高联考研

2007年

李永乐·李正元考研数学⑫

数学四

【经济类】

数学

全真模拟经典400题

主编 清华大学 李永乐
北京大学 范培华
中国人民大学 袁荫棠

国家行政学院出版社

2007年李永乐·李正元考研数学⑫

数学全真模拟经典400题

（经济类·数学四）

主　编　清华大学　李永乐
北京大学　范培华
中国人民大学　袁荫棠

编　者　（以姓氏笔画为序）
北京大学　刘西垣
北京大学　李正元
清华大学　李永乐
中国人民大学　严　颖
北京大学　范培华
中国人民大学　袁荫棠
空军雷达学院　徐宝庆
东北财经大学　龚兆仁
天津财经学院　鹿立江

国家行政学院出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学全真模拟经典400题．数学．4：经济类/李永乐，范培华，袁荫棠主编．
-北京：国家行政学院出版社，2004
ISBN 7-80140-343-6

Ⅰ．数… Ⅱ．①李… ②范… ③袁… Ⅲ．高等数学-研究生-入学考试-习题
Ⅳ．013-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2004）第058730号

数学全真模拟经典400题
［经济类·数学四］
李永乐 范培华 袁荫棠 主编
*
国家行政学院出版社出版发行
北京市海淀区长春桥路6号
邮政编码：100089
发行电话：88517082
新华书店经销
北京市朝阳印刷厂印刷
*
787×1092 1/16开本 12.75印张 320千字
2006年8月第3版 2006年8月第1次印刷
ISBN 7-80140-343-6/O·37 定价：19.00元

前　　言

本套书（**李永乐、李正元考研数学系列——《数学复习全书》及《数学全真模拟经典400题》等，国家行政学院出版社**）出版、修订多年以来，深受全国广大考生的好评和厚爱，受到专家同行的肯定，认为在编写体例和内容上有“自己的特色”和“较高的水准及较强的针对性”，较“适合考生的需要”，我们深感欣慰。《**2007年考研数学全真模拟经典400题**》根据2007年考试大纲的考试内容、考试要求及试卷结构重新编写，将以更高的质量和新的面貌呈现在广大考生的面前。

本书特点：

1. **每题均全新优化设计，综合性强**

为使考研同学考前多一些查漏补缺的机会，多见一些新题型，多一些针对性，考试中多一份把握，我们特优化设计或改编了10套模拟试题，这10套题完全不同，没有重复题；在内容设计上，每道题均涉及两个以上知识点，有些综合题甚至涉及到3个考点或更多，这些题涵盖新大纲所有考查知识点。通过这10套全新优化设计的试题训练，我们相信一定能提高您的数学的分析问题、解决问题的能力。

2. **注重归纳总结，力求一题多解，解答规范、详细**

我们在设计这10套试题时，无论是选择题、填空题，还是解答题（包括证明题），每道题设有：①分析——该题的解题步骤和解题思路、方法；②解答——该题的详细、规范解题过程；③评注——该题所考查的知识点（或命题意图）、解题思路归纳总结和延伸、常见错误和注意事项。同时，在解题过程中，力求一题多解，扩展考生的视野和思路，比较各种解题方法的特点和适用范围，从而提高考生的应试水平。

本书使用说明：

1. 本书是依据2007年考研数学大纲为2007年考研读者全新优化设计的一本全真模拟训练题集，本书中的试题难度略高于2006年考研试题，解答题（包括证明题）体现了考试重点、难点内容，综合性比较强；选择题与填空题着重考查考生对基本概念、基本公式、基本定理的理解和运用，适用于第二阶段复习训练之用。

2. 本书中的每道题均有较透彻的分析、详细解答、归纳总结的评注，因此希望考生在做题时，如果遇到了困难，不要急于看分析和解答，一定要多思考，只有这样才能达到本书编写的目的，才能提高应试水平，才能取得好成绩。

3. 考生在使用本书之前，应仔细研读《2007年考研数学复习全书》（经济类），弄清《考试大纲》中要求掌握的基本概念、基本定理和基本方法，掌握《2007年考研数学复习全书》（经济类）中所介绍的解题方法、技巧和思路。

