

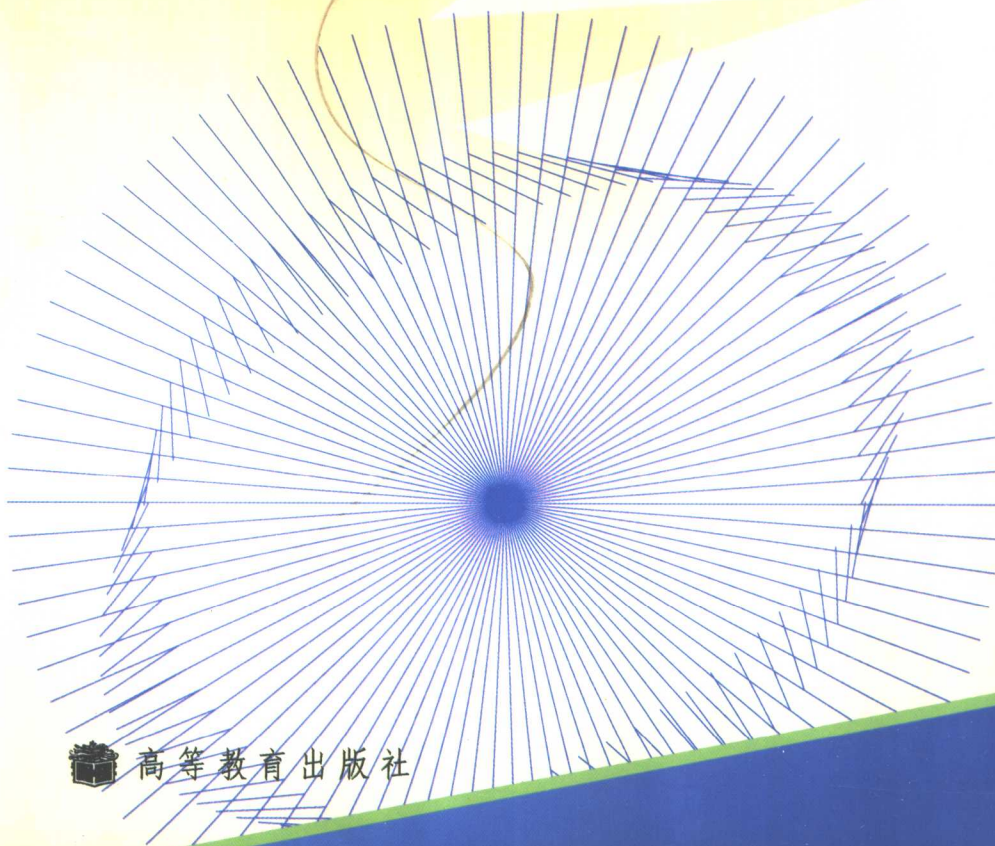


普通高等教育“十五”国家级规划教材

线性代数

数学专业用

□ 李尚志 编著



高等教育出版社

0151.2

0151.2
256

普通高等教育“十五”国家级规划教材

线 性 代 数

数学专业用

李尚志 编著

高等教育出版社

内容简介

本书是普通高等教育“十五”国家级规划教材,是作者主讲的国家级精品课程“线性代数”所使用的教材。适合作为大学本科数学类专业线性代数(或称“高等代数”)课程的教材,也可作为各类大专院校师生的参考书,以及关心线性代数和矩阵论知识的科技工作者或其他读者的自学读物或参考书。

本书具有如下特点:

1. 不是从定义出发,而是从问题出发来展开课程内容,引导学生在分析和解决这些问题的过程中将线性代数的知识重新“发明”一遍,貌似抽象难懂的概念和定理也就成为显而易见。
2. “空间为体,矩阵为用”,自始至终强调几何与代数的相互渗透。
3. 不板着脸孔讲数学,努力采用生动活泼、学生喜闻乐见的语言。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/李尚志编著. —北京:高等教育出版社, 2006.5

数学专业用

ISBN 7-04-019870-3

I. 线... II. 李... III. 线性代数-高等学校-教材 IV. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 079534 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landaco.com
印 刷	北京宏伟双华印刷有限公司		http://www.landaco.com.cn
		畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	787×960 1/16	版 次	2006年5月第1版
印 张	35.75	印 次	2006年5月第1次印刷
字 数	670 000	定 价	40.80 元
播 页	1		

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 19870-00

前言

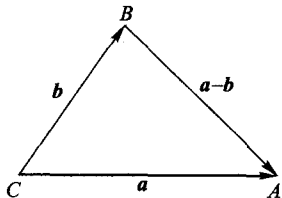
线性代数是大学最重要的数学基础课之一。其基本内容是线性空间和矩阵的理论。线性代数的知识,是学习数学和其他学科的重要基础,并且在科学研究各个领域和各行各业中有广泛的应用。该课程对于培养学生的逻辑推理和抽象思维能力、空间直观和想像能力具有重要的作用。

