3+X考试

当用题型与解题训练手册

本书编委会

②考试当用题型及解题技巧(上)

- 数学客观题的解题思路与方法
- 数学选择题的解题思路与方法
- 数学填空题的解题思路与方法

数学

国致公出版社

《3+X·考试当用题型与解题训练手册·数学卷》②

（学生用）

3+X·数学
考试当用题型及解题技巧(上)

- 3+X·数学客观题的解题思路与方法
- 3+X·数学选择题的解题思路与方法
- 3+X·数学填空题的解题思路与方法

图书在版编目(CIP)数据

3+X·考试当用题型与解题训练手册.数学卷/赵鸣,陈跃新编.—北京:中国致公出版社,2001.1

ISBN 7-80096-772-7/G·489

Ⅰ.3… Ⅱ.①赵…②陈… Ⅲ.数学课—高中—升学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 88012 号

3+X·考试当用题型与解题训练手册·数学卷

编　　著:赵鸣　陈跃新
执行主编:冯克诚
责任编辑:钱叶用
封面设计:中版在线

出版发行:中国致公出版社
(北京市西城区太平桥大街 4 号　电话:66168543　邮编:100034)
经　　销:全国新华书店
印　　刷:北京通县华龙印刷厂

开　　本:850×1168　1/32 开
印　　张:60.25
字　　数:1303.3 千字
版　　次:2001 年 1 月第 1 版

ISBN 7-80096-772-7/G·489
定　价:168.00 元(全 7 册)

《3+X·考试当用题型与解题训练手册》

出版说明

没有不考试的学习

没有不解题的考试

3+X

考试的革命?

逐步取代全国统一高考的最终形式!

3+X作为即在全国逐步推行的高考制度,作为中国考试改革经多年探索而确立下来的将逐步取代全国统一高考的最终形式,虽然只是一种考试制度,甚至只是一种高校招生考试制度,但其重视学生综合素质的考察和通过课程课业学习进行学生综合能力培养与训练的精神实质和指导思想,已然成为一种观念,直接和即将影响到学校课堂教学和学生课业学习的方方面面和每一个层次的每一个环节,涉及到教师教学方法和学生的学习方法的各方面。可以说是具有一定的革命性的改革。实践证明:把考试与素质教育教学对立起来、甚至想取消考试,是教育理论和实践中的一个极大的误区。**"没有不考试的学习"**解决问题的唯一方法,不是要取消考试,而是要使考试更为科学化、规范化,提高和确保考试的效度和信度。

必须承认,考试是检测学生综合素质和教师教学水平的最好形式,应考能力和效果是学生课业学习的综合素质和能力的最有效和最集中的反映和表现。脱离课业学习,进行学生的所谓素质教育是违背教育方针和教育规律的愚蠢的行为。

考试最直接的形式是解题。**"没有不解题的考试"**。

解题是课业学习的基本形式——解题是课业学习的主要内容——解题是课业学习的存在目的——解题是课业学习的兴奋中心。

课业学习是对人类经过千百年的理论和实践探索所形成的需经过严肃的科学思维整理的知识体系所形成的课程的学习,是一种艰苦的

接受性的智力劳动,而不是纯探索的、再发现的或者试误的学习。千百年的教育实践证明,解题是进行这种学习的不可取代的方式和环节。也是考查学习效果的最好形式。所以,解题教学的科学化、规范化直接影响到学生课业学习的质量,也直接影响到课堂教学的质量和学生的综合素质水平。因此,我们编撰本书:

1.3+X的考试制度,涉及到教学过程的,就是解题教学的环节。本书即按3+X考试改革体系所强调的重视和考察学生综合素质和通过课业学习培养学生解决问题的综合能力的精神,整理解题教学和训练的思想方法,形成完整、科学、规范的解题教学与指导训练体系,使其既适用于高考解题教学与指导、又适用于作为教学环节的各级各类考试训练指导、使其于中小学各级考试:招生、入校、入学、平时检测、中期、期末、阶段、单元、年级、升学、中考、高考等各级考试的解题教学都具有直接的实用价值。

