JS

中、美奥数总领队担纲 东南地区指定培训教材

高中数学竞赛培训教材

高三分册

主编 李胜宏 [美]冯祖鸣

浙江大学出版社

高中数学竞赛培训教材

（高三分册）

主　　编　李胜宏　[美]冯祖鸣
编委名单（按姓氏笔画为序）
冯祖鸣　冯志刚　李胜宏
冷岗松　熊　斌　余红兵
朱华伟

浙江大學出版社

图书在版编目（CIP）数据

高中数学竞赛培训教材. 高三分册 / 李胜宏，冯祖鸣主编. 一杭州：浙江大学出版社，2005.10
ISBN 7-308-04510-2

Ⅰ. 高... Ⅱ. ①李...②冯... Ⅲ. 数学课 - 高中 - 教学参考资料 Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 119855 号

出版发行	浙江大学出版社 (杭州浙大路 38 号 邮政编码 310027) (E-mail:zupress@mail.hz.zj.cn) (网址:http://www.zjupress.com)
责任编辑	杨晓鸣 冯慈璜
排 版 者	杭州好友排版工作室
印 刷	杭州杭新印务有限公司
开 本	787mm×960mm 1/16
印 张	21.75
字 数	460 千
版 次	2005 年 10 月第 1 版 2005 年 11 月第 2 次印刷
印 数	0001—6000
书 号	ISBN 7-308-04510-2/G·977
定 价	26.00 元

《高中数学竞赛培训教材》部分作者介绍

冯祖鸣　美国菲利普艾斯特私立中学教师，第 44、45、46 届 IMO 美国队领队

冯志刚　第 44 届 IMO 中队副领队，上海中学特级教师

李胜宏　第 44、47 届 IMO 中国队领队，中国数学奥林匹克委员会委员，浙江大学教授、博士生导师

冷岗松　中国数学奥林匹克委员会委员，国家集训队教练，上海大学教授、博士生导师，第 47 届 IMO 中国队副领队

林　常　福建省中学数学奥林匹克竞赛教练，福建教育学院副教授

马茂年　浙江省数学特级教师，浙江师范大学数学教育硕士生导师，中国数学奥林匹克竞赛高级教练

熊　斌　第 46 届 IMO 中国队领队，中国数学奥林匹克委员会委员，华东师范大学副教授

陶平生　江西科技学院师范教授，江西省数学会副理事长，中国数学奥林匹克竞赛高级教练

余红兵　中国数学奥林匹克委员会委员，国家集训队教练，苏州大学教授、博士生导师

朱华伟　中国数学奥林匹克委员会委员，国家集训队教练，广州大学软件所常务副所长、研究员

编　写　说　明

国际数学奥林匹克竞赛在世界范围内愈来愈普及。有着深厚文化积淀的中国东南地区(闽、浙、赣)于2004年8月举办了"首届中国东南地区数学奥林匹克",其宗旨是通过竞赛来激发学生学习数学的兴趣和热情,并发现和培养一批数学苗子。要做到这一点,就必须遵照循序渐进的教学原则和辅导方法。"高中数学竞赛培训教材"丛书(高一、高二、高三共三个分册)就是以此为出发点而编写的一套培训教材。

丛书在构思和编写过程,着重知识的完备性和自我封闭性。丛书对初等数学的基本理论和一些典型问题的背景作了系统的介绍,对基本定理则给出了完备的证明。其目的是使学生不仅要知其然,还要知其所以然。这对培养学生的数学品格,提升学生的数学修养是大有裨益的。

在编写过程中,高一、高二分册的内容大体与高中教材同步,但在深度上逐步加深,引导学生循序渐进,通过学习使学生达到甚至超过联赛一试的水平;在广度上,除高中课本规定的知识外,还作了大量的补充,内容涉及CMO和IMO等数学知识,为学生更进一步的学习提供丰富的素材。高三分册是针对联赛二试而编写的,内容涉及各个高层次的数学竞赛,不同层次的学生可以灵活取舍。

丛书在材料的选取上,充分体现新理念,既强调数学思想和方法的传授,又注重数学解题能力和技巧的培养。这体现在:对经典材料的处理新视角化,对新颖材料的处理多视角化,力戒陈题和人云亦云,充分渗透编者的思想方法,使读者耳目一新。

在每个知识点上精选了一些典型的、新颖的,并有一定难度的例题,通过例题的讲解力求达到举一反三的目的。此外,还配备了适量的课外习题,供学生课外学习和研究。对这些习题只是提供了简单的解题思路,目的是希望学生自己去体验、去探究、去获取独立的数学知识。

丛书由浙江大学教授、博士生导师、全国数学奥林匹克领队李胜宏先生

和美国数学奥林匹克领队冯祖鸣博士主编,参加编写人员包括一批全国数学奥林匹克领队教练,以及闽、浙、赣三省长期从事数学奥林匹克竞赛辅导和研究的专家、学者、奥数高级教练、中学特级教师等。