本书是普通高等教育“十五”国家级规划教材,是作者主讲的国家级精品课程“线性代数”所使用的教材,适用于大学本科数学类专业的线性代数课(或称为“高等代数”课)作为教材。

“线性代数”的内容比“数学分析”或“微积分”少,但不少学生感到学起来并不更容易。主要的困难是太抽象。比如,微积分中的导数可以理解为切线的斜率、运动的速度,定积分可以理解为求图形的面积、由速度求路程,这都比较自然,容易理解。而线性代数从一开始就是一个接一个从天而降的抽象定义,使初学者感到不好理解。比如:行列式为什么要这样定义?矩阵为什么要这样相乘?向量到底是有方向和大小的量,还是数组,还是定义了加法和数乘的任意非空集合中的元素?线性相关、线性无关是什么意思,有什么用处?让许多初学者迷惑不解。

抽象确实是学习线性代数的一个拦路虎。一提起抽象,给人的印象就是莫名其妙、晦涩难懂、脱离实际、没有用处,总之是一个令人害怕的贬义词。然而,抽象并不是线性代数特有的,也不是从大学开始的。比如,幼儿园的小孩就要学 $3+2=5$,这是抽象还是具体?怎样教小孩 $3+2=5$?是先教加法的定义,然后再按照定义来做 $3+2=5$ 吗?加法的定义,幼儿园没教过,小学和中学也没教过。然而孩子们却学会了加法,不是靠定义学会加法,而是通过例子学会了加法。比如,可以教小孩数自己的手指来学 $3+2=5$,3根手指加2根手指就是5根手指。也可以数铅笔,3枝铅笔加2枝铅笔就是5枝铅笔。假如已经数过了手指,又数过了铅笔,一个细心而胆大的小孩发现手指是肉做的,铅笔是木头做的,举手问老师:“5是肉做的还是木头做的?”老师怎样回答?假如又数了5个乒乓球,发现手指和铅笔是长的,乒乓球是圆的,再问:“5是长的还是圆的?”老师又怎样回答?也许老师会斥责这个不听话的调皮小孩:“好好听课,不要胡说八道!”然而,这样的小孩才是聪明的小孩,会思考的小孩。他注意到了5根手指、5枝铅笔、5个乒乓球的差别,这确实是聪明的表现。但只是注意到差别还不够,还要让他学会忽略这种差别,将肉做的5根手

指、木头做的5枝铅笔“混为一谈”，将5个长的物体(手指和铅笔)和5个圆的物体(乒乓球)“混为一谈”，忽略它们的差别而只关心它们的共同点：数量的多少，这才学会了 $3+2=5$ ，这才能够将 $3+2=5$ 用到千千万万的其他例子，如3本书加2本书，3张桌子加2张桌子等。要让小孩学会忽略这些差别，不是一件容易的事情。这正如郑板桥说的，聪明难，糊涂亦难，由聪明而糊涂尤难。这种忽略差别的过程，就是“由聪明而糊涂”的过程，也就是数学的抽象的过程。抽象不是从天而降，而是来自于实际，来自于具体的例子。然而，抽象又没有停留于实际，而是“脱离”了实际：它脱离了具体的例子，舍弃了不同例子的不同点而提取了它们的共同点，这样才能应用到更多更广泛的实际例子中。有一个电视节目的时事评论员常说：“许多看似不相干的事情，其实都是相互关联的。”我们可以说：“许多看似不相同的事情，其实都有共同点。”从不同的事情中发现共同点，研究共同点，得到放之四海而皆准的真理，用到更多的不同事物中去，这就是抽象。这样的抽象不是没有用处，反而是神通更广大。数学由低级到高级的过程，就是抽象的程度由低到高的过程，也是应用的范围由狭窄到广泛的过程。幼儿园的 $3+2=5$ 忽略掉了大小、长短、原料的差别，只关心数量的多少。初中的 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ 将字母 a, b 所代表的数的多少也忽略掉了，只关心它们的共同的运算规律。更进一步的“糊涂”是：公式 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ 中的字母 a, b 可以不代表数而代表几何向量，将其中的乘法理解为向量的内积，公式照样成立。画出有向线段来表示公式中向量，如下图： $\overrightarrow{CA} = a$ ， $\overrightarrow{CB} = b$ ，则 $\overrightarrow{BA} = a - b$ 。



公式 $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b$ 的几何意义就是

$$|\overrightarrow{BA}|^2 = |\overrightarrow{CA}|^2 + |\overrightarrow{CB}|^2 - 2|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|\cos C.$$

