21 世纪高等院校经典教材同步辅导
ERSHIYISHIJIGAODENGYUANXIAOJINGDIANJIAOCAITONGBUFUDAO

线性代数

全程导学及习题全解

同济大学第四版

主　编　任　卉
副主编　李红裔　詹　维
主　审　赵　迪

◆知识归纳　梳理主线重点难点
◆习题详解　精确解答教材习题
◆提高练习　巩固知识迈向更高

中国时代经济出版社
China Modern Economic Publishing House

21 世纪高等院校经典教材同步辅导
ERSHIYISHIJIGAODENGYUANXIAOJINGDIANJIAOCAITONGBUFUDAO

线性代数

全程导学及习题全解

同济大学第四版

主　编　任　芇
副主编　李红裔　詹　维
主　审　赵　迪

◆知识归纳　梳理主线重点难点
◆习题详解　精确解答教材习题
◆提高练习　巩固知识迈向更高

中国时代经济出版社
China Modern Economic Publishing House

图书在版编目（CIP）数据

线性代数全程导学及习题全解/任卉主编．—北京：中国时代经济出版社，2006.6

（21世纪高等院校经典教材同步辅导）

ISBN 7－80221－050－X

Ⅰ．线…　Ⅱ．任…　Ⅲ．线性代数－高等学校－教学参考资料　Ⅳ．0151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2006）第028543号

线性代数全程导学及习题全解

任卉　主编

出 版 者	**中国时代经济出版社**
地　　址	北京东城区东四十条24号 青蓝大厦东办公区11层
邮政编码	100007
电　　话	(010)68320825(发行部) (010)88361317(邮购)
传　　真	(010)68320634
发　　行	各地新华书店
印　　刷	北京鑫海达印刷有限公司
开　　本	787×1092　1/16
版　　次	2006年9月第1版
印　　次	2006年9月第1次印刷
印　　张	10.125
字　　数	200千字
印　　数	1～5000册
定　　价	11.00元
书　　号	ISBN 7－80221－050－X/G·034

版权所有　侵权必究

内容提要

本书是与同济大学应用数学系主编的《线性代数》第四版相配套的学习辅导用书，全书根据全国高等院校线性代数教学大纲和研究生入学考试要求编写。可供理、工、农、医类(非数学专业)大学生学习线性代数时作为参考用书，也可供考研数学复习第一阶段使用。

前　　言

本书是同济大学应用数学系主编的《线性代数》(第四版)的配套参考用书,适合初次学习《线性代数》课程的大学生以及准备报考硕士研究生的人员使用。

为了帮助同学学好线性代数,北京航空航天大学数学系根据多年的线性代数教学经验,在对教材进行全面系统的研究、分析的基础上,总结出一套特别适合学生学习、掌握、提高的好方法,并将其融入本书的编纂过程。另外,本书内容丰富、层次清晰、逻辑缜密、重点难点突出,因此,必将成为广大学生学习线性代数这门课程的良师益友。

本书内容体系严格按照同济大学《线性代数》(第四版)教材编排,在具体内容的编写上具有以下特点:

1.归纳概括出了教材每章的知识要点,并对其进行了深入浅出的论述分析,更有利于同学提纲挈领,深刻理解各部分内容之间的关系,从整体的角度掌握课本内容。

2.例题既包括与基本概念有关的各种题型,又有综合各个知识点具有一定难度的题型,从基础到提高,适合各种水平学生的需要。

3.给出了每章课后习题的详细解答,凡是有多种解法的习题,其解法均列出来供学生作为解题参考。

4.把各种题型和解题方法、技巧集中起来,对同学们实行点对点、面对面的学习指导。考试时不管试题如何变化总出不了这些范围,同学们只要掌握了这些题型与解题方法、技巧,肯定能取得满意的成绩。

本书具有完整科学的体系结构,如果合理地使用本书,必能起到事半功倍的效果。本书的出版,如果能对广大学生在线性代数的学习和复习中有所帮助,那就是对我们工作的最大肯定。

全书由任卉、李红裔、詹维、编写,赵迪主审。本书编写过程中得到杨蕤、谢婧等同志的大力帮助,并得到中国时代经济出版社的领导和编辑们的支持和帮助,在此表示衷心的感谢!