特别提醒考生注意：①本书编撰者长期从事于清华大学、北京大学、中国人民大学等重点高校的相关教学，考研辅导经验丰富，并且是各自领域的专家学者，具有足够的专业素养。更重要的是，本书编撰者不辞辛苦，认真钻研考试大纲的考试内容和考试要求，归纳总结考生在学习中的不足及近年来考研数学考试的命题规律，尽力做到考研辅导和考研辅导资料的编写具有很强的针对性和有效性。在编写本书的过程中，编撰者都从头到尾坚持自己亲自完成本书的编写任务，决不假手他人，更不会“借”他人的东西。在这个意义上，“经典”两字实际上是本书编撰者对自己的严格要求。

②为了提高同学数学分析和解决问题的能力，本书所编题目难度较大，有的题目涉及3个以上的考点、综合运用性比较高，概念运用性较强，如果考生在做本书试题感到棘手时，请不要急，更不要泄气，应静下心来，仔细分析题目所考查的是哪些知识点，回忆《数学复习全书》（经济类）所介绍的解题方法，然后再动手做题。我们希望考生一定要动手做题，不要一看了事。

鉴于以上两点，我们希望考生认真对待本书中每道题，对本书中的每套题至少要做二至三遍。我们相信在2007年考研数学考试中，您肯定会感到有些题“似曾相识”、甚至“一见如故”。

在本书的编写、编辑和成书过程中，由于时间紧、任务重，尽管我们认真对待和严格要求，仍难免有不尽如意的地方，诚请广大读者和同行批评指正。

愿这本《经典400题》能对广大考生有所帮助，为实现考研目标助一臂之力！

说明：为了使本书更具有针对性，减轻考生的经济负担，我们将原《数学全真模拟经典400题》（数学三、数学四合订本）改为数学三、数学四单行本，书名继续沿用《数学全真模拟经典400题》。

编　者

2006年8月

目　录

第 1 部分　考生必须了解的信息

第 2 部分　新增考点专题训练

第 3 部分　全真模拟经典试题

第 4 部分　全真模拟经典试题答案及详解

第1部分

考生必须了解的信息

一、2007年考研数学考试大纲修订情况

(一) 关于试卷结构

1. 内容比例

(1) 微积分由原来的"约50%"调整为"约56%".

(2) 线性代数、概率论均由原来的"约25%"调整为"约22%".

2. 题型比例

(1) 填空题与选择题由原来的"约40%"调整为"约45%".

注意:今年大纲关于"填空题与选择题"有比较大的调整.第一,将原来的"一、填空题"、"二、选择题"分别调整为"一、选择题"、"二、填空题";第二,填空题题量没有变化,但其内容比例有所调整,即微积分内容的填空题由原来的"3道题"调整为"4道题",线性代数内容的填空题由原来的"2道题"调整为"1道题";选择题的题量及分值有较大的调整:其所占分值由原来的"32分"改为"40分",同时其题量由原来的"8道"改为"10道",即关于微积分内容和线性代数内容各增加了1道选择题.

(2) 解答题(包括证明题)由原来的"约60%"调整为"约55%".具体来说,题量由原来的"9道题"调整为"8道题",即减少了1道关于微积分内容的解答题.

(二) 关于考试内容和考试要求

1. 微积分

(1) 将"无穷小(大)"修订为"无穷小(大)量",将"广义(二重)积分"修订为"反常(二重)积分".

(2)"一、函数、极限、连续"考试要求的第6条中,将原来的"…… 会应用两个重要极限"修订为"…… 掌握利用两个重要极限求极限的方法",以便与数学一、二、三相统一.

(3)"二、一元函数微分学"考试内容增加了"平面曲线的切线与法线"之内容,同时在其考试要求的第1条中增加了"会求平面曲线的切线方程和法线方程".

(4)"二、一元函数微分学"考试要求的第5条中增加了"了解柯西(Cauchy)中值定理",并要

求掌握其简单应用.

(5)“二、一元函数微分学”考试要求的第 7 条中增加了“了解函数极值的概念”之内容.

(6)“三、一元函数积分学”考试要求的第 3 条中增加了“会利用定积分计算函数的平均值”之内容.

(7)“四、多元函数微积分学”考试要求的第 2 条中,将原来的“了解二元函数的极限与连续的直观意义”修订为“了解二元函数的极限与连续的概念”.