参办本书编写的包括:浙江大学教授、博士生导师李胜宏(数列、函数方程),美国数学奥林匹克领队冯祖鸣博士(组合数学),上海大学教授、博士生导师冷岗松(不等式),华东师范大学副教授熊斌(平面几何),广州大学研究员朱华伟(多项式),苏州大学教授、博士生导师余红兵(数论),上海中学特级教师冯志刚(代数杂题),华东师大范端喜、郑仲义等也参与了编写。

目　　录

第一章　平面几何 …… 1

§1.1　三角形问题 …… 1
§1.2　共圆点、共线点、共点线问题 …… 6
§1.3　与圆有关的问题 …… 12
§1.4　面积问题与面积方法 …… 18
§1.5　几何变换 …… 24

第二章　数列 …… 28

§2.1　等差数列 …… 28
§2.2　等比数列 …… 33
§2.3　递归数列 …… 38
§2.4　求值 …… 46
§2.5　数列的有关性质 …… 51
§2.6　数列的存在性与构造 …… 64
§2.7　数列不等式与收敛性 …… 75
§2.8　数列的极限 …… 81

第三章　不等式 …… 87

§3.1　比较法与放缩法 …… 87
§3.2　变量代换法 …… 92
§3.3　局部调整法 …… 96
§3.4　构造方法 …… 100
§3.5　反证法 …… 105
§3.6　和式的不等式 …… 108

第四章　组合数学 …… 113

§4.1　二项式系数的性质 …… 113
§4.2　双射 …… 126
§4.3　递归 …… 137
§4.4　容斥原理 …… 149
§4.5　算两次 …… 162
§4.6　母函数 …… 176

第五章　数论问题 …… 190

第六章　多项式 …… 203

§6.1　多项式的运算 …… 203
§6.2　多项式的根 …… 209
§6.3　多项式的整除 …… 217
§6.4　多项式的方法与技巧 …… 221

第七章　函数方程 …… 228

§7.1　整数集上的函数方程 …… 230
§7.2　有理数集上的函数方程 …… 239
§7.3　实数集上的函数方程 …… 244
§7.4　更一般的函数方程 …… 250

第八章　代数杂题 …… 258

参考答案 …… 270

第一章　平面几何

§1.1　三角形问题

三角形是直线形中最简单而又最重要的一种基本图形.大家应把握好这样一些基本知识:三角形中边角之间的关系、正余弦定理、全等及相似的一些判定及性质定理、三角形的面积公式(在第四节中会涉及到)、直角三角形的勾股定理等.有关三角形的问题特别多,三角形中的几何不等式是本节的难点.

例 1　设 AD 是 $\triangle ABC$ 的中线,F 是 AB 上任一点,CF 交 AD 于 E,求证:$\dfrac{AE}{ED}=\dfrac{2AF}{FB}$.(图 1-1)

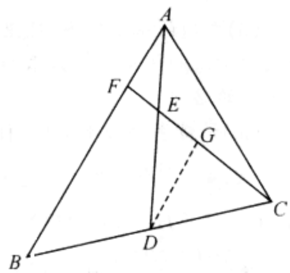

图 1-1

【解】　过 D 作 AB 的平行线交 CF 于 G,则易知 DG 是 $\triangle BCF$ 的中位线,且 $\triangle AEF\backsim\triangle DEG$.于是

$$\frac{AE}{ED}=\frac{AF}{DG}=\frac{AF}{\frac{1}{2}BF}=\frac{2AF}{FB}.$$

【注】　(i)利用平行线来证明线段成比例,尤其是利用中点来添加中位线是常用方法.

(ii)此题的证法很多,望读者想出至少两种其他的方法.(见本节习题)

例 2　在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,$\angle C=90^\circ$,BE 是 $\angle B$ 的平分线,$CD\perp AB$ 于 D 且交 BE 于 O,又 $FG\parallel AB$ 且过 O,求证:$AF=CE$.(图 1-2)

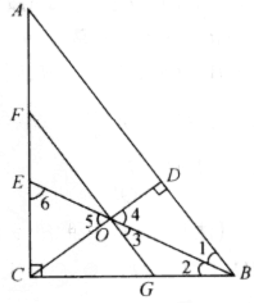

图 1-2

【证明】　如图设诸角.由已知 $\angle 1=\angle 2=\angle 3$,$GO=GB$.$\angle 4+\angle 1=\angle 2+\angle 6=90^\circ$,所以 $\angle 4=\angle 6$,于是 $\angle 5=\angle 6$.即 $CE=CO$.

由 $\triangle COG\backsim\triangle FCO$ 及 $FG\parallel AB$ 有 $\dfrac{AF}{CF}=\dfrac{GB}{CG}=\dfrac{GO}{CG}=\dfrac{CO}{CF}=\dfrac{CE}{CF}$,故 $AF=CE$.

【注】　在直角三角形中,斜边上的高将它分成两个小直角三角

形及原三角形彼此相似.这一结论相当有用.