由于编者水平有限,书中难免有疏漏与不妥之处,恳请各位专家及广大读者批评指正。

编　者

2006 年 8 月

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

目　　录

第一章　行列式

一、本章知识要点

1. 二阶与三阶行列式

(1)二阶行列式的定义:表达式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 称为数表

$$\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array}$$

所确定的二阶行列式,并记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

数 a_{ij} $(i=1,2;j=1,2)$ 称为行列式的元素或元. 元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标,表明该元素位于第 i 行,第二个下标 j 称为列标,表明该元素位于第 j 列. 位于第 i 行第 j 列的元素称为行列式的 (i,j) 元.

(2)二元线性方程组的行列式解法

如果二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2, \end{cases}$$

的系数行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$,则该方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},\text{其中 } D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},D_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}.$$

(3)三阶行列式的定义:表达式 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$ 称为数表

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}$$

所确定的三阶行列式,并记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2. n 阶行列式

(1)全排列及其逆序数

(ⅰ)全排列的定义:把 n 个不同的元素排成一列,叫做这 n 个元素的全排列(简称排列),所有全排列的个数记作 P_n,则 $P_n=n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1=n!$.

(ⅱ)排列的逆序数的定义:对于 n 个不同的元素,先规定各元素之间有一个标准次序(例如从小到大),于是在这几个元素的任一排列中,当某两个元素的先后次序与标准次序不同时,就说有 1 个逆序,一个排列

中所有逆序的总和叫做这个排列的逆序数.逆序数为奇数的排列叫做奇排列,逆序数为偶数的排列叫做偶排列.

(ⅲ)排列的逆序数的计算方法

规定按自然数从小到大为标准次序,设 $p_1p_2\cdots p_n$ 为 n 个自然数的一个排列,对于元素 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$,如果比 p_i 大且排在 p_i 前面的元素有 t_i 个,就说 p_i 这个元素的逆序数为 t_i,全体元素的逆序数之和

$$t=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{i=1}^{n}t_i,$$

即为这个排列的逆序数.

(2)对换

(ⅰ)对换的定义:在排列中,将任意两个元素对调,其余元素不动,这种作出新排列的变换叫做对换.将相邻两个元素对换叫做相邻对换.

(ⅱ)对换的性质

定理1　一个排列中的任意两个元素对换,排列改变奇偶性.

推论　奇(偶)排列变成标准排列的对换次数为奇(偶)数.

(3)n 阶行列式

(ⅰ)n 阶行列式的定义:n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中,$p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列,t 为这个排列的逆序数.n 阶行列式简记作 $\det(a_{ij})$,其中数 a_{ij} 为行列式 D 的 (i,j) 元.

定理2　n 阶行列式也可定义为

$$D=\sum(-1)^t a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn},$$

其中 t 为行标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数.

(ⅱ)几种特殊行列式:

①主对角行列式等于主对角线上的元素之积,即

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

②副对角行列式为

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \lambda_n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

③上、下三角行列式等于主对角线上的元素之积,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

3. 行列式的性质

性质 1　行列式与它的转置行列式相等.

性质 2　互换行列式的两行(列),行列式变号.

推论　如果行列式有两行(列)完全相同,则此行列式等于零.

性质 3　行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数 k,等于用数 k 乘此行列式.

推论　行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

性质 4　行列式中如果有两行(列)元素成比例,则此行列式等于零.