2.强化各级各类教学中的解题教学与训练环节,使这一环节不仅是教师课堂教学和学生课业学习过程中的一个有机环节,而且也使这环节完全遵循自身相对独立的存在规律和模式,成为教学过程的集中体现,集中解决教学过程中出现的矛盾和问题。形成"解题教学——作业练习复习——考试解题技巧方法训练"的科学范式。

3.把解题的思想方法和思维训练放在培养解题能力的核心地位。把各学科的常用思想方法、思维方法和解决问题的思维模式纳入解题教学之中。

4.学生在解题教学与训练中是真正的主体,注意培养和激发学生解题的兴趣、主动的精神。本书不是教辅,更不是题库,它集中介绍的是解决问题的实用思路、策略、方法和技巧。

5.3+X考试常用题型与解题技巧是总结多年来的常见题型及解题方法,着重从题型入手,综合分析运用解题教学与训练的成果进行解题的思路、策略、方法、技巧的训练。是解题教学的直接应用。

本书编委会

2001年元月

《3＋X·考试当用题型与解题训练手册》

—— 编 委 会 ——

目 录

3+X·数学考试当用题型及解题技巧(上)

第一部分

3+X·数学客观题的解题思路与方法

第二部分

3+X·数学选择题的解题思路与方法

第三部分

3+X·数学填空题的解题思路与方法

第一部分
3+X·数学客观题的解题思路与方法

客观命题的题型

选择型考试作为一种客观考试正日趋完善,由于它具有消除评分人的主观因素、缩短评分时间、扩大应试范围等优点受到了越来越多的重视。因此,选择题在各个学科也已开始普及和应用。近年来上海的高考数学试卷中选择题分数占了考卷总分数的20%以上,但从选择题的类型来说还比较单一,离客观考试还有一定的距离。上海师大附中黄华老师介绍了选择题中的其它类型。

1.匹配型

匹配型是一种难度稍高的选择题型,它的基本结构为:先列出备选答案,然后提出若干问题,最后要求应试者给每个问题选配一个最合适的答案。

例1:备选答案

A.直角三角形　　B.钝角三角形

C.等边三角形　　D.锐角三角形

E.等腰直角三角形

问题①在$\triangle ABC$中三条边长分别为a,b,c,且满足$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$,则此三角形为(　)。

②已知在直角坐标系中有三点$A(-6,8)$、$B(6,-8)$、$C(8,6)$,则以A、B、C为顶点的三角形是(　)。

③已知$\triangle ABC$中三个内角,满足$\sin A\cdot\cos C<0$,则$\triangle ABC$是(　)。

上例对于五个备选答案,提出了三个问题,应试者从备选答案中为每一个问题匹配一个合适的选择。上例中①应配C,②应配E,③应配B。

当然对每一个备选答案可选用一次,也可根据问题的多少选用几

次或者根本不选用。

2.复合选择型

复合选择型的结构是在题目的后面列出用四个数字标明的选择答案，其中可以包括一个、二个、三个或四个正确的选择，应试者按规定组合格式所对应的字母 A,B,C,D，选择正确的答案。

例 2：平面 M 与平面 N 相交于 l，若 a 是平面 M 上的直线，则 a 与 l 的位置情况可以是下列哪几种？①a,l 为相交直线；②a 与 l 为异面直线；③a 与 l 重合；④a 与 l 为平行直线。

备选答案

A.①,②,③ B.①,②

C.①,②,③,④ D.①,③,④

E.②

正确选择为 D。

3.选择反应型

由于复合选择型对于应试者来说，即使部分选择已作出了正确的解题，但由于没有全选对或对组合答案不习惯而失分，因此我们可以出选择反应题，主要结构是一个题目后面直接列出 4～5 个用字母标明的选择，只要认定哪一个是错误或哪一个是正确，应试者都可直接在答卷上选择。