这就是余弦定理！当 C 是直角时就是勾股定理！只不过一念之差，在乘法公式 $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ 中“难得糊涂”，将数与向量“混为一谈”，就立即得到了余弦定理和勾股定理，数学的抽象的威力由此可见一斑！

我在念研究生的时候，导师曾肯成教授经常指定一些经典著作让我们读，并且轮流到讲台上讲，他在下面听，向讲的人提出各种问题。通常他并不问某某定义怎样叙述、某某定理怎样证明，而是问：“书上为什么要写这个内容？不写可不可以？”这样的问题很难回答，但我们不得不努力去思考怎样回答。假如我们在讲线性代数时间：“书上为什么要写矩阵和向量空间？为什么要写

线性相关和线性无关？可不可以删去？”应当怎样回答？前人在发明这些内容的时候都是为了解决一定的问题。写进教科书中的内容，更是经过历史的检验被证明是最重要最有用的东西。课本上的定义和定理的叙述，每一句话甚至每个字都是经过多少年多少人的反复推敲得到的，字字值千金。我们今天没有必要完全重复当年发明这些知识的过程，更没有必要去重复他们走过的弯路。但是，如果我们的学生只是去死记硬背这些定义或定理的条文，而对这些条文的来龙和去脉毫不了解，不了解它们产生的背景，不知道它们有什么用处，不了解这些抽象的概念和结论所能代表的一些具体例子，就不能体会这些定义和定理的深刻含义和强大威力，反而觉得它们莫名其妙，枯燥乏味，学起来困难，学了也不知道有什么用处。

有鉴于此，我们形成了如下的教学模式，也就是编写本教材的指导思想：不是从定义出发，而是从问题出发展开课程内容。我们围绕线性代数的主要内容，精选了一些有重大意义而又浅显易懂的问题作为组织课程的主要内容线索。引导学生一起来分析这些问题，尝试建立一定的数学工具来解决这些问题。这实际上也就是数学建模的过程——将所要解决的问题（实际问题或理论问题）用适当的数学语言加以描述，转换为数学问题（即数学模型），用一定的数学工具（已有的工具或发明新的工具）来加以解决，再将所得到的数学解翻译成原来问题的解。在解决原有问题的过程中又产生新的问题，需要建立新的概念、方法和技巧。这个过程本来是这些知识当初建立的过程，也是学生今后搞科学研究和应用要经历的过程。我们不是将前人得到的知识灌输给学生，而是引导学生重新经历一次发明这些知识来解决问题的过程。这样做的好处是：不只是背诵叙述知识的条文，而是体会到这些条文的来龙去脉，体会到这些知识的原创性的想法和实质，提前接受了从事科研工作的训练，培养了创新意识和素质。

现在我们要建立创新型国家，培养具有创新精神的人才是一项重要任务。对于培养创新精神，有一种看法认为大学低年级学生基础知识不够，还谈不上创新，只有到研究生阶段才能培养创新精神和素质。其实，即使到了硕士研究生阶段，也很少有人能做出真正具有创新性的研究成果，主要还是在为以后做出创新性成果打好基础。而培养创新精神和素质，也完全可以从本科生低年级就开始。低年级大学生学的基础课内容，对人类来说是已有的知识，可能还是几百年前发明的知识，但对这些学生来说却是新的知识。让他们将这些知识重新发明一遍，虽然发明出来的东西对人类不是新的成果，但对他们自己却是发明创造的一种模拟和演习，是一次创新的实践，对于培养创新精神和素质很有好处。

我们希望通过从问题出发的教学模式引起学生探索问题的兴趣，培养创新

精神。但是我们也明白,采用这种模式也可能有它的缺点和风险。如果把握不好,有可能导致叙述冗长,主线不突出,干扰学生对主干内容的理解。为了避免这一缺点,我们一方面努力做到选择问题恰当,由问题引入概念时适度,强调思路而不在细节上纠缠。另一方面,为了减少风险,我们在教材编写体例上采取了一个特殊的处理方式:在每一章的第1, 2, …节前面设置第0节,其内容是提出问题,对问题做一定分析,引出本章的主要概念。而从第1节仍是按传统的方式从定义开始叙述。使用本教材的教师可以对第0节灵活处理。比如可以直接从第1节开始讲授,将第0节留给感兴趣的学生自己去阅读。也可以将第0节的内容作提纲挈领的简单介绍,主要介绍解决问题的思路。除了每一章的第0节以解决问题为线索引入教材内容之外,我们还从第二章开始将每章的最后一节设为“更多的例子”,其中一部分是一些综合性、技巧性较高的问题的解答,而另一部分就是基本知识的一些有启发性的应用实例以及扩展性的知识,希望通过这样的例子展现抽象的基础知识在解决各种问题中的强大威力,并且为如何利用这些知识解决各种问题提供范例。教师在使用本教材时可以根据各自的具体情况灵活选用这些例子,不一定将它们全部讲完。