性质 5　若行列式的某一列(行)的元素都是两数之和,例如第 i 列的元素都是两数之和:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i}+a_{1i}') & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i}+a_{2i}') & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni}+a_{ni}') & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 D 等于下列两个行列式之和:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i}' & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i}' & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni}' & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 6　把行列式的某一列(行)的各元素乘以同一数然后加到另一列(行)对应的元素上去,行列式不变.

4. 行列式按行(列)展开

(1)代数余子式的定义:在 n 阶行列式中,把 (i,j) 元 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后,留下来的 $n-1$ 阶行列式叫做 (i,j) 元 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij};记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$,A_{ij} 叫做 (i,j) 元 a_{ij} 的代数余子式.

(2)行列式按行(列)展开的计算

引理　一个 n 阶行列式,如果其中第 i 行所有元素除 (i,j) 元 a_{ij} 外都为零,那么这个行列式等于 a_{ij} 与它的代数余子式的乘积,即 $D=a_{ij}A_{ij}$.

定理 3　行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和,即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

或 $$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad(j=1,2,\cdots n).$$

推论　行列式某一行(列)的元素与另一行(列)对应元素的代数余子式的乘积之和等于零,即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,i\neq j,$$

或 $$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0,i\neq j.$$

5. 克拉默法则

克拉默法则:如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n, \end{cases}$$

的系数行列式不等于零,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

那么方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D}, x_2=\frac{D_2}{D}, \cdots, x_n=\frac{D_n}{D},$$

其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是把系数行列式 D 中第 j 列元素用方程组后端的常数项代替后所得到的 n 阶行列式，即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

定理 4　如果非齐次线性方程组的系数行列式 $D\neq 0$，则方程组一定有解，且解是惟一的.

定理 5　如果齐次线性方程组的系数行列式 $D\neq 0$，则齐次线性方程组没有非零解.

二、典型例题讲解

例 1　求下列排列的逆序数，并确定它的奇偶性：

(1)68271354；　(2)$n(n-1)\cdots 21$；　(3)$(2n-1)\cdots 3124\cdots(2n)$.

解：(1)6 排在首位，逆序数为 0；

8 的前面没有比 8 大的数，故逆序数为 0；

2 的前面比 2 大的数有两个(6、8)，故逆序数为 2；

7 的前面比 7 大的数有 1 个(8)，故逆序数为 1；

1 的前面比 1 大的数有 4 个(6、8、2、7)，故逆序数为 4；

3 的前面比 3 大的数有 3 个(6、8、7)，故逆序数为 3；

5 的前面比 5 大的数有 3 个(6、8、7)，故逆序数为 3；

4 的前面比 4 大的数有 4 个(6、8、7、5)，故逆序数为 4，

于是排列 68271354 的逆序数为 $t=0+0+2+1+4+3+3+4=17$，所以排列为奇排列.

(2)易知排列 $n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数为 $t=0+1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)=\frac{1}{2}n(n-1)$，于是

当 $n=4k, k=0,1,2,\cdots$ 时，$t=2k(4k-1)$ 为偶数，排列为偶排列；

当 $n=4k+1, k=0,1,2,\cdots$ 时，$t=2k(4k+1)$ 为偶数，排列为偶排列；

当 $n=4k+2, k=0,1,2,\cdots$ 时，$t=(2k+1)(4k+1)$ 为奇数，排列为奇排列；

当 $n=4k+3, k=0,1,2,\cdots$ 时，$t=(2k+1)(4k+3)$ 为奇数，排列为奇排列，

综上所述，当 $n=4k$ 或 $n=4k+1$ 时，排列为偶排列；当 $n=4k+2$ 或 $n=4k+3$ 时，排列为奇排列，其中 $k=0,1,2,\cdots$.

(3)该排列中后 n 个数 $24\cdots(2n)$ 不构成逆序，只有前 n 个数 $(2n-1)\cdots 31$，以及前 n 个数与后 n 个数之间才构成逆序，故逆序数为 $t=0+1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)+(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1+0=n(n-1)$，$t$ 为偶数，故排列为偶排列.