例 3　在任意△ABC 的边上向形外作△BPC，△CQA，△ARB，使得$\angle PBC=\angle CAQ=45°$，$\angle BCP=\angle QCA=30°$，$\angle ABR=\angle BAR=15°$，求证：(1) $QR\perp RP$；(2) $QR=RP$.(图 1-3)

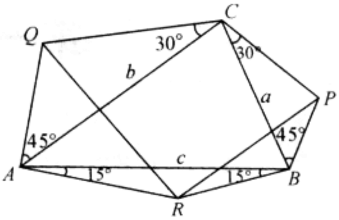

图 1-3

【分析与解】　设△ABC 的三边分别为 a、b、c，则由正弦定理易知 $AR=BR=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}c$，$PB=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}a$，$PC=(\sqrt{3}-1)a$，$CQ=(\sqrt{3}-1)b$，$AQ=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}b$.在△$PBR$ 中由余弦定理知 $PR^2=(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}a)^2+(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}c)^2-2\times\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}a\times\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}c\times\cos(60°+B)$，①

同理 $QR^2=(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}c)^2+(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}b)^2-2\times\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}c\times\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}b\times\cos(60°+A)$.　②

接下来只须利用三角函数有关知识及正弦定理验证①、②两式的右端相等(这里要一点代数计算功夫)即可.至于(2)同理，只须求证 $PQ^2=2PR^2$.

【注】　(i)本题是来自于第 17 届 IMO 试题，由荷兰提供，是一道很好的试题，请读者完成①、②右端的证明.

(ii)本题的证法很多，这里运用的是三角证法，也可用向量法证明或其他纯几何方法.用三角法或向量法的优点是不需添加辅助线，但不足之处是计算较繁.用三角法来证明几何问题也是一种重要的思想.

(iii)请读者完成本节后面的习题：用纯几何方法证明本题.

例 4　在△ABC 中，$\angle A=60°$，$AB>AC$，点 O 是外心，两条高 BE、CF 交于 H 点.点 M、N 分别在线段 BH、HF 上，且满足 $BM=CN$，求$\dfrac{MH+NH}{OH}$的值.(2002 年全国高中数学联赛试题)(图 1-4)

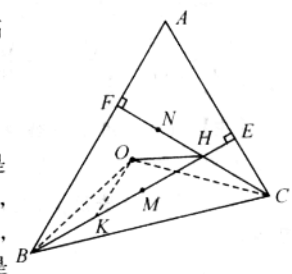

图 1-4

【解】　在 BE 上截取 $BK=CH$，并连接 OB、OC、OK.则由 O 是外心，且 BE、CF 是△ABC 的两条高，易知$\angle BOC=2\angle A=120°$，$\angle BHC=120°$，于是 B、O、H、C 四点共圆.所以$\angle OBK=\angle OCH$，又 $OB=OC$，$BK=CH$，则△$BOK\cong$△COH.所以△KOH 为顶角是 120°的等腰三角形，$KH=\sqrt{3}OH$.易知 $KM=NH$.故$\dfrac{MH+NH}{OH}=\dfrac{MH+KM}{OH}=\dfrac{KH}{OH}=\sqrt{3}$.

【注】　三角形中很多问题往往与圆有关，本题利用四点共圆构造两个全等的三角形，将 MH、NH、OH 三条不在同一三角形的线段，转化到同一个三角形 OKH 中去，值得玩味.

例 5　在△ABC 中，$AB=AC$，$\angle A=100°$，BD 是$\angle ABC$ 的平分线并交 AC 于 D，求证：$BC=BD+AD$.(图 1-5)

【证明】 在 BC 上截取一点 E，使 $BE=BD$，以下只须证明 $EC=AD$ 即可.

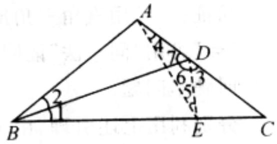

图 1-5

如图设诸角.易知 $\angle 1=\angle 2=20^\circ$，$\angle 6=\angle BED=80^\circ$，$\angle 3=180^\circ-\angle 6-\angle 7=40^\circ=\angle C$.由 $\angle 3=\angle B=40^\circ$ 知，A、B、E、D 四点共圆.则 $\angle 4=\angle 1$，$\angle 5=\angle 2$，$\angle 4=\angle 5$，即 $\triangle ADE$、$\triangle EDC$ 都是等腰三角形，从而 $EC=ED=AD$.

【注】 本题欲证 $EC=AD$ 并不容易直接证明，借助于四点共圆巧妙地解决问题，值得揣摩.

例 6 在锐角 $\triangle ABC$ 中，$\angle C$ 的平分线交 AB 于 L.从 L 作边 AC 和边 BC 的垂线，垂足分别是 M 和 N，设 AN 和 BM 的交点是 P，求证：$CP\perp AB$.(图 1-6)

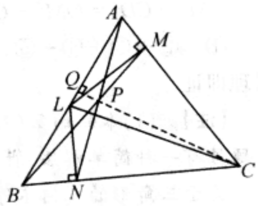

图 1-6

【证明】 用同一法.