具体地说,在第1章我们首先选取了怎样解多元线性方程组来作为要解决的第一个问题,这是线性代数的重大问题之一,而且与中学数学中解二元一次方程组的加减消元法自然衔接,学生容易接受。我们将中学数学对方程的变形提高到方程组的同解变形,将加减消去法提高到方程的线性组合、线性方程组的初等变换。由于解线性方程组只用到加减乘除四则运算,在讨论方程组的系数与解之间的关系时很自然引入了数域的概念。在将字母略去不写之后很自然地引入了数组向量来表示线性方程,用矩阵来表示线性方程组,用矩阵的初等行变换来解线性方程组。矩阵的初等变换无疑是整个线性代数最重要的计算手段,借助于解线性方程组这一重大问题让学生得到了充分的训练。

第2章引入了线性空间,这可能是本教材与以往教材差别最大的一部分。在这一章中,围绕线性方程组中方程的个数与解集的大小之间的关系的讨论,以自然的方式引出了线性相关、线性无关、秩、基、维数等一批最重要而又最抽象难懂的概念,以方程作为向量的重要例子展开了对线性空间的主要内容的全面讨论。我们不是先研究了抽象的线性空间的性质再应用到各种具体空间中去,而是反过来,先对数组空间得出了这些性质,然后指出对这些性质的证明其实不依赖于数组空间的特殊性质,而是只依赖于加法和数乘的运算律(8条公理),因此可以适用于定义了加法和数乘的任何其他对象——抽象的线性空间。这不但使抽象的线性空间的定义的引入比较自然,而且对于什么是数学的抽象、怎样进行数学的抽象、怎样由直观而不严格的想法(方程的个数、解集的大小)建立严格的数学概念(线性相关、线性无关、秩、维数)提供了一个重要的范

例,让学生在以后的学习和研究中可以模仿。在这一章的最后一节“更多的例子”中,利用子空间的思想求 Fibonacci 数列的通项公式、设计幻方,利用同构的思想得出 Lagrange 插值公式、中国剩余定理,都是应用抽象的代数概念来解决问题的很好的例子。这些例子都有另外的专门的方法和技巧来解决,而在我们这里却不需要学习任何专门的方法和技巧,只需要将线性代数中的最简单的基本思想适当地应用,问题就迎刃而解。

由于第 2 章已经建立了线性空间的概念,第 3 章就可以从几何的背景引入行列式。以往的行列式教学中有一件怪事:学生从空间解析几何中知道了三阶行列式可以代表平行六面体的体积,却不知道二阶行列式可以代表平行四边形的面积。我们将 n 元线性方程组解释为一个几何问题:由 n 个已知向量线性组合出另一个已知向量: $x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$, 求组合系数 $x_1, \cdots, x_n$ 。通过对二元一次线性方程组所对应的几何问题的分析和解答得到了二阶行列式以及二元一次方程组的 Cramer 法则,再将它推广到了 n 阶行列式及 n 元线性方程组的 Cramer 法则,将 n 阶行列式看成 n 维“体积”,将行列式中某一列的代数余子式组成的向量看成其余各列的“外积”。从几何的观点看来,行列式的定义和各种性质都显得理所当然,容易接受。

代数和几何相互渗透不可分割,这是线性代数的一个基本特点,也是本课程和教材的一个重要特点。线性代数名曰代数,其实也是几何。在某种意义上可以说:空间解析几何是 3 维空间的线性代数,而线性代数是 n 维空间的解析几何。线性代数的主要内容,可以用“空间为体,矩阵为用”来概括。它研究的对象是由向量组成的线性空间,这是几何对象。研究的工具则是矩阵,这是代数工具。学生如果能够将关于向量空间的几何问题转化为矩阵的问题,用矩阵运算加以解决,再“翻译”回几何的语言得到答案,就算是对线性代数的基本理论和方法有了一个较好的掌握。几何与代数紧密不可分割,是同一个事物的两个方面。然而这两个方面也各有所长,各有所短。几何的优点是形象直观便于理解,缺点是不便于计算;矩阵的优点是便于计算,缺点是不便于理解。因此,在处理问题时要发挥它们各自的长处,适当回避它们的缺点:几何观点主要用来建模,将几何语言转换为矩阵语言之后再用矩阵计算来解决问题,然后再用几何观点加以理解和解释。当然,也有很多问题可以不用矩阵计算来解决,而用几何推理来解决。对这方面的例子,我们同时给出了矩阵计算和几何推理两种解决方法。在多数情况下,用矩阵来计算有比较“死板”的现成方法,容易掌握,类似于解析几何方法;用几何推理比较灵活多变,比较有趣,然而掌握起来更困难一些,类似于综合几何的证明方法。对初学者,我们还是提倡他们先掌握将几何问题转化成矩阵、通过矩阵运算来处理的方法,在此基础上再去自由发挥,追求更为灵活多变的几何方法。我们这一指导思想贯