例 2　利用性质计算下列各行列式：

(1)$D=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a_3 \end{vmatrix}$；　(2)$D_n=\begin{vmatrix} a_1+x & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+x & a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+x \end{vmatrix}$；

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$(3)D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}，其中\ a_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n.$$

提示:(1)利用逐行(列)相加(减)的技巧化为三解形行列式.

(2)所有行(列)对应元素相加后相等的行列式,可把所有行(列)加到第1行(列),提取公因式后再化简计算.

(3)形似"爪"型的行列式,通常用提取公因式的方法化为三角形行列式.

解:(1)$$D\xlongequal{r_2+r_1}\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a_3 \end{vmatrix}\xlongequal{r_3+r_2}\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a_3 \end{vmatrix}\xlongequal{r_4+r_3}\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1.$$

(2)$$D_n\xlongequal{c_1+\sum\limits_{j=2}^{n}c_j}\begin{vmatrix} x+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ x+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i & a_2+x & a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+x \end{vmatrix}=(x+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2+x & a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i-r_1}(x+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}=(x+\sum_{i=1}^{n}a_i)x^{n-1}.$$

(3)$$D_{n+1}=a_1a_2\cdots a_n\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{1}{a_1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{a_n} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}\xlongequal{r_1-\sum\limits_{i=2}^{n+1}r_i}\prod_{i=1}^{n}a_i\begin{vmatrix} a_0-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{a_n} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}a_i(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}).$$

例3 利用行列式按行(列)展开定理计算下列各行列式:

$$(1)D=\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix};\quad (2)D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 & -(n-2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 & -(n-1) \end{vmatrix};$$

$$(3)D_n=\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}(\alpha\neq\beta).$$

解:$$(1)D\xlongequal[r_3-r_4]{r_1-r_2}\begin{vmatrix} x & x & 0 & 0 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & y & y \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}\xlongequal[c_4-c_3]{c_2-c_1}\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -y \end{vmatrix}\xlongequal{\text{按 } r_1 \text{ 展开}}x\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 1 & -y \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按 } r_2 \text{ 展开}}xy\begin{vmatrix} -x & 0 \\ 0 & -y \end{vmatrix}=x^2y^2.$$

$$(2)D_n\xlongequal{c_1+\sum_{j=2}^{n}c_j}\begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 & -(n-2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 & -(n-1) \end{vmatrix}\xlongequal{\text{按 } c_1 \text{ 展开}}$$

$$\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-2 & -(n-2) & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 & -(n-1) \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}\frac{1}{2}(n+1)!.$$

$$(3)D_n\xlongequal{\text{按 } c_1 \text{ 展开}}(\alpha+\beta)D_{n-1}-\begin{vmatrix} \alpha\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}\xlongequal{\text{按 } c_1 \text{ 展开}}(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2},$$

即有递推关系式　$D_n=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}(n\geqslant 3)$.

为了得到 D_n 的一般表达式,由题设 $\alpha\neq\beta$,可得

$$D_1=\alpha+\beta=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta=\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta},$$

$$D_3=\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}=(\alpha+\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)-\alpha\beta(\alpha+\beta)=(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)=\frac{\alpha^4-\beta^4}{\alpha-\beta},$$

于是猜想 $D_n=\dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$,下面用数学归纳法证明之:

当 $n=1$ 时,前面已证明等式成立;假设当 $n\leqslant k$ 时等式成立,那么,

当 $n=k+1$ 时,由递推关系知 $D_{k+1}=(\alpha+\beta)D_k-\alpha\beta D_{k-1}=(\alpha+\beta)\dfrac{\alpha^{k+1}-\beta^{k+1}}{\alpha-\beta}-\alpha\beta\dfrac{\alpha^k-\beta^k}{\alpha-\beta}=\dfrac{\alpha^{k+2}-\beta^{k+2}}{\alpha-\beta}$,等式亦成立.