过 C 作 $CQ\perp AB$，交 AB 于 Q.下证 CQ、AN、BM 三线共点.由塞瓦定理的逆定理知，只证 $\dfrac{AQ}{QB}\cdot\dfrac{BN}{NC}\cdot\dfrac{CM}{MA}=1$ 即可.由题设易知 $CM=NC$，即证 $\dfrac{AQ}{QB}\cdot\dfrac{BN}{MA}=1$.(*)

由 C、Q、L、N 及 C、M、Q、L 分别四点共圆，有

$BN\cdot BC=BL\cdot BQ$，　所以 $\dfrac{BN}{BQ}=\dfrac{BL}{BC}$.　①

$AM\cdot AC=AQ\cdot AL$，　所以 $\dfrac{AQ}{AM}=\dfrac{AC}{AL}$.　②

又由角平分线性质 $\dfrac{AL}{BL}=\dfrac{AC}{BC}$.　③

由①、②、③知(*)式成立.

【注】 这是一道典型的用“同一法”证明几何问题的例子.有的题目直接证明较困难，往往要考虑其他思想，如反证法等.

例 7 在 $\triangle ABC$ 中，O 为外心，三条高 AD、BE、CF 交于 H，直线 ED 和 AB 交于 M，FD 和 AC 交于 N，求证：(1) $OB\perp DF$，$OC\perp DE$；(2) $OH\perp MN$.(如图 1-7(1))(2001 年全国高中数学联赛试题)

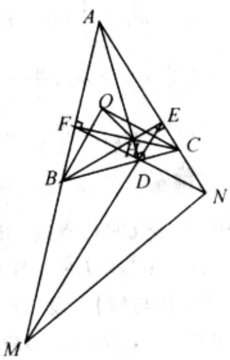

图 1-7(1)

【分析与解】 (1)由题设易知 A、C、D、F 四点共圆，$\angle BDF=\angle BAC$.

$$\angle OBC=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle BOC)=90^\circ-\angle BAC=90^\circ-\angle BDF.$$

即　$\angle OBC+\angle BDF=90^\circ$.

所以　$OB\perp DF$，同理 $OC\perp DE$.

(2)先提出一个引理：如图 1-7(2)，直线 AB、CD 相交，则 $AB\perp CD\Leftrightarrow AC^2-BC^2=AD^2-BD^2$.

简证:"⇒"用直角三角形勾股定理即得.

"⇐"可用"同一法"证明,请读者自己完成.

回到本问题.

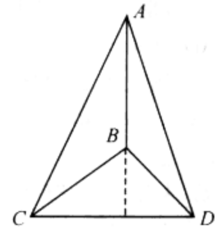

图 1-7(2)

分别利用上述引理,由 $CH\perp MA$, $BH\perp NA$, $DA\perp BC$, $OB\perp DN$, $OC\perp DM$ 有 $MC^2-MH^2=AC^2-AH^2$,①

$NB^2-NH^2=AB^2-AH^2$, ②

$BD^2-CD^2=BA^2-AC^2$, ③

$BN^2-BD^2=ON^2-OD^2$, ④

$CM^2-CD^2=OM^2-OD^2$. ⑤

① - ② + ③ + ④ - ⑤,得 $NH^2-MH^2=ON^2-OM^2$,即 $OM^2-MH^2=ON^2-NH^2$. 由上述引理即证.

【注】 (1)本题的第(2)问是一个较难的问题,主要是一个潜在的引理对学生有点陌生.(2)本题另有一种简单解法,我们将在圆的一节中介绍.

关于三角形的几何不等式特别多,有些问题难度较大.

例 8 在△ABC 中,a、b、c 分别为三边,m_a、m_b 为相应边上的中线,求证:$|m_a-m_b|\geqslant\frac{1}{2}|a-b|$.(图 1-8)

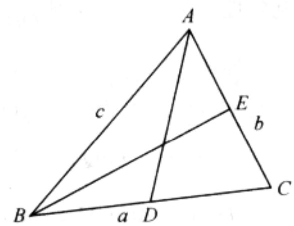

图 1-8

【证明】 由中线长公式

$$2m_a^2=b^2+c^2-\frac{a^2}{2}, \qquad ①$$

$$2m_b^2=a^2+c^2-\frac{b^2}{2}, \qquad ②$$

① - ②,得 $m_a^2-m_b^2=\frac{3}{4}(b^2-a^2)$.

$$m_a-m_b=\frac{1}{2}(b-a)\frac{3(a+b)}{2(m_a+m_b)} \qquad (*)$$

又 $\frac{b}{2}+a>m_b$, $\frac{a}{2}+b>m_a$,所以 $m_a+m_b<\frac{3}{2}(a+b)$,代入(*)式中即得

$|m_a-m_b|\geqslant\frac{1}{2}|a-b|$.

例 9 若△ABC 中存在一个内点 F 满足:$\angle AFB=\angle BFC=\angle CFA$. 直线 BF 和 CF 分别交 AC、AB 于 D、E,求证:$AB+AC\geqslant 4DE$.(图 1-9)(2002 年 IMO 预选题)

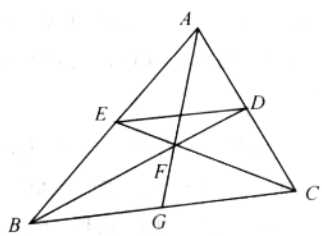

图 1-9

【分析与解】 设 $AF=x$, $BF=y$, $CF=z$. 则由 $\angle AFD=\angle DFC=\angle CFG=\angle GFB=\angle BFE=\angle EFA=60^\circ$,及面积关系不难得出,$DF=\frac{xz}{x+z}$, $EF=\frac{xy}{x+y}$.