例 3：已知 $z=\sin 60°+i\sin 60°$，则它的幅角是

A.60° B.45° C.120°

D.135° E.－315°

答案：A B C D E

T ● ●

F● ●● 注：T 为真，F 为假

选择反应题型还可出一些逻辑推理题。

例 4：阅读以下命题，若是正确的就将"T"所对应的圆圈涂满，若是错误，就将"F"对应的圆圈涂满，并且，若逆命题是正确的，就将"CT"所对应的圆圈涂满，若逆命题是不正确的，就将"CF"所对应的圆圈涂满。注意每句要圈两个答案。

①在空间四点中，无三点共线则四点共面；

②$\alpha\neq\pi/6$ 则 $\sin\alpha\neq\frac{1}{2}$；

③$a(c+2)^2>b(c+2)^2>0$ 则 $a>b>0$；

④θ 是第Ⅱ象限内的角，则 $\frac{1}{2}\theta$ 是第Ⅰ象限内的角。

答：

题号	1	2	3	4
T	○	○	●	○
F	●	●	○	●
CT	○	●	○	○
CF	●	○	●	●

以上简单介绍三种题型，若与普通的选择题及填空题组成一张试卷，作为地区性的统考或会考，我认为考试的结果会更客观，并且可节约大量批考人员，因为除填空题外都可用计算机批改评分。

□充分利用客观性题型的条件

某年全国初中数学联赛点一题（选择题）第5小题为：△ABC中，$AB=2\sqrt{2}$，$AC=\sqrt{2}$，$BC=2$。设P为BC边上任意一点，则

(A)$PA^2<PB\cdot PC$；　(B)$PA^2=PB\cdot PC$；

(C)$PA^2>PB\cdot PC$；　(D)PA^2与$PB\cdot PC$的大小关系不确定。

答：(　)

此题正常的解答如下：

解：如图1，设$BP=x$，则$PC=2-x$，在△ABP中，由余弦定理有

$$PA^2=AB^2+BP^2-2AB\cdot BP\cos B$$
$$=8+x^2-4\sqrt{2}x\cos B。$$

在△ABC中，由余弦定理有

$$\cos B=\frac{(2\sqrt{2})^2+2^2-(\sqrt{2})^2}{2\cdot 2\sqrt{2}\cdot 2}$$
$$=\frac{10}{8\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{8},$$

$$\therefore\quad PA^2=8+x^2-4\sqrt{2}\cdot\frac{5\sqrt{2}}{8}x$$
$$=x^2-5x+8;$$

而$PB\cdot PC=x(2-x)=2x-x^2$，

$$\therefore\quad PA^2-PB\cdot PC=x^2-5x+8-2x+x^2$$
$$=2x^2-7x+8=2(x-\frac{7}{4})^2+\frac{15}{8}>0,$$

所以$PA^2>PB\cdot PC$，即本题答案选C。

上述解法，很严密，很完备，结论毫无疑问是正确的。但是，这种解法，对于选择题来说，显然太复杂了，而且很不必要。因为选择题给出

了四个答案,其中有而且只有一个答案正确,题目只要求我们选出正确的答案,并不要求写出解答的过程。我们应当充分利用选择题的这个前提条件,简化运算过程,甚至免去计算过程,迅速选出答案。

本题还有一个条件必须充分利用,就是"P 为 BC 边上的任意一点",这"任意"二字,绝不能轻易放过,它说明,P 在 BC 的任何特殊的位置上,答案都成立。因此,我们可以选择一些特殊的点来判断四个答案中那一个正确,省略很多不必要的计算和推理,大大简化判断过程。利用这一条件,我们介绍下列办法求解。