(8)“四、多元函数微积分学”考试要求的第 3 条中,将原来的“…… 会用隐函数的求导法则”修订为“…… 会求多元隐函数的偏导数”.

2. 线性代数

今年大纲增加了“二次型”,其考试内容和考试要求分别为:

(1) 考试内容

二次型及其矩阵表示　合同变换与合同矩阵　二次型的秩　惯性定理　二次型的标准形和规范形　用正交变换和配方法化二次型为标准形　二次型及其矩阵的正定性

(2) 考试要求

① 了解二次型的概念,会用矩阵形式表示二次型,了解合同变换和合同矩阵的概念.

② 了解二次型的秩的概念,了解二次型的标准形、规范形等概念,了解惯性定理,会用正交变换和配方法化二次型为标准形.

③ 理解正定二次型、正定矩阵的概念,并掌握其判别法.

3. 概率论

(1)“二、随机变量及其分布”考试要求的第 2 条中增加了“几何分布”的内容,并要求掌握其应用.

(2) 将原来的“五、中心极限定理”改为“五、大数定律和中心极限定理”,相应地,其考试内容增加了“切比雪夫大数定律”、“伯努利(Bernoulli)大数定律”、“辛钦(Khinchine)大数定律”等内容,其考试要求也增加了 1 条,即“1. 了解切比雪夫大数定律、伯努利大数定律和辛钦大数定律(独立同分布随机变量序列的大数定律).”

二、2006 年考研数学试题特点剖析

2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题全面考查基本概念、基本理论和基本运算,紧扣考试大纲,涉及知识面宽,体现了“厚基础、重能力”的命题指导思想.题目难易适中且有所创新,注重考查综合运用知识的能力.

1. 注重基础知识

注重基础知识是 2006 年试题的突出特点,考生只要掌握好基本概念和基本思想,就可以正确解答这些题目.如数学四中求极限的第(15)题,本题是一道基本计算题,考查的主要知识点有“$\frac{0}{0}$”型和“$\infty-\infty$”型极限的求法、洛必达法则以及等价无穷小量的代换性质等,只要考生基本功扎实,就可以答对此题.又如数学四中第(22)题,本题主要考查随机变量函数的概率密度的求法及二维随机变量分布函数的定义.

在对基本原理的考查上,主要考查数学思想及其灵活应用.如数学四第(11)题,考查函数条件极值的必要条件,只要运用函数无条件极值的必要条件的概念,即可推出结论.

2. 题目解法灵活多样

2006 年的数学试题考查了考生的发散思维能力和对知识综合运用的能力，如果考生能用简便方法解题，可以节省出答题时间，有效解决答题时间不够用的问题．如数学四第(21)题，本题主要考查实对称矩阵对角化的逆问题．由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是属于0的特征向量．又由 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和为3，知 $(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于3的特征向量，于是 $\boldsymbol{A}$ 的所有的特征值、特征向量均求出，从而本题就成为一个常规题了．该题目新颖且不落俗套，但难度并不高，而且解法灵活多样．此外，试卷中的一些试题虽然是基本题，但知识点增多，考查学生运用交叉知识解决较复杂问题的能力．

3. 分步设问，梯次递进

2006 年的很多数学试题在设计上先搭一个台阶，引导考生的思路，便于考生上手．

4. 试题没有偏题怪题

2006 年数学试题不偏不怪，难度适中，考生只需从基本概念入手就可以解决问题，而不需要高难的技巧．比如数学四的第(11)、(18)、(23)题等题，这些试题考查了基本的概念和原理，考生只有基本功过硬才能得高分，而只靠背题型、临时突击掌握一些解题的套路是不行的．

5. 试题难度下降

与 2005 年相比，2006 年数学试题的难度进行了有效的调整，难度有所下降，符合考生的实际水平．试题降低了对高难度技巧的要求，但不降低对知识点的要求．

三、思考与建议

通过阅卷，我们发现考生存在的问题有：

(1) 考生存在的主要问题是，基础知识不牢固，很多考生只是背题型，按照套路做题，对基本概念不够重视，理解不深，不能灵活应用，不能从基本概念入手解决问题．

(2) 考生存在的另一个问题是综合运用知识的能力较差，其原因是数学解题能力没有达到要求，遇到新题型不能综合地应用知识解决问题．

针对上述存在的问题，建议考生在复习中首先强化基本概念、基本理论和基本运算，然后加强综合训练．考生应注意积累解题方法，一题多解的题目要选择简便解法，以便节省时间，提高效率．

第2部分

新增考点专题训练

一、微积分

▶ 关于平面曲线的切线方程与法线方程及其应用

【题 1】 设曲线 $f(x)=x^n$ 在点 $(1,1)$ 处的切线与 x 轴的交点为 $(\xi_n,0)$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(\xi_n)=$ ________.