于是,$AB+AC\geqslant 4DE\Leftrightarrow\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{x^2+xz+z^2}\geqslant$

$4\sqrt{(\frac{xy}{x+y})^2+(\frac{xz}{x+z})^2+\frac{xy}{x+y}\cdot\frac{xz}{x+z}}$.

由 $\frac{x+y}{4}\geqslant\frac{xy}{x+y}$ 及 $\frac{x+z}{4}\geqslant\frac{xz}{x+z}$，只证 $\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{x^2+xz+z^2}\geqslant\sqrt{(x+y)^2+(x+z)^2+(x+y)(x+z)}$，平方后化简$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x^2+xy+y^2)(x^2+xz+z^2)}\geqslant x^2+2(y+z)x+yz\Leftrightarrow 3(x^2-yz)^2\geqslant 0$，最后一式显然成立.

【注】 本题的思想是将几何问题转化为求证一个代数不等式的问题，体现了代数方法与几何的完美结合.

例 10 设 S 是满足下列条件的 $\triangle ABC$ 的集合：$5(\frac{1}{AP}+\frac{1}{BQ}+\frac{1}{CR})-\frac{3}{\min\{AP,BQ,CR\}}=\frac{6}{r}$，这里 r 为 $\triangle ABC$ 的内切圆半径，P、Q、R 分别是边 AB、BC、CA 上的切点.求证：S 中所有这些三角形都是等腰三角形，并且彼此相似.（图 1-10）

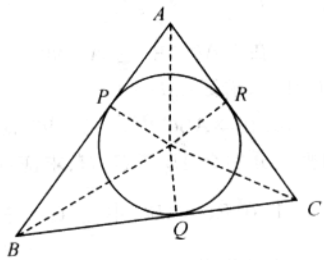

图 1-10

【证明】 不失一般性，设 $AP=\min\{AP,BQ,CR\}$.设 $x=\tan\frac{\angle A}{2}$，$y=\tan\frac{\angle B}{2}$，$z=\tan\frac{\angle C}{2}$，则

$AP=\frac{r}{x}$，$BQ=\frac{r}{y}$，$CR=\frac{r}{z}$，所给的条件即

$$2x+5y+5z=6. \quad ①$$

由熟悉的三角恒等式 $\tan\frac{\angle A}{2}\tan\frac{\angle B}{2}+\tan\frac{\angle A}{2}\tan\frac{\angle C}{2}+\tan\frac{\angle B}{2}\tan\frac{\angle C}{2}=1$，所以

$$xy+yz+zx=1. \quad ②$$

由①、②消去 x，有 $5y^2+(8z-6)y+5z^2-6z+2=0$.

$\Delta=(8z-6)^2-4\times5(5z^2-6z+2)=-4(3z-1)^2\leqslant 0$.

故 $z=\frac{1}{3}$ 是唯一解.易得 $(x,y,z)=(\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$，即 $\tan\frac{\angle A}{2}=\frac{4}{3}$，$\tan\frac{\angle B}{2}=\tan\frac{\angle C}{2}=\frac{1}{3}$.显然这些三角形都是等腰三角形，而且彼此相似.

练习一

1. 试完成例 1 的其他至少两种证明.
2. 试用纯几何的方法完成例 3 的证明.
3. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，I 为内心，求证：$AI\cdot BI=\sqrt{2}AB\cdot r$.（这里 r 为内切圆的半径）
4. 在 $\triangle ABC$ 中，A'、B'、C' 分别在边 BC、CA 和 AB 上，已知 AA'、BB'、CC' 共点于 O，且 $\frac{OA}{OA'}+\frac{OB}{OB'}+\frac{OC}{OC'}=2007$，求 $\frac{OA\cdot OB\cdot OC}{OA'\cdot OB'\cdot OC'}$ 的值.

5. 设$\triangle ABC$为锐角三角形，AD是BC上的高，H为AD内部的一点. BH、CH的延长线分别交AC、AB于E、F，求证：$\angle EDH=\angle FDH$.

6. 设$\triangle ABC$是等边三角形，P是其内部一点，线段AP、BP、CP依次交三边BC、CA、AB于A_1、B_1、C_1三点，求证：$A_1B_1\cdot B_1C_1\cdot C_1A_1\geqslant A_1B\cdot B_1C\cdot C_1A$.

7. 设点D、E分别是$\triangle ABC$的边BC和AC上的点，直线AD和BE交于点P. K、L分别是BC和AC上的点，且四边形$CLPK$为平行四边形，求证：$\dfrac{AE}{EL}=\dfrac{BD}{DK}$.

8. 设$\triangle ABC$的三边长分别为a、b、c. 设D、E分别是边AC、AB的中点，求证：$BD\perp CE$的充要条件是$b^2+c^2=5a^2$.