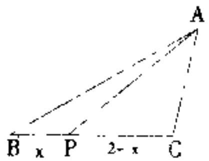

图 1

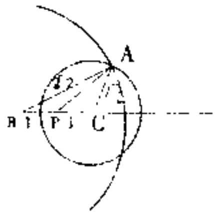

图 2

解 2:如图 2,取 P 为 BC 的中点,以 B 为圆心,以 $2\sqrt{2}$为半圆 B,又以 C 为圆心,以$\sqrt{2}$为半径作圆 C,设两圆交于 A。在△ABC 中,显然,$AP>\sqrt{2}$,因此,$AP^2>2$,而 $PB\cdot PC=1\times1=1$,

∴ $AP^2>PB\cdot PC$。故本题答案应选 C。

口答客观题训练及其数学思想方法

客观性题型在高考数学中具有举足轻重的地位,它仅要求选择正确答案或直接写出结果而不要写出推理过程,从而要求应试者有较高解题速度。通过口答客观题的训练,可培养学生良好思维品质,在此同时,亦提高了学生的解题速度。人类获得数学知识主要地是运用非演绎的思维,小学生获得数学知识与数学家发现数学真理在根本环节上,在思维方式上,往往也是类似的。非演绎的思考具有直观和直觉的特征,需要籍助于思维的独创性和灵活性。它作为对选择题的一种解题方法往往能避开常规解法,使问题迅速得到解决。韶关市第四中学陈启华老师总结的方法是:

1.独创性

在数学中是常表现为能用非一般的方法来解题。

例 1　两个边长为 a 的正方形,其中一个正方形的顶点是另一个的中心,则它们的重叠部分的面积为______。

分析:如图 1,将第二个正方形置于虚线的特殊位置上,进行面积的割补,即得所求面积$\frac{a^2}{4}$。

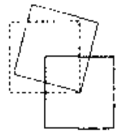

图 1

例 2　已知$\{a_n\}$是公差不为零的等差数列,若 s_n 是$\{a_n\}$的前 n 项和,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{na_n}{s_n}=$________。(1990 年文理类)

分析:一个无穷数列有且仅有一个极限值(常数)。由此,可赋题设一个公差非零的特殊等差数列,而最简单的等差数列是自然数数列。此时,$a_n=n, s_n=\frac{1}{2}n(n+1)$。口算:$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{na_n}{s_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=2$。

例 3　arctg(1/3) + arctg(1/2)的值是________。(1991 年理工农医类)

分析:一般可由三角法求解,但若由复数乘法几何意义,口算 $\arg[(3+i)\cdot(2+i)]=\arg(5+5i)=\pi/4$。

例 4　长方体的三个面的面积分别为 r_2, r_3 和 r_6,则长方体的体积是________。

分析:观察到$\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$,进一步构造一个三棱共顶点的棱长分别为 $1、\sqrt{2}、\sqrt{3}$ 的长方体。此时,$V_{长方体}=\sqrt{6}$。

这此题目若明确要求作为口算训练,从中培养学生的观察能力,和联想能力,使他们能摆脱常规解题步骤的约束,并能主动发现数学对象间的内在联系。

2.灵活性

表现为细致分析条件而迅速确定解题方向,能机敏地寻找新因素,发现隐含条件。

例 5　如果函数 f(x)对于一切实数 x 都有 f(3+x)=f(3-x)。方程 f(x)=0 有六个互不相等的实数根,则这六个根的和等于(　)。

(A)0　(B)9　(C)12　(D)18

分析:题目隐含条件是 f(x)的图象关于直线 x=3 对称,因而六个根必分为三对对称的根,而每一对的和必为 6,故选 D。

例 6　实数 x,y 满足方程 x+y=4,则 x^2+y^2 的最小值是(　)。

(A)4　(B)6　(C)8　(D)10　(1985 年广东高考题)