【分析】 因曲线 $f(x)=x^n$ 在点 $(1,1)$ 处切线的斜率

$$k=f'(1)=nx^{n-1}\Big|_{x=1}=n,$$

故切线方程为 $y=1+n(x-1)$，令 $y=0$，得 ξ_n 满足 $0=1+n(\xi_n-1)$，即 $\xi_n=1-\dfrac{1}{n}$，因此，

$$\lim_{n\to\infty}f(\xi_n)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}.$$

> **评注** 本题主要考查函数在某点导数的几何意义和重要极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$.

【题 2】 曲线 $y=\ln x$ 上与直线 $x+y=1$ 垂直的切线方程为________.

【分析】 即求曲线 $y=\ln x$ 上斜率为 1 的切线方程．解

$$y'=(\ln x)'=\frac{1}{x}=1$$

得 $x=1$，因此所求切线方程为 $y=x-1$.

【题 3】 曲线 $\begin{cases}x=e^t\sin 2t,\\ y=e^t\cos t\end{cases}$ 在 $(0,1)$ 处的法线方程为________.

【分析】 $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}=\dfrac{\cos t-\sin t}{\sin 2t+2\cos 2t}$． $(x,y)=(0,1)$ 对应 $t=0$， $y'_x\Big|_{t=0}=\dfrac{1}{2}$，

所求法线方程为 $y-1=-2x$，即 $2x+y=1$.

【题 4】 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t^2+2t,\\ y=\ln(1+t)\end{cases}$ 确定，则曲线 $y=y(x)$ 在 $x=3$ 处的法

线与 x 轴交点的横坐标是

(A) $\frac{1}{8}\ln2+3$.　　(B) $-\frac{1}{8}\ln2+3$.　　(C) $-8\ln2+3$.　　(D) $8\ln2+3$.

【　　】

【分析】 $x=3$ 时对应 $t=1$($t=-3$ 不合题意),相应地 $y=\ln2$. 为求法线,先求切线的斜率

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=3}=\left.\frac{y'_t}{x'_t}\right|_{t=1}=\left.\frac{\frac{1}{1+t}}{2(t+1)}\right|_{t=1}=\frac{1}{8}.$$

于是,$y=y(x)$ 在 $x=3$ 处的法线方程为 $y=\ln2-8(x-3)$.

令 $y=0$ 得法线与 x 轴交点的横坐标是 $x=\frac{1}{8}\ln2+3$. 故应选(A).

【题5】 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $e^{2x+y}-\cos(xy)=e-1$ 所确定,则曲线 $y=f(x)$ 在点(0,1)处的法线方程为________.

【分析】 点(0,1)在曲线上. 方程两边对 x 求导得 $e^{2x+y}(2+y')+\sin(xy)(xy'+y)=0$.

以 $x=0,y=1$ 代入得 $e(2+y')=0$, $\left.y'\right|_{x=0}=-2$.

所求法线方程为 $y-1=\frac{1}{2}x$,即 $x-2y+2=0$.

【题6】 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $xy+2\ln x=y^4$ 所确定,则曲线 $y=f(x)$ 在点(1,1)处的切线方程是________.

【分析】 点(1,1)在曲线上. 方程两边对 x 求导,得 $xy'+y+2\frac{1}{x}=4y^3y'$.

以 $x=y=1$ 代入,得 $y'+1+2=4y'$, $y'=1$.

点(1,1)处的切线方程为 $y-1=x-1$,即 $y=x$.

【题7】 已知曲线的极坐标方程是 $r=1-\cos\theta$,求该曲线上对应于 $\theta=\pi/6$ 处的切线与法线的直角坐标方程.