9. 在$\triangle ABC$中，$\angle A=90°$，$\angle B$的平分线交AC于D，交高AH于E，过E作BC的平行线交AC于F，求证：$AD=CF$.

10. 在$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$CA=CB$. D、E分别在CA、CB上，且$CE=CD$. 过C、D作AE的垂线分别交AB于G、H，求证：$GB=GH$.

11. 在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$\angle C=\dfrac{\pi}{2}$. M是斜边AB的中点，CH是高. P是形内一点，且$AP=AC$，求证：PM平分$\angle BPH$当且仅当$\angle A=\dfrac{\pi}{3}$.

12. 凸四边形$ABCD$中，$AB=AC=BD$，P是对角线AC、BD的交点，O、I分别是$\triangle ABP$的外心和内心，且O、I不重合. 求证：$OI\perp CD$.

13. $\triangle ABC$满足：$(\cot\dfrac{A}{2})^2+(2\cot\dfrac{B}{2})^2+(3\cot\dfrac{C}{2})^2=(\dfrac{6s}{7r})^2$，这里$s$、$r$分别表示半周长、内切圆的半径，求证：$\triangle ABC$与三角形$T$相似，这里$T$的三边均为正整数且互质，试确定$T$的三边长.

14. 设三角形的三边长分别为a、b、c，三边上的中线之长分别为m_a、m_b、m_c，外接圆直径为D，求证：$\dfrac{a^2+b^2}{m_c}+\dfrac{a^2+c^2}{m_b}+\dfrac{b^2+c^2}{m_a}\leqslant 6D$.

15. 设$\triangle ABC$的三边长分别为a、b、c，a、b、c互不相等，AD、BE、CF分别为三条内角平分线，且$DE=DF$，求证：(1)$\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}$；(2)$\angle BAC>90°$.（2003年女子数学奥林匹克试题）

§1.2 共圆点、共线点、共点线问题

证明四点共圆的方法较多，主要有以下几种：

1. 对角互补. 2. 如图1-11，BC的同一侧所张成的两角$\angle BAC$、$\angle BDC$相等，则A、B、C、D四点共圆. 3. 若两线段AB、CD相交于E，且$AE\cdot EB=CE\cdot ED$，则A、B、C、D四点共圆. 4. 若相交直线PA、PB上各有一点C、D，且$PA\cdot PC=PB\cdot PD$，则A、B、C、D四点共圆. 5. 若四边形的一个外角等于其内对角，则四边形的四顶点共圆.

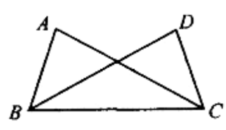

图 1-11

一般说来，要证明若干点共圆，先证其中四点共圆，再证其他点在这个圆上.

证明 A、B、C 三点共线的方法主要有以下几种：

1. 若 B 在直线 MN 上，证明 $\angle ABM+\angle MBC=\pi$ 或 $\angle ABM=\angle CBN$；（如图 1-12）　2. 线段 AB、AC、BC 中任一条长度等于其他两条长度之和；3. $S_{\triangle ABC}=0$；4. 有关定理，如梅涅劳斯定理的逆定理、笛沙格定理等；5. 利用位似.

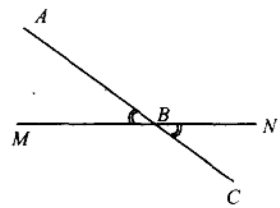

图 1-12

证明三线共点的常用主要方法有：

1. 设其中两条直线相交于点 A，再证明 A 点在第三条直线上；2. 证明三条直线都经过某个特殊点；3. 利用已知的定理，如三角形的三条高、角平分线、中线分别交于一点，塞瓦定理的逆定理等.

给出平面上的一个锐角△ABC，以 AB 为直径的圆与 AB 边的高线 CC' 及其延长线交于 M、N，以 AC 为直径的圆与 AC 边的高线及其延长线交于 P、Q. 求证：M、N、P、Q 四点共圆（如图 1-13）

【证明】 由 AB、AC 分别为两个圆的直径可知，$\angle CC'B=\angle CB'B=90°$，于是 C、B、C'、B' 四点共圆. 所以，$DC\cdot DC'=DB\cdot DB'$.（这里 D 为 CC'、BB'的交点）

又由相交弦定理有 $DP\cdot DQ=DC\cdot DC'$，$DM\cdot DN=DB\cdot DB'$. 于是结合三个等式知，$DP\cdot DQ=DM\cdot DN$，P、Q、M、N 四点共圆.

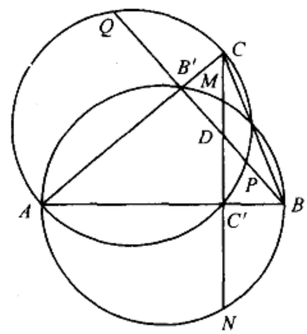

图 1-13

△ABC 的内切圆分别切三边 BC、CA、AB 于点 D、E、F，点 X 是△ABC 内的一点，△XBC 的内切圆也与 BC 切于点 D 并与 CX、XB 分别切于点 Y 和 Z，求证：E、F、Z、Y 四点共圆.（如图 1-14）

【证明】 若 $EF/\!/BC$，则 $AB=AC$. 此时 $EFZY$ 是等腰梯形，显然四点共圆.