综上所述,对一切自然数 n,等式都成立.

例 4 用克拉默法则解如下线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1, \\ 2x_1+3x_2+4x_3+5x_4=-1, \\ 4x_1+9x_2+16x_3+25x_4=1, \\ 8x_1+27x_2+64x_3+125x_4=-1. \end{cases}$$

解:系数行列式是范德蒙行列式,则

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 8 & 27 & 64 & 125 \end{vmatrix}=(3-2)(4-3)(4-2)(5-4)(5-3)(5-2)=2\times2\times3=12,$$

故方程组有惟一解,且分子也是范德蒙行列式,有

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 9 & 16 & 25 \\ -1 & 27 & 64 & 125 \end{vmatrix}=(3+1)(4-3)(4+1)(5-4)(5-3)(5+1)=4\times5\times2\times6=240,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 16 & 25 \\ 8 & -1 & 64 & 125 \end{vmatrix}=(-1-2)(4+1)(4-2)(5-4)(5+1)(5-2)=(-3)\times5\times2\times6\times3=-540,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 9 & 1 & 25 \\ 8 & 27 & -1 & 125 \end{vmatrix}=(3-2)(-1-3)(-1-2)(5+1)(5-3)(5-2)=(-4)(-3)\times6\times2\times3=432,$$

$$D_4=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \\ 4 & 9 & 16 & 1 \\ 8 & 27 & 64 & -1 \end{vmatrix}=(3-2)(4-3)(4-2)(-1-4)(-1-3)(-1-2)=2\times(-5)(-4)(-3)=-120,$$

因此,方程组的惟一解为:

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{240}{12}=20,x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-540}{12}=-45,x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{432}{12}=36,x_4=\frac{D_4}{D}=\frac{-120}{12}=-10.$$

三、课后习题一全解

1. 利用对角线法则计算下列三阶行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$; (3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$; (4) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$.

提示:二阶行列式与三阶行列式的计算方法较为固定,均采用对角线法则来求解.计算过程中应特别注意哪些元素的乘积之前应冠正号,哪些元素的乘积之前应冠负号.

解:(1) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$

$=2\times(-4)\times3+0\times(-1)\times(-1)+1\times1\times8-1\times(-4)\times(-1)-0\times1\times3-2\times(-1)\times8$

$=-24+0+8-4-0+16=-4.$

(2) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}=acb+bac+cba-c^3-b^3-a^3=3abc-a^3-b^3-c^3.$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}=bc^2+ca^2+ab^2-ba^2-ac^2-cb^2=c^2(b-a)+c(a-b)(a+b)+ab(b-a)$

$=(a-b)(ca+bc-c^2-ab)=(a-b)[-a(b-c)+c(b-c)]=(a-b)(b-c)(c-a).$

(4) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}=x(x+y)y+yx(x+y)+(x+y)yx-(x+y)^3-y^3-x^3$

$=3xy(x+y)-(x+y)^3-y^3-x^3=-2(x^3+y^3).$

2. 按自然数从小到大为标准次序，求下列各排列的逆序数：

(1)1　2　3　4；　(2)4　1　3　2；　(3)3　4　2　1；　(4)2　4　1　3；

(5)1　3…$(2n-1)$2　4…$(2n)$；　(6)1　3…$(2n-1)(2n)(2n-2)$…2.

提示:在计算各排列逆序数的过程中，首位的逆序数必为0，最大数的逆序数亦必为0.

解:(1)在排列1234中，各个元素之前均没有比该元素大的元素，故各个元素的逆序数均为0，于是这个排列的逆序数为$t=0+0+0+0=0$.

(2)在排列4132中，

4排在首位，逆序数为0；

1的前面比1大的数有一个(4)，故逆序数为1；

3的前面比3大的数有一个(4)，故逆序数为1；

2的前面比2大的数有二个(4、3)，故逆序数为2，

于是这个排列的逆序数为$t=0+1+1+2=4$.