【解】 极坐标曲线 $r=1-\cos\theta$ 在直角坐标系的参数方程为 $\begin{cases}x=(1-\cos\theta)\cos\theta,\\y=(1-\cos\theta)\sin\theta.\end{cases}$ 又

$$y'_x=\frac{y'_\theta}{x'_\theta}=\frac{\sin^2\theta-\cos^2\theta+\cos\theta}{\sin\theta(2\cos\theta-1)},$$

且 $\left.x\right|_{\theta=\pi/6}=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\frac{\sqrt{3}}{2})$, $\left.y\right|_{\theta=\pi/6}=\frac{1}{2}(1-\frac{\sqrt{3}}{2})$, 而 $\left.y'_x\right|_{\theta=\pi/6}=1$,

故所求切线方程为 $y-\frac{2-\sqrt{3}}{4}=x-\frac{2\sqrt{3}-3}{4}$.

法线方程为 $y-\frac{2-\sqrt{3}}{4}=-x+\frac{2\sqrt{3}-3}{4}$.

【题8】 对数螺线 $\rho=e^\theta$ 在点 $(\rho,\theta)=(e^{\pi/2},\frac{\pi}{2})$ 处的切线的直角坐标方程为________.

【分析】 求切线方程的主要问题是求其斜率 $k=y'_x$,而 y'_x 可由 $\rho=e^\theta$ 的参数方程

$$\begin{cases}x=e^\theta\cos\theta,\\y=e^\theta\sin\theta\end{cases}$$

求得： $y'_x = \dfrac{y'_\theta}{x'_\theta} = \dfrac{e^\theta\sin\theta + e^\theta\cos\theta}{e^\theta\cos\theta - e^\theta\sin\theta} = \dfrac{\sin\theta + \cos\theta}{\cos\theta - \sin\theta}$， $y'_x\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -1$.

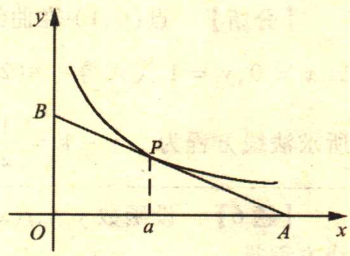
而 $x\Big|_{\theta=\pi/2} = 0$， $y\Big|_{\theta=\pi/2} = e^{\pi/2}$，从而切线方程为 $y - e^{\pi/2} = -x$，即 $x + y = e^{\pi/2}$.

评注 本题的难点在于极坐标方程与直角坐标方程之间的转换．希望考生注意此类试题的训练．

【题 9】 曲线 $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 的切线与 x 轴和 y 轴围成一个图形，记切点的横坐标为 a．试求切线方程和这个图形的面积．当切点沿曲线趋于无穷远时，该面积的变化趋势如何？

【分析】 求切线方程和图形的面积是微积分在几何上的基础应用问题，本题的一个难点是：应如何理解切点沿曲线趋于无穷远？它分别对应于 $a \to +\infty$ 和 $a \to 0^+$ 两种情形．不要忘记 $a \to 0^+$ 这种情况．

【解】 由 $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$，得 $y' = -\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$，则切点 $P(a, \dfrac{1}{\sqrt{a}})$ 处的切线方程为



$$y - \frac{1}{\sqrt{a}} = -\frac{1}{2\sqrt{a^3}}(x - a).$$

切线与 x 轴和 y 轴的交点分别为 $A(3a, 0)$ 和 $B(0, \dfrac{3}{2\sqrt{a}})$，于是，$\Delta AOB$ 的面积为

$$S = \frac{1}{2}\cdot 3a \cdot \frac{3}{2\sqrt{a}} = \frac{9}{4}\sqrt{a},$$

当切点沿 x 轴正方向趋于无穷远时，有 $\lim\limits_{a\to+\infty} S = +\infty$；

当切点沿 y 轴正方向趋于无穷远时，有 $\lim\limits_{a\to 0^+} S = 0$.