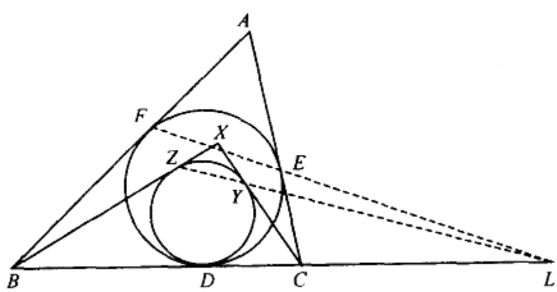

图 1-14

若 EF 与 BC 不平行，不妨设它们相交于 L.

由梅涅劳斯定理有 $\frac{CL}{LB}\cdot\frac{BF}{FA}\cdot\frac{AE}{EC}=1$，由 $AF=AE$，$BF=BD$，$CE=CD$ 有 $\frac{CL}{LB}=\frac{CD}{DB}$，由内心及角平分线性质易知 $\frac{CL}{LB}=\frac{CD}{DB}=\frac{AC}{AB}$，由外角平分线性质知，$L$ 是 BC 与 $\angle A$ 的外角平分线上的交点. 同理 YZ 与 BC 的交点也是 L.

所以 $LE\cdot LF=LD^2=LY\cdot LZ$. 即 E、F、Z、Y 四点共圆.

$ABCD$ 是圆内接四边形，AC 是圆的直径，$BD\perp AC$，AC 与 BD 的交点为 E，F 在 DA 的延长线上，连结 BF，G 在 BA 的延长线上，使得 $DG\,/\!/\,BF$，H 在 GF 的延长线上，$CH\perp GF$. 求证：B、E、F、H 四点共圆.（如图 1-15）（2003 年女子数学奥林匹克）

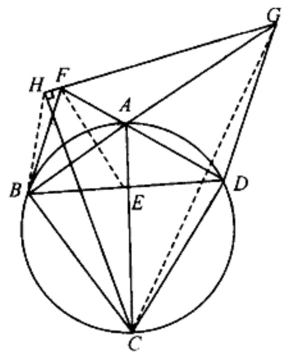

图 1-15

【证明】 连结 BH，EF，CG，因为 $\triangle BAF\backsim\triangle GAD$，所以 $\frac{FA}{AB}=\frac{DA}{AG}$，①

又因为 $\triangle ABE\backsim\triangle ACD$，所以 $\frac{AB}{EA}=\frac{AC}{DA}$，②

①×② 得 $\frac{FA}{EA}=\frac{AC}{AG}$. 因为 $\angle FAE=\angle CAG$，所以 $\triangle FAE\backsim\triangle CAG$，于是 $\angle FEA=\angle CGA$. 由题设知，$\angle CBG=\angle CHG=90^\circ$，所以 B、C、G、H 四点共圆，得 $\angle BHC=\angle BGC$，于是 $\angle BHF+\angle BEF=\angle BHC+90^\circ+\angle BEF=\angle BGC+90^\circ+\angle BEF=\angle FEA+90^\circ+\angle BEF=180^\circ$，所以，$B$、$E$、$F$、$H$ 四点共圆.

给定锐角三角形 ABC，在边 BC 上取点 A_1，A_2（A_2 位于 A_1，C 之间），在 AC 边上取点 B_1，B_2（B_2 位于 B_1 与 A 之间），在 AB 边上取点 C_1，C_2（C_2 位于 C_1 与 B 之间），使得 $\angle AA_1A_2=\angle AA_2A_1=\angle BB_1B_2=\angle BB_2B_1=\angle CC_1C_2=\angle CC_2C_1$. 直线 AA_1，BB_1 与 CC_1 可构成一个三角形. 直线 AA_2，BB_2，CC_2 可构成另一个三角形. 证明：这两个三角形的六个顶点共圆.（如图 1-16）

【证明】 设上述两三角形分别为图中所示的 $\triangle UVW$ 与 $\triangle XYZ$. 由于 $\angle AB_2X=\angle AC_1U$，故 $\triangle AB_2B\backsim\triangle AC_1C$. $\frac{AC_1}{AC}=\frac{AB_2}{AB}$，且 $\angle ABB_2=\angle ACC_1$. 类似可得 $\angle BAA_1=\angle BCC_2$. 于是有 $\angle A_1VB_1=\angle BAA_1+\angle B_1BB_2+\angle ABB_2=\angle BCC_2+\angle C_1CC_2+\angle ACC_1=\angle ACB$. 类似地，$\angle ACB=\angle AXB_2$，$\angle A_2ZC=\angle ABC=\angle AUC_1$. 由正弦定理：$\frac{AV}{\sin\angle ABV}=\frac{AB}{\sin\angle A_1VB}=\frac{AB}{\sin\angle ACB}=\frac{AC}{\sin\angle ABC}=$