穿于全书的所有各章。第1章解方程组是代数,但在第2章一开始就对线性方程组给了一个几何解释。整个第2章中,以方程组为主要的模型讨论了线性空间这一几何对象。第3章的行列式和第4章的矩阵运算虽然都是代数,但都从几何模型引入,再讲代数算法。第6章与第7章的线性变换和第9章的内积本来就是几何对象,重点讲怎样将它们归结为矩阵运算(相似和相合)来处理,而在讲矩阵运算时又时时指出这些运算的几何背景,始终在几何观点的指引下进行运算。第8章的二次型的定义方式(二次齐次多项式,矩阵的乘积)和化简二次型的算法(配方,矩阵的相合)本来都是代数的。将二次型看成线性空间上的函数,二次型的代数表达式就成为这个函数在某一组基下的坐标表示,二次型的化简就归结为选择适当的基使其坐标表示尽可能简单,变成了一个几何问题。为了实现几何与矩阵的左右逢源,我们突出了向量空间的同构的应用:在选取一定的基之后将每个向量对应于它的坐标,从而将有限维线性空间同构到数组空间来处理,在讲坐标变换、线性变换、内积时都坚持这一处理模式,将线性空间的各种问题都归结为数组空间的问题来处理,通过矩阵运算来解决。

矩阵的相似标准形的算法和证明是线性代数中最困难的问题。本书第7章中对这一问题分别给出了两种不同的解决方式。第一种方式是通过解线性方程组尝试和探索求 Jordan 标准形的矩阵算法,从中提炼出 Jordan 标准形理论的几何证明,并在这个几何理论指导下给出了通过解线性方程组求 Jordan 标准形和过渡矩阵的一般算法。这样一种处理方式从理论上和算法上都可以成为一个独立完整的体系,不需要再用 λ 矩阵来补充。而在此之后再利用 λ 矩阵的相抵(也称为“等价”)来研究相似标准形则是在更高观点下的另外一种独立的体系。这个更高观点就是模的观点,将线性变换 $\mathcal{A}$ 作用的空间 V 看成数域上一元多项式环 $F[\lambda]$ 上的模,通过研究这个模的分解来研究 $\mathcal{A}$ 的标准形矩阵,其中的计算归结为多项式环 $F[\lambda]$ 上的矩阵(即 λ 矩阵)的相抵。但是,在线性代数课程中一般不讲模的概念,因此就在讲了 λ 矩阵的相抵变换之后采用了一个较为“初等”的方式来将 λ 矩阵相抵的结论转化为数域上的矩阵的相似标准形的结论。这样的处理方式,回避了较高级的名词“模”而只用到较低级的知识——多项式矩阵的运算。这在逻辑上当然是对的。然而,由于它在回避“模”这个名称时将它所蕴涵的几何想法也完全抛弃,整个处理过程变得没有想法而只有运算。为什么在研究矩阵的相似的时候需要研究 λ 矩阵? λ 矩阵的相抵怎样转化为矩阵的相似?显得莫名其妙,好像纯属偶然。我们的观点是,“模”这个高级的名称可以回避,但它的思想却并非难懂反而非常精彩,可以借用。实际上,高级的东西未必比低级的东西难懂,甚至往往还更容易懂。例如,用方程来解应用题就往往比算术方法容易,用微积分基本定理求图形的面积也比用初等几何的方法直截了当。类似地,用“模”的高级观点来处理线性

变换也可以比仅用矩阵运算这样的较低级的观点更容易理解。我们采取的处理方式是：只回避“模”这个“吓人的”名称，而将它实质上的几何思想换一种平易近人的方式来叙述：将线性变换 $\mathcal{A}$ 在每个向量 α 上的作用看作 $\mathcal{A}$ 与 α 的乘法，将 $\mathcal{A}$ 看成向量的“系数”，允许 $\mathcal{A}$ 及其多项式成为矩阵的元，这样得到的矩阵就是 λ 矩阵，其中的字母 λ 代表的就是线性变换 $\mathcal{A}$ 。所有的矩阵运算全部在这样的几何观点的指引下进行，每一步运算都有明确的目的，直到最后达到目标，整个过程显得自然而合理，水到渠成。