【题 10】 已知 $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数，它在 $x = 0$ 的某个邻域内满足关系式

$$f(1 + \sin x) - 3f(1 - \sin x) = 8x + \alpha(x),$$

其中 $\alpha(x)$ 是当 $x \to 0$ 时比 x 高阶的无穷小，且 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导，求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(6, f(6))$ 处的切线方程．

【分析】 $f(x)$ 是周期为 5 的函数，所以欲求曲线在点 $(6, f(6))$ 处的切线方程，只需求出 $f(x)$ 在点 $x = 1$ 处的函数值及导数 $f'(1)$．它们都可由给定的关系式得到，但只能由定义求 $f'(1)$．

【解】 由 $\lim\limits_{x\to 0}[f(1 + \sin x) - 3f(1 - \sin x)] = \lim\limits_{x\to 0}[8x + \alpha(x)]$，

得 $f(1) - 3f(1) = 0$，故 $f(1) = 0$．

又 $$\lim_{x\to 0}\frac{f(1 + \sin x) - 3f(1 - \sin x)}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{8x}{\sin x} + \frac{\alpha(x)}{x}\cdot\frac{x}{\sin x}\right] = 8,$$

设 $\sin x = t$，则有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1 + \sin x) - 3f(1 - \sin x)}{\sin x} = \lim_{t\to 0}\frac{f(1 + t) - f(1)}{t} + 3\lim_{t\to 0}\frac{f(1 - t) - f(1)}{-t}$$
$$= 4f'(1).$$

所以 $f'(1) = 2$.

由于$f(x+5)=f(x)$,所以 $f(6)=f(1)=0$, $f'(6)=f'(1)=2$,
故所求的切线方程为 $y=2(x-6)$,即 $2x-y-12=0$.

评注 本题是一个综合题,涉及到函数的周期性、连续性、极限、导数的定义及切线方程.问题的难点在只能用导数的定义求 $f'(1)$,因为题目的条件只是 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导,所以不能用其他的工具.

【题11】 已知两曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\int_0^{\arctan x} e^{-t^2}dt$ 在点 $(0,0)$ 处的切线相同,写出此切线方程,并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} nf(\frac{2}{n})$.

【解】 由已知条件得

$$f(0)=0,\quad f'(0)=\left(\int_0^{\arctan x} e^{-t^2}dt\right)'_x\Bigg|_{x=0}=\frac{e^{-\arctan^2 x}}{1+x^2}\Bigg|_{x=0}=1,$$

故所求切线方程为 $y=x$. 由导数定义及数列极限与函数极限的关系可得

$$\lim_{n\to\infty} nf(\frac{2}{n})=2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{f(\frac{2}{n})-f(0)}{\frac{2}{n}}\overset{*}{=\!=}2\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=2f'(0)=2.$$

评注 ① 设 $f(0)=0$,则 $f'(0)=A\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$. 设 $f(0)=0$, $f'(0)=A$,则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{f(x_n)}{x_n}=A$,其中 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$.

② 题解中"$*$"以下部分按洛必达法则计算不得分. 因为本题题设条件中未设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处具有连续的一阶导数,所以不能用洛必达法则做成

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{1}=f'(0)=1,$$

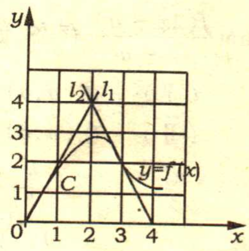
从而推知 $\lim\limits_{n\to\infty}n\, f\left(\dfrac{2}{n}\right)=2$.

当然更不能对 n 用洛必达法则,即

$$\lim_{n\to\infty}n\, f\left(\frac{2}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{2}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{f'\left(\frac{2}{n}\right)\left(-\frac{2}{n^2}\right)}{-\frac{1}{n^2}}=2f'(0).\qquad (\times)$$

③ 本题考查:求变上限确定的函数的导数,求切线方程,利用导数定义求极限.

【题12】 如右图,曲线 C 的方程为 $y=f(x)$,点 $(3,2)$ 是它的一个拐点,直线 l_1 与 l_2 分别是曲线 C 在点 $(0,0)$ 与 $(3,2)$ 处的切线,其交点为 $(2,4)$. 设函数 $f(x)$ 具有三阶连续导数,计算定积分 $\int_0^3(x^2+x)f'''(x)dx$.