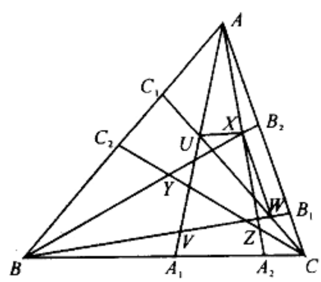

图 1-16

$\dfrac{AC}{\sin\angle A_2ZC}=\dfrac{AZ}{\sin\angle ACZ}\Rightarrow AV=AZ$，类似得，$BW=BX$，$CU=CY$. 另外，$\dfrac{AU}{\sin\angle AC_1U}=\dfrac{AC_1}{\sin\angle AUC_1}=\dfrac{AC_1}{AC}\cdot\dfrac{AC}{\sin\angle ABC}=\dfrac{AB_2}{AB}\cdot\dfrac{AB}{\sin\angle ACB}=\dfrac{AB_2}{\sin\angle AXB_2}=\dfrac{AX}{\sin\angle AB_2X}\Rightarrow AU=AX$. 同样 $BY=BV$，$CW=CZ$. 进而有 $UX\parallel BC$，$WX\parallel CA$. 对四边形 $UVWX$，$\angle AUX=\angle AA_1A_2=\angle BB_1B_2=\angle BWX$，即 X 位于$\triangle UVW$外接圆上，同样 Y，Z 也是. 于是这六点共圆.

(西姆松线问题)如图 1-17，P 为$\triangle ABC$的外接圆上任意一点，P 在三边上的射影分别为 D、E、F，求证：D、E、F 三点共线.

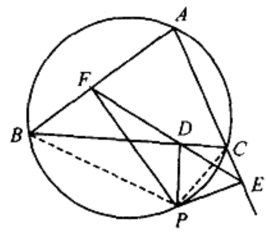

图 1-17

【证明】 由已知条件 $PD\perp BC$，$PE\perp AC$，$PF\perp AB$ 可知：P、E、C、D 四点及 P、D、F、B 四点分别共圆. 于是有$\angle CDE=\angle CPE$，$\angle BDF=\angle BPF$.

又 A、B、P、C 四点共圆，则有$\angle FBP=\angle PCE$，而$\angle BPF$、$\angle CPE$ 分别为$\angle FBP$、$\angle PCE$ 的余角. 故$\angle CDE=\angle BDF$.

【注】 西姆松线的证明问题方法较多，也可用梅涅劳斯的逆定理证明. 见本节后习题.

(Lemoine 勒莫恩定理)如图 1-18，过$\triangle ABC$的三个顶点 A、B、C 作它的外接圆的切线，分别和 BC、CA、AB 的延长线交于 P、Q、R，求证：P、Q、R 三点共线.

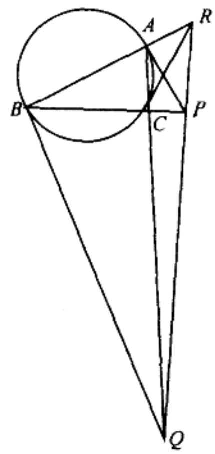

图 1-18

【证明】 因 AP 是圆的切线，所以，$\triangle ACP\backsim\triangle ABP$，从而有 $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BP}{AP}=\dfrac{AP}{CP}$，得$\dfrac{BP}{CP}=\dfrac{AB^2}{AC^2}$. 同理$\dfrac{CQ}{QA}=\dfrac{BC^2}{AB^2}$，$\dfrac{AR}{RB}=\dfrac{CA^2}{BC^2}$，得$\dfrac{BP}{CP}\times\dfrac{CQ}{QA}\times\dfrac{AR}{RB}=1$. 由梅涅劳斯定理知 P、Q、R 三点共线.

如图 1-19，$\triangle ABC$的内切圆切 AC 边于 K. 另一个圆 P 与这个内切圆同心，且与$\triangle ABC$的每条边均有两个交点. 其中在 AB、AC 上与 B 较近的两个交点分别是 E、F. B_1、B_2 是圆 P 与 AC 边的两个交点，且 B_1 较近于 A. 设 P 是 B_2E 与 B_1F 的交点. 求证：B、K、P 三点共线.

【证明】 设 I 是$\triangle ABC$的内心，J、L 分别是内切圆与 BC、CA 的切点. 易见$\triangle ILE$、$\triangle IJF$、$\triangle IKB_1$、$\triangle IKB_2$ 彼此全等. 于是 $LE=JF=KB_1=KB_2$. 又 $AK=AL$，$CK=CJ$. 所以 $AB_2=AE$、$CB_1=CF$，即$\triangle AB_2E$、$\triangle CB_1F$ 都是等腰$\triangle$.

过 B 分别作 B_1F、B_2E 的平行线与 CA、AC 延长线交于 D_1、D_2. 则$\triangle AD_2B$、$\triangle CD_1B$ 也是等腰三角形. 且$\triangle B_1PB_2$ 与$\triangle D_1BD_2$ 相似.

进而可以证明这两个三角形还是位似的，且位似中心即是 K. 上面已经证明 $KB_1=KB_2$，下面再来证明 $KD_1=KD_2$.