(3)在排列3421中，

3排在首位，逆序数为0；

4是最大数，逆序数为0；

2的前面比2大的数有二个(3、4)，故逆序数为2；

1的前面比1大的数有三个(3、4、2)，故逆序数为3，

于是这个排列的逆序数为$t=0+0+2+3=5$.

(4)在排列2413中，

2排在首位，逆序数为0；

4是最大数，逆序数为0；

1的前面比1大的数有二个(2、4)，故逆序数为2；

3的前面比3大的数有一个(4)，故逆序数为1，

于是这个排列的逆序数为$t=0+0+2+1=3$.

(5)在排列13…$(2n-1)$　24…$(2n)$中，

前n个数的前面均没有比其大的数，故它们的逆序数均为0；

后n个数的前面比其大的数分别有$(n-1)$，$(n-2)$，…，0个，故它们的逆序数分别为$(n-1)$，$(n-2)$，…，0，

于是这个排列的逆序数为$t=0+\cdots+0+(n-1)+(n-2)+\cdots+0=\frac{n(n-1)}{2}$.

(6)在排列 $13\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots2$ 中，

前 n 个数的前面均没有比其大的数，故它们的逆序数均为 0；

后 n 个数的前面比其大的数分别有 $0,2,\cdots,2(n-1)$ 个，故它们的逆序数分别为 $0,2,\cdots,2(n-1)$，

于是这个排列的逆序数为 $t=0+\cdots+0+0+2+\cdots+2(n-1)=n(n-1)$.

3. 写出四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项.

提示: 根据 n 阶行列式的定义确定.

解: 由定义知

$$\det(a_{ij})_{4\times4}=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4},$$

其中 $p_1p_2p_3p_4$ 为自然数 1,2,3,4 的一个排列，t 为这个排列的逆序数. 而题中已取定 $p_1=1,p_2=3$，所以 p_3p_4 只能是 24 或 42. 因此，四阶行列式 $\det(a_{ij})_{4\times4}$ 中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项有二个：

$$(-1)^{0+0+1+0}a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}=-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44};$$

$$(-1)^{0+0+0+2}a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}=a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}.$$

4. 计算下列各行列式：

(1) $\begin{vmatrix}4&1&2&4\\1&2&0&2\\10&5&2&0\\0&1&1&7\end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix}2&1&4&1\\3&-1&2&1\\1&2&3&2\\5&0&6&2\end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix}-ab&ac&ae\\bd&-cd&de\\bf&cf&-ef\end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix}a&1&0&0\\-1&b&1&0\\0&-1&c&1\\0&0&-1&d\end{vmatrix}$.

提示: 本题的行列式均为低阶行列式，对这类行列式通常采用两种方法求解：一种方法就是利用性质 6 把行列式化为上(或下)三角形行列式，从而算得行列式的值；另一种方法就是先利用性质 6 把行列式中某行(或某列)中许多元素化为 0，然后按含 0 较多的行(或列)展开.

解:(1)解法 1 $\begin{vmatrix}4&1&2&4\\1&2&0&2\\10&5&2&0\\0&1&1&7\end{vmatrix}\xlongequal{c_1\leftrightarrow c_3}-\begin{vmatrix}2&1&4&4\\0&2&1&2\\2&5&10&0\\1&1&0&7\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-\frac{1}{2}r_1]{r_3-r_1}-\begin{vmatrix}2&1&4&4\\0&2&1&2\\0&4&6&-4\\0&\frac{1}{2}&-2&5\end{vmatrix}$

$\xlongequal[r_4-\frac{1}{4}r_2]{r_3-2r_2}-\begin{vmatrix}2&1&4&4\\0&2&1&2\\0&0&4&-8\\0&0&-\frac{9}{4}&\frac{9}{2}\end{vmatrix}\xlongequal{r_4+\frac{9}{16}r_3}-\begin{vmatrix}2&1&4&4\\0&2&1&2\\0&0&4&-8\\0&0&0&0\end{vmatrix}=0.$