【分析与求解】 按题意,直接可知

$f(0)=0, f(3)=2, f''(3)=0$(拐点的必要条件). 从图中还可求出 $y=f(x)$ 在点 $(0,0)$ 与 $(3,2)$ 处的切线分别为

$$y=2x,\quad y=-2x+8.$$

于是　　$f'(0)=2,\quad f'(3)=-2.$

现用分部积分法计算积分值：

$$\text{原式}=\int_0^3(x^2+x)\mathrm{d}f''(x)=(x^2+x)f''(x)\Big|_0^3-\int_0^3(2x+1)f''(x)\mathrm{d}x$$
$$=-\int_0^3(2x+1)\mathrm{d}f'(x)=-(2x+1)f'(x)\Big|_0^3+2\int_0^3 f'(x)\mathrm{d}x$$
$$=-7\cdot f'(3)+f'(0)+2f(x)\Big|_0^3=-7\cdot(-2)+2+2\cdot(2-0)=20.$$

评注　本题是一道简单的综合题，考查的主要是运算能力．本题涉及的知识点主要有导数的几何意义、拐点的必要条件、定积分的分部积分公式等．

▶ 关于柯西中值定理及其应用

【题 13】　设$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，开区间(a,b)内可导，$0\leqslant a<b\leqslant\frac{\pi}{2}$．证明在区间$(a,b)$内至少存在两点$\xi_1,\xi_2$，使

$$f'(\xi_2)\tan\frac{a+b}{2}=f'(\xi_1)\frac{\sin\xi_2}{\cos\xi_1}.$$

【分析】　由所求证的式子分析，可考虑分别对函数$\sin x$，$\cos x$在区间$[a,b]$上使用柯西中值定理，然后可从两式的比较中得到结果．

【证明】　设$g_1(x)=\sin x$，由柯西中值定理得

$$\frac{f(b)-f(a)}{\sin b-\sin a}=\frac{f'(\xi_1)}{\cos\xi_1},\quad a<\xi_1<b.$$

又设$g_2(x)=\cos x$，同理得

$$\frac{f(b)-f(a)}{\cos b-\cos a}=\frac{f'(\xi_2)}{-\sin\xi_2},\quad a<\xi_2<b.$$

比较两等式得

$$\frac{f'(\xi_1)}{\cos\xi_1}(\sin b-\sin a)=-\frac{f'(\xi_2)}{\sin\xi_2}(\cos b-\cos a).$$

从而
$$\frac{\sin\xi_2}{\cos\xi_1}f'(\xi_1)=-\frac{\cos b-\cos a}{\sin b-\sin a}f'(\xi_2),$$

即
$$\tan\frac{a+b}{2}\cdot f'(\xi_2)=\frac{\sin\xi_2}{\cos\xi_1}f'(\xi_1).$$

【题 14】　设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内可导，且$f'(x)>0$．若极限$\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(2x-a)}{x-a}$存在，证明：

（Ⅰ）　在(a,b)内$f(x)>0$；

（Ⅱ）　在(a,b)内存在点ξ，使

$$\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}=\frac{2\xi}{f(\xi)};$$

（Ⅲ） 在(a,b)内存在与（Ⅱ）中ξ相异的点η，使

$$f'(\eta)(b^2-a^2)=\frac{2\xi}{\xi-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

【分析】 本题考查的重点是微分中值定理，还涉及到函数连续、单调及变上限定积分的内容.（Ⅰ），（Ⅱ）是为（Ⅲ）铺设的台阶. 证明此类题目需构造辅助函数. 将（Ⅲ）的结论变形为

$$\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}=\frac{2\xi}{f'(\eta)(\xi-a)},$$

从中可以得到启发：用柯西中值定理与拉格朗日中值定理先后确定ξ与η.

【证明】 （Ⅰ） 因为$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(2x-a)}{x-a}$存在，故$\lim\limits_{x\to a^+}f(2x-a)=0$，由$f(x)$在$[a,b]$上连续，从而$f(a)=0$. 又$f'(x)>0$，知$f(x)$在$(a,b)$内单调增加，故

$$f(x)>f(a)=0\quad x\in(a,b).$$

（Ⅱ） 设$F(x)=x^2,\quad g(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\quad(a\leqslant x\leqslant b)$，