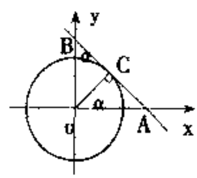

图 2

分析:结合目标函数的几何意义,可视为求与 x+y-4=0

相切的圆 $x^2+y^2=R^2$ 的 R^2 值,在脑中展现图 2,则 $R^2=|oc|^2=8$,故选 C。

例 7 椭圆 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 的切线分别交 x 轴、y 轴于 A、B 两点,则 $|AB|$ 的最小值为( )

(A)$2\sqrt{a^2+b^2}$ (B)$a+b$ (C)$\sqrt{2ab}$ (D)$4\sqrt{ab}$

分析:圆是椭圆的特例,可观察 $a=b=1$ 时即单位圆的情形,如图 2,$|AB|=|AC|+|BC|=tga+ctga\geq 2$,即 $|AB|_{min}=2$,此时 $a+b=1+1=2$,故选 B。

例 8 函数 $y=\sin(2x+\frac{5\pi}{2})$ 的图象的一条对称轴的方程是( )。

(A)$x=-\frac{\pi}{2}$ (B)$x=-\frac{\pi}{4}$ (C)$x=\frac{\pi}{8}$ (D)$x=\frac{5\pi}{4}$ (1991 年理工农医类)

分析:$y=\sin(2x+5\pi/2)=\sin(2x+2\pi+\pi/2)=\cos 2x$,而 $y=\cos 2x$ 的对称轴方程是 $x=k\pi/2(k\in z)$,故选 A。

例 9 $\alpha\neq\frac{\pi}{3}$ 是 $\cos\alpha\neq 1/2$ 的( )

(A)充分非必要条件 (B)必要非充分条件 (C)充要条件 (D)既非充分又非必要条件

分析:因原命题等价于其逆否命题:$\cos\alpha=1/2$ 是 $\alpha=\pi/3$ 的________条件。即可选 B。

例 10 圆 $x^2+2x+y^2-4y-3=0$ 上到直线 $x+y+1=0$ 距离为 $\sqrt{2}$ 的点共有( )

(A)1 个 (B)2 个 (C)3 个 (D)4 个 (1991 年理工农医类)

分析:联立方程求点个数较繁;作图误差大,难以确定点个数;由条件知圆半径为 $2\sqrt{2}$,圆心到已知直线距离为 $\sqrt{2}$,恰为其半,可见已知直线垂直平分圆的一条半径。故符合条件的点数为 3 选 C。

例 11 现有人民币壹角 1 张,贰角 1 张,伍角 1 张,壹元 4 张,伍元 2 张,用这些币任意付款,则可付出的不同数额的款项共有( )

(A)28 种 (B)120 种 (C)130 种 (D)119 种

分析:直接解题,对高中生恐非容易。但换个角度考虑:每取出一部分(不是全部)纸币形成的一种款额。剩余纸币则可形成相应的另一种款额,故如此付款的款项种数必为偶数,加上全部取出形成的一种,总种数为奇数。故选 D。这种思考,一般中小学生也能接受。

客观性题大都具有"短小精干,设问明确"的特点,解法入口宽方法多,但没有固定解答的模式,然而,近年仍有不少考生满足于套用常规题的解答方法,不仅费时,且常因一步不慎而失误。因此,在数学教学中,要注意帮助学生优化思维品质,注意解法的合理性。扎实的基本功对解答客观题型固然重要,作为教师,还应帮助学生分析客观题的特殊

性。注意寻找适当解法,逐步养成认真观察审题,勇于探索尝试的习惯。掌握数学的思想方法,培养良好的思维素质,形成良好的学习能力,比之学习数学知识本身,有更重要的意义。

□数学客观题的求解与中学生模糊思维的培养

众所周知,解数学客观题的方法是多种多样的,有直接法、间接法、特殊值法等等。教学活动中发现,学生无论采取那种方法求解,始终存在着一种心理障碍,下面我们先从一个实验说起。

由于数学选择题只设单项选择题,因此笔者将一道具有两个正确选择支的题目设计在一次考试中,其中正确的选择支设计为 A、D。

7 本不同的书全部分给 6 个人,每人至少一本的分法种数为(　)