有一个俗语“挂羊头卖狗肉”，说的是将低价产品(狗肉)挂一个高价招牌(羊头)，假冒高价产品(羊肉)来出售，目的是骗取更多的钱。我们正好相反，是“挂狗头卖羊肉”：卖的是高价的“肉”——按模的思想来处理问题，但不挂“模”这样的高价招牌，免得它将学生吓着了，而换了一个较为平易近人的招牌——“将线性变换 $\mathcal{A}$ 看成向量的系数”。这样做的目的是为了让学生免受高级名词的恐吓而又能享受到高级名词背后的实惠。这样的“挂狗头卖羊肉”的事情在第3章引入行列式的时候也做过：将行列式看作它的各个列向量的“某种乘积”，可以按乘法的运算律展开，这实际上是说行列式是各个列向量的多重线性函数。然而，“多重线性函数”这样的高级名词听起来太吓人，我们用“按乘法的运算律展开”这样的中学数学中的初级术语来代替，实质内容相同，但更容易被学生接受。此外，第2章中用“有多余的方程”来讲线性相关，用“货真价实”来讲线性无关，用“方程的真正个数”来讲向量组的秩，也都是“挂狗头卖羊肉”的例子。

一般的教材都将多项式安排在全书的最前面，以便于应用。但是，由于多项式这部分内容的思想方法与其他内容很不相同，这样一种安排好像就是由多项式与线性代数两门不同风格的课程硬凑在一起。在中国科技大学数学系，经过反复考虑和多年的实践，将多项式这部分内容从线性代数中拿出去，与原有的初等数论一起组成一门课程“整数与多项式”，让学生在大学第一学期(在“线性代数”之前)学习。由于整数与多项式都有带余除法，很多性质非常类似，放到一起非常合理而融洽。但为了不开设“整数与多项式”课程的学校使用本书，书中还是写了多项式这一章，但没有放在全书最前面，而是放在第5章，在讲完线性空间和矩阵的代数运算之后，线性变换之前。之所以不放在第1章是为了一开始就开门见山展开线性代数的主要思想，将线性代数最基本的概念和基本方法(线性空间及矩阵运算)一气呵成。这些内容组成线性代数的入门阶段。从线性变换开始进入一个更高级的新阶段，而多项式对于建立线性变换的理论起着重要作用，因此将多项式放在这两个阶段之间，线性变换之前。当然，这也有一个问题：在线性变换之前的线性空间和行列式计算也用到多项式，而那时还没有讲多项式。但这个问题不大，主要是因为中学数学中已经

学过多项式的一些初步知识,稍加补充就足够在这些章节中使用了。还要指出的是:在中学数学中将多项式的字母理解为未知数,而在大学数学中将多项式的字母看作“未定元”,只作为一个符号而不代表具体的东西,这让学生不容易理解。如果将多项式放在第1章,实在是举不出例子说明多项式的字母除了代表未知数之外还能代表什么别的东西。然而,在矩阵之后讲多项式,就可以说多项式的字母不但可以代表未知数,还可以代表方阵,以后还可以代表别的对象(如线性变换)。说它是符号或者未定元,不限定它代表什么对象,是为了允许它代表更多更广泛的对象。在多项式这一章的第0节§5.0中,所举的例子就是将多项式的字母换成矩阵产生的令人惊喜的结果,从一个方面来说明为什么要将“未知数”上升为“未定元”。当然,将多项式放在线性代数的中间,确实有将线性代数拦腰斩断的感觉,这是一个缺点。为了降低这种安排的负面影响,我们在多项式这一章中也举了一些利用多项式来解决矩阵和行列式的例子。如果有的教师不喜欢这种安排,可以将多项式这一章提到最前面去,只要将涉及到矩阵或行列式的例子去掉或移到别的适当位置就行了。

本书的以上指导思想和做法是作者在20多年的教学经验中逐步形成的。特别是已经按照以上所说的指导思想在对连续8届学生的教学实践中进行了探索,在探索过程中逐步将这些指导思想转化为切实可行的实施办法,并且不断根据教学效果进行调整和完善,才形成了现在这样的教学模式,以及反映这种教学模式的教材。在教学过程中,参考了中国科学院数学与系统科学研究院许以超教授编写的《代数学引论》(上海科学技术出版社,1966),使用了中国科技大学李炯生教授和同济大学查建国教授编写的《线性代数》(中国科学技术大学出版社,1989)作为教材,在本书编写过程中从这些教材以及北京大学王萼芳教授和首都师范大学石生明教授修订、北京大学数学系几何与代数教研室前代数小组编写的《高等代数》(高等教育出版社,2003年第3版)中选用了一些习题,特在此对以上教授表示感谢。此外,上海大学王卿文教授为本书的编写提供了一些习题,也在此表示感谢。

