已知该商厦用于进货的资金不得超过 30 万元,用于支付工资的资金不得超过 11 万元.问应如何确定两种货物的月供应量,可以使得总利润达到最大?最大利润是多少?

6.2 算术平均数与几何平均数

课时 1

例说

例1 已知 x,y,z 都为正数,且 $xyz(x+y+z)=1$,求证 $(x+y)(y+z)\geqslant 2$.

证明 由已知得 $xz>0$, $y(x+y+z)>0$.

又 $xyz(x+y+z)=1$,

$\therefore\quad (x+y)(y+z)$

$=xy+xz+y^2+yz$

$=xz+y(x+y+z)$

$\geqslant 2\sqrt{xz\cdot y(x+y+z)}=2$,

即$(x+y)(y+z)\geqslant 2$.

注意

在不能直接运用 $a^2+b^2\geqslant 2ab$, $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ $(a>0,b>0)$ 等基本不等式时，可考虑将所求证的不等式的左边或右边的代数式先适当变形，包括展开或重组等，使之能适用基本不等式. 当题设中含有相等关系时，要认真观察这些相等关系的形式特征，这对代数式的变形具有导向作用.

例 2 设 $a>0$，且 $a\neq 1$，试比较 $\frac{1}{2}\log_a t$ 与 $\log_a\frac{t+1}{2}$ 的大小.

解 $\frac{1}{2}\log_a t-\log_a\frac{t+1}{2}$

$=\log_a\sqrt{t}-\log_a\frac{t+1}{2}=\log_a\frac{2\sqrt{t}}{t+1}$.

$\because\ t+1\geqslant 2\sqrt{t}$, $\therefore\ 0<\frac{2\sqrt{t}}{t+1}\leqslant 1$.

(1) 当 $0<a<1$ 时，$\log_a\frac{2\sqrt{t}}{1+t}\geqslant 0$，

$\therefore\ \frac{1}{2}\log_a t\geqslant\log_a\frac{t+1}{2}$（当且仅当$t=1$时取“=”号).

(2) 当 $a>1$ 时，$\log_a\frac{2\sqrt{t}}{t+1}\leqslant 0$，

$\therefore\ \frac{1}{2}\log_a t\leqslant\log_a\frac{t+1}{2}$（当且仅当$t=1$时取“=”号).

注意

本题是一道不等式与对数知识的综合应用题，宜采用作差的方法，并结合对数函数与不等式的性质，进行变形求解，特别需对字母 a 进行讨论.

例 3 已知 $a>0,b>0$，且 $a+b=1$，求证 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant 4$.

分析 从已知出发考察问题，一条思路是由 $a+b=1$，将左边代数式作如下变形：$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{a}+\frac{a+b}{b}=2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$. 另一条思路是由 $a+b=1$，得 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=(a+b)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$.

证法 1 $\because\ a>0,b>0$，且 $a+b=1$，

$\therefore\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2+2=4$.

证法 2 $\because\ a>0,b>0$，

$\therefore\ a+b\geqslant 2\sqrt{ab}>0$， ①

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{ab}}>0$. ②

由①×②，得$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqslant 4$.

又 $a+b=1$，$\therefore\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant 4$.

注意

1. 本题的证法 2 中运用了不等式的性质：如果 $a>b>0$，且 $c>d>0$，那么 $ac>bd$. 运用这一性质除了要求不等式同向外，还要求不等式两边都是正数.

2. 由本题不难得到下面一个重要的性质：如果 $a>0$，$b>0$，那么 $\frac{a+b}{2}\geqslant\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

3. 本题还可以通过三角代换，运用公式“$a^2+b^2\geqslant 2ab$”来证明.

$\because\quad a>0,b>0,a+b=1$，

令 $a=\cos^2\alpha,b=\sin^2\alpha$，

$\therefore\quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=(1+\tan^2\alpha)+(1+\cot^2\alpha)$

$=2+(\tan^2\alpha+\cot^2\alpha)\geqslant 2+2=4$.