(A) $C_6^1C_7^2P_5^5$,(B) $C_7^2P_5^5$,(C) $P_7^2P_6^6$,(D) $C_7^2P_6^6$。

(A)的正确性是:由 6 个人中选一个人从 7 本书中取 2 本书,其余 5 人各从余下的 5 本中取一本。(D)的正确性是:先取两本书作为一份,其余每本一份,将 6 份书分给 6 个人。

作为解这一选择题的一般思考方法是:首先考察(A),一但选定(A)后,(B)、(C)、(D)就无须再去考虑了。但对考试结果的统计:选(A)的占总人数的 25% 左右,选(D)的占总人数的 12% 左右,而既选(A)又选(D)的占总人数的 5% 左右(往往这部分学生又是数学成绩优秀的学生),其余的是选(B)或选(C)的学生。出现上述现象后,笔者又作过一次问卷调查:请回答下列问题,如果同意,请在备注栏内画√,不同意则画×。

你在做选择题时,选出你认为正确的答案后	备注
(A)一般不再考虑后面的选择支	
(B)有时要考虑后面的选择支	
(C)一般要考虑后面的选择支	

统计结果是:选(A)的点46.5%,选(B)的占33.4%,选(C)的占20.1%。

上面的实验结果表明,有相当一部分学生在做选择题时,当选出他认为正确的结果后并不放心,还要继续对后面的选择支加以考虑,看它们错在那里,从而进一步从反面肯定所选结果的可靠性。只有完成了这一思维过程后,学生心理才得到一种平衡。而这种思维定势的主要危害是降低了学生解答客观题的速度。笔者认为,即使学生做出了正确结果,也是一种损失,而且是一种隐形的损失。因为正确结果的得出是以消耗过量的时间为代价得出的,特别是在考场上。从本质上讲,这种思维定势实际上是一种心理障碍,这种心理障碍的形成,则是长期的明晰思维造成的一种必然结果。我们不妨称之为"数学客观题效应"。那么如何消除这种心理障碍,培养学生模糊思维的能力,则是摆在我们面前的一个必须解决的问题。然而中学教材中涉及到模糊思维的数学材料极少,而且以往的思维方式也极大地阻碍了模糊思维的培养。针对这个问题笔者就数学客观题教学谈谈这方面的认识。

现实世界中,模糊的量是普遍存在的。例如高压、低温、偏上、适度、美丽等等,这些概念作为现实世界中事物和现象的状态反映,在量上是没有明晰界限的。一般说来,逻辑思维活动,可用明晰的概念来描述和刻划,而非逻辑思维活动,却具有很大的模糊性,无法用明晰的概念来描述和刻划。这就是模糊思维产生的直接背景。在这里,我们不对模糊思维加以定义,只是利用非逻辑思维活动中的思维的模糊性来解决中学数学中的一些客观题,从而达到培养中学生模糊思维的能力,消除"数学客观题效应",使学生在解数学客观题的能力上产生一个飞跃,提高中学生的思维品质。

例 1 在复数集 C 中,方程 $|x|=1-x+3i$ 的解是( )

(A)$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, (B)$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$, (C)$-4+3i$, (D)$4-3i$。

我们将 x 设为 $a+bi(a、b\in R)$,则有 $\sqrt{a^2+b^2}=1-a+(3-b)i$,这时易得 $b=3$,然而复数虚部为 3 的选择支只有(C),从而选(C)。但我们并没有求出 x 来确定(C)!

例 2 (1998 年重庆市达标试题)已知 $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$,使 $(-\omega i)^n\in N$ 的最小正整数 n 是( )

(A)3, (B)4, (C)6, (D)12。

将 $(-\omega i)^n$ 改写为 $(-1)^n\omega^n i^n$,我们首先考虑 $(-1)^n\omega^n i^n$ 何时为实数,因当且仅