解法 2 $\begin{vmatrix}4&1&2&4\\1&2&0&2\\10&5&2&0\\0&1&1&7\end{vmatrix}\xlongequal[c_4-2c_1]{c_2-2c_1}\begin{vmatrix}4&-7&2&-4\\1&0&0&0\\10&-15&2&-20\\0&1&1&7\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按 } r_2 \text{ 展开}}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-7&2&-4\\-15&2&-20\\1&1&7\end{vmatrix}$

$\xlongequal[c_3-7c_1]{c_2-c_1}-\begin{vmatrix}-7&9&45\\-15&17&85\\1&0&0\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按 } r_3 \text{ 展开}}-(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}9&45\\17&85\end{vmatrix}=0.$

(2)**解法 1** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[c_1 \leftrightarrow c_2]{r_2 \leftrightarrow r_4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 + r_1]{r_3 - 2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 2 \\ 0 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0.$

解法 2 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[c_2 + c_4]{\substack{c_1 + 3c_2 \\ c_3 + 2c_2}} \begin{vmatrix} 5 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & 4 & 7 & 2 \\ 5 & 2 & 6 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按 } r_2 \text{ 展开}} (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 7 & 4 & 7 \\ 5 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0.$

(3)**解法 1** $\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix} \xlongequal{\frac{r_1}{a}, \frac{r_2}{d}, \frac{r_3}{f}} adf \begin{vmatrix} -b & c & e \\ b & -c & e \\ b & c & -e \end{vmatrix} \xlongequal[r_3 + r_1]{r_2 + r_1} adf \begin{vmatrix} -b & c & e \\ 0 & 0 & 2e \\ 0 & 2c & 0 \end{vmatrix}$

$\xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3} -adf \begin{vmatrix} -b & c & e \\ 0 & 2c & 0 \\ 0 & 0 & 2e \end{vmatrix} = 4abcdef.$

解法 2 $\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix} \xlongequal{\frac{r_1}{a}, \frac{r_2}{d}, \frac{r_3}{f}} adf \begin{vmatrix} -b & c & e \\ b & -c & e \\ b & c & -e \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 + r_2} adf \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2e \\ b & -c & e \\ b & c & -e \end{vmatrix}$

$\xlongequal{\text{按 } r_1 \text{ 展开}} (-1)^{1+3} 2adfe \begin{vmatrix} b & -c \\ b & c \end{vmatrix} = 4abcdef.$

(4)**解法 1** $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix} \xlongequal[r_3 \leftrightarrow r_4]{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \\ -1 & b & 1 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\frac{1}{a}(ar_4 + r_1)}$

$\frac{1}{a} \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \\ 0 & ab+1 & a & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4 + (ab+1)r_2} \frac{1}{a} \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \\ 0 & 0 & a+(ab+1)c & ab+1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4 + (a+c+abc)r_3}$

$\frac{1}{a} \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \\ 0 & 0 & 0 & (ab+1)+(a+c+abc)d \end{vmatrix} = (ab+1)+(a+c+abc)d = abcd+ab+cd+da+1.$

解法 2 $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 - ac_2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1-ab & b & 1 & 0 \\ a & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按 } r_1 \text{ 展开}}$

$(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1-ab & 1 & 0 \\ a & c & 1 \\ 0 & -1 & d \end{vmatrix} \xlongequal{c_3 + dc_2} - \begin{vmatrix} -1-ab & 1 & d \\ a & c & 1+cd \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按 } r_3 \text{ 展开}}$

$(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -1-ab & d \\ a & 1+cd \end{vmatrix} = (1+ab)(1+cd)+da = abcd+ab+cd+da+1.$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com