训练

A 组

1. 若 $a>0,b>0$，且 $a\neq b$，则下列各式恒成立的是(　　)

(A) $\frac{2ab}{a+b}<\frac{a+b}{2}<\sqrt{ab}$

(B) $\sqrt{ab}<\frac{2ab}{a+b}<\frac{a+b}{2}$

(C) $\frac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}$

(D) $\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}<\frac{2ab}{a+b}$

2. 一批救灾物资随 26 辆汽车从某市以 v km/h的速度直达灾区，已知两地公路长 400 km. 为了安全起见，两辆车的间距不得小于 $\left(\frac{v}{20}\right)^2$ km，那么这批物资全部运到灾区，至少需要(　　)

(A) 5 h　　(B) 10 h

(C) 15 h　　(D) 20 h

3. 设 a,b 是不等于 1 的正数，则 $M=\log_a b+\log_b a$ 的取值范围是________.

4. 已知 $0<a<1,0<b<1$，且 $a\neq b$，那么 $a+b,2\sqrt{ab},a^2+b^2,2ab$ 中最大的是________.

B 组

5. 已知 $a>0,b>0,c>0,d>0$，求证 $\left(\frac{b}{a}+\frac{d}{c}\right)\left(\frac{c}{b}+\frac{a}{d}\right)\geqslant 4$.

6. 已知 $a>0,b>0,c>0$，求证 $\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\geqslant 6$.

7. 已知 $a>b>c,n\in\mathbf{N}^*$，且 $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\geqslant\frac{n}{a-c}$ 恒成立，求 n 的最大值.

8. 已知 $a,b,c\in(0,+\infty)$，求证 $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\geqslant a+b+c$.

课时 2

例说

例 4 已知 $x>1$，求 $3x+\frac{4}{x-1}+1$ 的最小值.

解 $\because\quad x>1,\quad\therefore\quad x-1>0$.

$3x+\frac{4}{x-1}+1=3(x-1)+\frac{4}{x-1}+4$

$\geqslant 2\sqrt{3(x-1)\cdot\frac{4}{x-1}}+4=4\sqrt{3}+4$.

当且仅当 $3(x-1)=\frac{4}{x-1}$，

即 $x=1+\frac{2}{3}\sqrt{3}$时，取“=”号.

∴ $3x+\frac{4}{x-1}+1$ 的最小值为 $4\sqrt{3}+4$.

注意

利用两个正数的算术平均数与几何平均数之间的关系：$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$，$ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$，我们可以求某些函数的最大值和最小值. 当 a,b 均为正数时，若和为定值则积有最大值；积为定值则和有最小值，但必须满足 $a=b$. 因为不等式公式中取等号是有条件的，所以在求最大(小)值时，必须检验使等号成立的 a,b 是否存在，并指出 a,b 为何值时才能取到最大(小)值.

例 5 若直角三角形的内切圆半径为 1，求其面积的最小值.

解 设直角三角形的两直角边、斜边长分别为 a,b,c，其面积为 S. 由已知得

$\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}(a+b+c)$，

即 $ab=a+b+\sqrt{a^2+b^2}$.

∵ $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$，$a^2+b^2\geqslant 2ab$，

∴ $ab\geqslant 2\sqrt{ab}+\sqrt{2ab}=(2+\sqrt{2})\sqrt{ab}$，

∴ $\sqrt{ab}\geqslant 2+\sqrt{2}$，

∴ $S=\frac{1}{2}ab\geqslant\frac{1}{2}(2+\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{2}$.

当 $a=b=2+\sqrt{2}$ 时，面积有最小值 $3+2\sqrt{2}$.

注意

1. 本例还可这样求解：

∵ $r=\frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{2}=1$，

∴ $(a+b-2)^2=(\sqrt{a^2+b^2})^2$，

得 $a=\frac{2(b-1)}{b-2}$. $S=\frac{1}{2}ab=\frac{b^2-b}{b-2}=(b-2)+\frac{2}{b-2}+3\geqslant 2\sqrt{2}+3$，当且仅当 $b-2=\frac{2}{b-2}$，即 $b=2+\sqrt{2}$ 时，取“=”号.

2. 不等式的证明，离不开代数式的变形，代数式的变形又常以题设中的相等关系为依据. 对于几何问题，就需要我们去发现那些与求解、证明相关的相等关系. 如本例中的“$\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}(a+b+c)$”.