李尚志

2005.10

目 录

第 1 章 线性方程组的解法	1
§ 1.0 解多元一次方程组的尝试	1
§ 1.1 线性方程组的同解变形	2
§ 1.2 矩阵消元法	9
§ 1.3 一般线性方程组的消元解法	16
第 2 章 线性空间	25
§ 2.0 关于线性方程组中方程个数的讨论	25
§ 2.1 线性相关与线性无关	30
§ 2.2 向量组的秩	40
§ 2.3 子空间	51
§ 2.4 非齐次线性方程组	65
§ 2.5 一般的线性空间	71
§ 2.6 同构与同态	80
附录 1 集合的映射	87
§ 2.7 子空间的交与和	88
§ 2.8 更多的例子	97
第 3 章 行列式	105
§ 3.0 平行四边形面积的推广	106
§ 3.1 n 阶行列式的定义	111
§ 3.2 行列式的性质	118
§ 3.3 展开定理	130
§ 3.4 Cramer 法则	140
§ 3.5 更多的例子	145
第 4 章 矩阵的代数运算	157
§ 4.0 线性映射的矩阵	157
§ 4.1 矩阵的代数运算	162
§ 4.2 矩阵的分块运算	175
§ 4.3 可逆矩阵	185
§ 4.4 初等矩阵与初等变换	196
§ 4.5 矩阵乘法与行列式	205

§ 4.6 秩与相抵	215
§ 4.7 更多的例子	225
第 5 章 多项式	234
§ 5.0 从未知数到不定元	234
§ 5.1 域上多项式的定义和运算	236
§ 5.2 最大公因式	241
§ 5.3 因式分解定理	249
§ 5.4 多项式的根	252
§ 5.5 有理系数多项式	263
附录 2 p 元域 $\mathbb{Z}_p$ 上的多项式	272
§ 5.6 多元多项式	275
§ 5.7 更多的例子	283
第 6 章 线性变换	295
§ 6.0 线性变换的几何性质	295
§ 6.1 线性映射	300
§ 6.2 坐标变换	311
§ 6.3 像与核	317
附录 3 商空间	325
§ 6.4 线性变换	326
§ 6.5 特征向量	330
§ 6.6 特征子空间	340
§ 6.7 最小多项式	344
§ 6.8 更多的例子	352
第 7 章 Jordan 标准形	360
§ 7.0 Jordan 形矩阵引入例	360
§ 7.1 Jordan 形矩阵	364
§ 7.2 根子空间分解	372
§ 7.3 循环子空间	378
§ 7.4 Jordan 标准形	383
§ 7.5 多项式矩阵的相抵	394
§ 7.6 多项式矩阵的相抵不变量	405
§ 7.7 特征方阵与相似标准形	415
§ 7.8 实方阵的实相似	422
§ 7.9 更多的例子	429
第 8 章 二次型	437

§ 8.0 多元二次函数的极值问题	437
§ 8.1 用配方法化二次型为标准形	440
§ 8.2 对称方阵的相合	447
§ 8.3 正定的二次型与方阵	457
§ 8.4 相合不变量	463
§ 8.5 更多的例子	466
第 9 章 内积	475
§ 9.0 内积的推广	475
§ 9.1 Euclid 空间	478
§ 9.2 标准正交基	482
§ 9.3 正交变换	493
§ 9.4 实对称方阵的正交相似	501
§ 9.5 规范变换与规范方阵	508
§ 9.6 酉空间	519
§ 9.7 复方阵的酉相似	523
§ 9.8 双线性函数	532
§ 9.9 更多的例子	548

第1章 线性方程组的解法

线性代数就是“一次”代数，一个重要论题就是解多元一次方程组。一次方程组也称为线性方程组。本章介绍了解一般的 n 元线性方程组的高斯消去法。

§ 1.0 解多元一次方程组的尝试

中学数学学习了二元一次方程组的解法。但在科学研究和应用中经常需要解更多未知数的一次方程组。

例 1 在平面直角坐标系中，作一条抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过三个已知点 $(-3, 20)$, $(1, 0)$, $(2, 10)$ ，求抛物线方程。

解 求抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的方程也就是求 a, b, c 的值。将三个已知点的坐标代入抛物线方程得到

$$\begin{cases} 9a - 3b + c = 20 & (1) \\ a + b + c = 0 & (2) \\ 4a + 2b + c = 10 & (3) \end{cases}$$