则$g'(x)=f(x)>0$，故$F(x),g(x)$满足柯西中值定理的条件，于是在(a,b)内存在点ξ，使

$$\frac{F(b)-F(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t-\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t}=\left.\frac{(x^2)'}{\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)'}\right|_{x=\xi},$$

即

$$\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}=\frac{2\xi}{f(\xi)}.$$

（Ⅲ） 因$f(\xi)=f(\xi)-0=f(\xi)-f(a)$，在$[a,\xi)$上应用拉格朗日中值定理，知在$(a,\xi)$内存在一点$\eta$，使$f(\xi)=f'(\eta)(\xi-a)$，从而由（Ⅱ）的结论得

$$\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}=\frac{2\xi}{f'(\eta)(\xi-a)},$$

即有

$$f'(\eta)(b^2-a^2)=\frac{2\xi}{\xi-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

▶ 利用定积分计算函数的平均值

【题 15】 函数$y=\dfrac{x+\sin x}{1+\cos x}$在区间$[0,\dfrac{\pi}{2}]$上的平均值为________.

【分析一】 因

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+\sin x)\,\mathrm{d}(\tan\frac{x}{2})$$

$$=(x+\sin x)\tan\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan\frac{x}{2}(1+\cos x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{2}+1-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan\frac{x}{2}\cdot 2\cos^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{2}+1-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}+1+\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2},$$

所以函数 y 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的平均值为 $\frac{1}{\frac{\pi}{2}-0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx=1$.

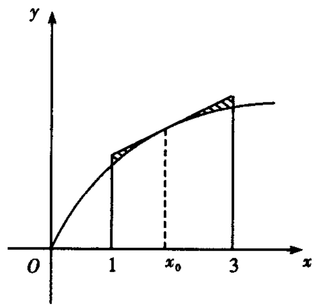
【分析二】 因 $\frac{x+\sin x}{1+\cos x}=\frac{x+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}+\tan\frac{x}{2}=(x\tan\frac{x}{2})'$,

于是 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx=(x\tan\frac{x}{2})\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$.

故所求函数在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的平均值为1.

【题16】 设函数 $f(x)=ax+b-2\sqrt{x}$ 在 $[1,3]$ 上非负,求常数 a,b,使函数 $f(x)$ 在区间 $[1,3]$ 上的平均值最小.

【分析】 令 $g(x)=ax+b,\varphi(x)=2\sqrt{x}$,则 $f(x)$ 是直线与抛物线之差,且直线在抛物线上方,要使函数 $f(x)$ 在区间 $[1,3]$ 上的平均值 $\frac{1}{3-1}\int_1^3 f(x)dx$ 最小,即积分 $\int_1^3 f(x)dx$ 最小,则 $g(x)$ 应为 $\varphi(x)$ 的切线.



【解】 设切点坐标为 $(x_0,2\sqrt{x_0})$,切线方程为

$$y-2\sqrt{x_0}=\frac{1}{\sqrt{x_0}}(x-x_0).$$

由于该切线斜率与 $g(x)=ax+b$ 的斜率相等,

故 $a=\frac{1}{\sqrt{x_0}}$, $b=\sqrt{x_0}$,从而 $a=\frac{1}{b}$.

代入积分 $I(a)=\int_1^3(ax+\frac{1}{a}-2\sqrt{x})dx=(\frac{1}{2}ax^2+\frac{1}{a}x)\Big|_1^3-2\int_1^3\sqrt{x}dx$

$$=4a+\frac{2}{a}-2\int_1^3\sqrt{x}dx,$$

令 $I'(a)=4-\frac{2}{a^2}=0 \Rightarrow a=\frac{1}{\sqrt{2}}$, 从而 $b=\sqrt{2}$.

此时 $I''(a)=\frac{4}{a^3}>0(\because a>0)$,所以 $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 是极大值点,也是最大值点.

【题17】 设函数

$$f(x)=\lim_{t\to\infty}t^2\sin\frac{x}{t}[g(2x+\frac{1}{t})-g(2x)],$$

又 $g(x)$ 的一个原函数为 $\ln(1+x)$,试计算函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的平均值.

【分析】 求函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的平均值,即求定积分 $\int_0^1 f(x)dx$.

【解】 $f(x)=\lim\limits_{t\to\infty}t^2\sin\frac{x}{t}[g(2x+\frac{1}{t})-g(2x)]$