例 6 甲、乙两地相距 s 千米，汽车从甲地匀速行驶到乙地，速度不得超过 c 千米/时. 已知汽车每小时的运输成本(以元为单位)由可变部分和固定部分组成，可变部分与速度 v(千米/时)的平方成正比，且比例系数为 b，固定部分为 a 元.

(1) 把全部运输成本 y(元)表示为速度 v(千米/时)的函数，并指出这个函数的定义域；

(2) 为了使全程运输成本最小，汽车应以多大的速度行驶？

解 (1) 依题意可知，汽车从甲地匀速行驶到乙地所用时间为 $\frac{s}{v}$，全程运输成本为

$y=a\cdot\frac{s}{v}+bv^2\cdot\frac{s}{v}=s\left(\frac{a}{v}+bv\right)$.

因 $v>0$，且 $v\leqslant c$，故所求函数的定义域为 $0<v\leqslant c$.

(2) 由题意可知 s,a,b,v 都为正数，故有 $s\left(\frac{a}{v}+bv\right)\geqslant 2s\sqrt{ab}$.

当且仅当 $\frac{a}{v}=bv$，即 $v=\sqrt{\frac{a}{b}}$ 时上式中等号成立.

①若$\sqrt{\dfrac{a}{b}}\leqslant c$,则当 $v=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$时,全程运输成本 y 最小.

②若$\sqrt{\dfrac{a}{b}}>c$,当 $v\in(0,c]$时,有

$$s\left(\frac{a}{v}+bv\right)-s\left(\frac{a}{c}+bc\right)$$

$$=s\left[\left(\frac{a}{v}-\frac{a}{c}\right)+(bv-bc)\right]$$

$$=\frac{s}{vc}(c-v)(a-bcv).$$

$\because$ $c-v\geqslant 0$,且 $a>bc^2$,

$\therefore$ $a-bcv\geqslant a-bc^2>0$.

$\therefore$ $s\left(\dfrac{a}{v}+bv\right)\geqslant s\left(\dfrac{a}{c}+bc\right)$,当且仅当 $v=c$ 时取等号,即当 $v=c$ 时,全程运输成本 y 最小.

综上知,为使全程运输成本 y 最小,当$\sqrt{\dfrac{a}{b}}\leqslant c$ 时,行驶速度应为 $v=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$;当$\sqrt{\dfrac{a}{b}}>c$ 时,行驶速度应为 $v=c$.

注意

求实际问题中的某一个量的最大或最小值时,应先根据题意设适当的变量,建立相应的函数关系式,然后把所要解决的问题抽象为求某一函数的最大值或最小值的问题.这也是把实际问题数学化,建立数学模型的过程.应用“$\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ ($a>0$, $b>0$)”等不等式求实际问题中的最大(小)值时,还需检验“=”号成立的条件是否符合实际以及等号是否会成立.

训练

A 组

9. $x<0$,当 $x=$____时,$y=4-2x-\dfrac{3}{x}$的最小值是____.

10. $x>0$,当 $x=$____时,$y=\dfrac{x}{x^2+2}$的最大值是____.

11. $0<x<\dfrac{1}{4}$,当 $x=$________时,$y=\sqrt{x(1-4x)}$的最大值是____.

12. $a>0$,$b>0$,$a^2+\dfrac{b^2}{2}=1$,当 $a=$____,$b=$____时,$y=a\sqrt{1+b^2}$的最大值是____.

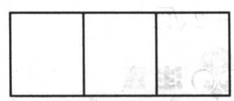
B 组

13. 已知 $a>0$,$b>0$,且 $ab-(a+b)=1$,求 $a+b$的最小值.

14. 若直角三角形的周长为 1,求它的面积的最大值.

15. 经计算可发现:$\sqrt{7}+\sqrt{15}<2\sqrt{11}$,$\sqrt{5.5}+\sqrt{16.5}<2\sqrt{11}$,$\sqrt{3-\sqrt{3}}+\sqrt{19+\sqrt{3}}<2\sqrt{11}$,…,试写出一个使$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant 2\sqrt{11}$成立的正实数 a,b 满足的条件,并给出证明.

16. 某工厂拟建一座平面图为矩形且面积为 200 平方米的三级污水处理池,如图.如果池外圈周壁建造单价为每米 400 元,中间两条隔墙建造单价为每米 248 元,池



(第 16 题)