用加减消去法消去 c ：

$$(1)\text{式} - (2)\text{式} : 8a - 4b = 20 \quad (4)$$

$$(3)\text{式} - (2)\text{式} : 3a + b = 10 \quad (5)$$

再由(4)，(5)两式消去 b ：

$$(5)\text{式} + \frac{1}{4} \times (4)\text{式} : 5a = 15 \quad (6)$$

由(6)解出 $a = 3$ 。

代入(5)解出 $b = 1$ 。

再将 $a = 3$, $b = 1$ 代入(2)解出 $c = -4$ 。

经检验可知

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \\ c = -4 \end{cases}$$

是原方程组的解。所求的抛物线方程为 $y = 3x^2 + x - 4$ 。 $\square$

以上采用的仍然是中学数学解二元一次方程的加减消元法：由原方程分别乘以适当的常数再相加进行消元，得到未知数更少的新方程。新方程还可以分

第1章 线性方程组的解法

线性代数就是“一次”代数，一个重要论题就是解多元一次方程组。一次方程组也称为线性方程组。本章介绍了解一般的 n 元线性方程组的高斯消去法。

§ 1.0 解多元一次方程组的尝试

中学数学学习了二元一次方程组的解法。但在科学研究和应用中经常需要解更多未知数的一次方程组。

例 1 在平面直角坐标系中，作一条抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过三个已知点 $(-3, 20)$, $(1, 0)$, $(2, 10)$ ，求抛物线方程。

解 求抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的方程也就是求 a, b, c 的值。将三个已知点的坐标代入抛物线方程得到

$$\begin{cases} 9a - 3b + c = 20 & (1) \\ a + b + c = 0 & (2) \\ 4a + 2b + c = 10 & (3) \end{cases}$$

用加减消去法消去 c ：

$$(1)\text{式} - (2)\text{式} : 8a - 4b = 20 \quad (4)$$

$$(3)\text{式} - (2)\text{式} : 3a + b = 10 \quad (5)$$

再由(4)，(5)两式消去 b ：

$$(5)\text{式} + \frac{1}{4} \times (4)\text{式} : 5a = 15 \quad (6)$$

由(6)解出 $a = 3$ 。

代入(5)解出 $b = 1$ 。

再将 $a = 3$, $b = 1$ 代入(2)解出 $c = -4$ 。

经检验可知

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \\ c = -4 \end{cases}$$

是原方程组的解。所求的抛物线方程为 $y = 3x^2 + x - 4$ 。 □

以上采用的仍然是中学数学解二元一次方程的加减消元法：由原方程分别乘以适当的常数再相加进行消元，得到未知数更少的新方程。新方程还可以分

别乘以适当的常数再相加进一步消元, 得到含未知数更少的新方程. 最后得到只含一个未知数的方程, 就能求出解来.

具体说来, 在例1中由原方程(1), (2), (3)得到了新方程(4), (5), (6). 由(6), (5), (2)解出了未知数的值. 因此, 可以说是将由(1), (2), (3)组成的原方程组(I)经过变形成为由(2), (5), (6)组成的新方程组:

$$\begin{cases} (1) \\ (2) \\ (3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2) \\ (5) \\ (6) \end{cases}$$

由于新方程都是由原方程(1), (2), (3)得出来的, 原方程组的解一定都是新方程组的解. 但是, 反过来要问: 由(2), (5), (6)得出的解一定是原方程组的解吗?

在中学数学中解分式方程或无理方程的时候, 将原方程变形为新方程时, 可以保证原方程的解都是新方程的解, 但不能保证新方程的解一定是原方程的解, 而可能出现增根. 而现在, 同样地由原方程得出了新方程, 由新方程(5), (6)与一个原方程(2)一起得出的解是否一定是另外两个原方程(1), (3)的解呢? 是否可能是“增根”呢? 这个问题的答案并不显然. 因此, 在例1中所得到的解代入原方程组进行了检验.

但是, 如果由新方程组中的方程(2), (5), (6)也可以反过来得出另外两个原方程(1), (3), 那就可以断定(2), (5), (6)的公共解一定是原方程组的解而不可能是“增根”, 不需代回原方程组检验.

事实上, 由(3) - (2) = (5)得(2) + (5) = (3), 可见由方程(2), (5)可以得到(3). 另一方面, 由(5) + $\frac{1}{4}$ (4) = (6)得 $4 \times (6) - 4 \times (5) = (4)$, 再由(1) - (2) = (4)知(2) + (4) = (1), 从而(2) + $4 \times (6) - 4 \times (5) = (1)$, 可见由(2), (5), (6)可以得到(1).

这说明了由(2), (5), (6)组成的新方程组确实可以反过来得出原方程(1), (2)从而得出原方程组. 新方程组的解也是原方程组的解, 因此原方程组与新方程组同解, 不会发生“增根”.

但如果解每一个方程组都要这样来论证它不会发生增根, 岂不太费事! 我们希望能预先设计出方程组的一些简单的基本变形, 经过这样的变形得到的新方程组可以反过来得到变形前的方程组, 这就可以保证每次变形前后的方程组同解.

§ 1.1 线性方程组的同解变形

1. 线性方程组的定义

定义 1.1.1 n 个未知数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的如下形式的方程