霍炳海　袁兵　闫海清　李鸿　编

大学物理解题方法荟萃与评析

PHYSICS
PHYSICS
PHYSICS

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

大学物理解题方法荟萃与评析

霍炳海　袁兵　闫海清　李鸿　编

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书作为理工科大学物理的课外辅导书,按照我国目前理工科大学物理课程的教学大纲要求编写.全书共分12章,内容包括质点力学、刚体的定轴转动、狭义相对论基础、气体动理论、热力学、静电场、稳恒磁场、电磁感应与麦克斯韦方程组、机械振动、机械波与电磁波、波动光学以及量子物理基础.每章均有内容提要和解题示例.本书把重点放在题目的多解展示与对比及对不同解题法的评析上,使读者不仅对物理概念及规律的理解有所加深,而且解题能力也会有显著的提高.

本书不仅适合理工科本科生,而且对考研的学生及其他有关读者和青年教师也有一定的参考价值.

图书在版编目(CIP)数据

大学物理解题方法荟萃与评析/霍炳海等编.—天津:天津大学出版社,2006.5

ISBN 7-5618-2289-8

Ⅰ.大... Ⅱ.霍... Ⅲ.物理学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.04

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第048215号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨欢
地　　址 天津市卫津路92号天津大学内(邮编:300072)
电　　话 发行部:022-27403647　邮购部:022-27402742
网　　址 www.tjup.com
短信网址 发送“天大”至916088
印　　刷 昌黎太阳红彩色印刷有限责任公司
经　　销 全国各地新华书店
开　　本 170mm×240mm
印　　张 24
字　　数 526千
版　　次 2006年5月第1版
印　　次 2006年5月第1次
印　　数 1-3 000
定　　价 34.00元

前　言

目前,市面上有关理工科大学物理课外辅导书比比皆是,然而,真正使读者感兴趣的热销书却不多见.究其原因,根本的一条就是有的辅导书特色不突出,甚至相互抄袭;有些内容及编排雷同,没有从读者的实际需要出发编写和解读.根据读者学习大学物理的现状与需要,本书一方面注意使读者掌握必要的科学知识,另一方面注意培养和训练读者分析与解决问题的能力,把握好重点及难点,通过大量例题,探究、归纳与展现物理的解题方法,最大限度地提高读者的解题能力.本书特色明显,主要表现在以下几个方面:

1.针对性强.对象以工科大学本科生为主(适当兼顾考研生和大专生),针对学生能听懂课上所学内容,但不会分析题,不知如何下手解题和不知选用何种方法解题,用何种讲过的理论内容解题的弱点,以及作业中与考试中常出现的错误及误解和答疑中经常提出的问题等,精选题目,难易适中.

2.实用性强.以国内大学物理教材中的常见习题、难点题、重点题、常考题为主,经教师精心筛选形成一个解题体系.

3.解题方法多.个别题目的解法多达8种,既给出了题目的常规解法、常用方法,也挖掘出了一些特殊的解法.不少解题思路新颖独特,解法简便实用,由浅入深,是其他参考书中所少见的.通过这些方法,力求实现培养读者的发散思维.

4.用一题多解的方法实现了不同章节间内容的链接,使读者通过了解一题的不同解法,从中复习和掌握多方面的内容,学会如何运用所学知识,培养自己的思维能力和用研究法学习物理的能力.

5.例题后一般均附有针对不同解法的点评、归纳与比较.使读者在比较解题法中提高自己的解题能力,做到把知识融会贯通,探索解题的奥秘.

6.考虑到学生手中都有教材及讲课教师在讲完每章后都有总结的情况,为突出本书的特色,故在每章的第一部分,仅简要给出相关章节的主要公式和概念,使之一目了然.重点在第二部分,即解题示例.

本书中一些例题的解法曾多次在教学过程中使用,深受学生欢迎.天津大学物理学科组的教师为本书提供了部分例题和解法,特别是青年教师张大成、马丽娜为部分例题进行了解答,在此深表谢意.

由于作者水平有限,书中难免有疏漏或错误,敬请同行及读者指正.

编者

2006年5月

目　　录

第一章　质点力学

一、内容提要

1.参照系

描述物体运动时而被用作参考的其他物体叫参照系.

2.运动方程

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$$

又称位置矢量,简称位矢,即用以确定质点位置的矢量.

在直角坐标系下的分量式:

$$x=x(t),y=y(t),z=z(t).$$

在极坐标系下的分量式:

$$r=r(t)\quad(\text{位矢的大小});$$

$$\varphi=\varphi(t)\quad(\text{位矢与 } X \text{ 轴正方向的夹角}).$$

3.速度

质点位置矢量的时间变化率:

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}.$$

在直角坐标系下的分量式:

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},v_z=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}.$$

在极坐标系下的分量式:

$$v_r=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\quad(\text{位矢大小的时变率,又称径向速度分量});$$

$$v_\varphi=r\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\quad(\text{与位矢垂直的速度分量,又称横向速度分量}).$$

速率:速度矢量的大小,可表示为

$$v=|\boldsymbol{v}|=\frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|}{\mathrm{d}t},$$

或
$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\quad(\text{式中 } \mathrm{d}s \text{ 是 } \mathrm{d}t \text{ 时间内通过的元路程}),$$

或
$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}=\sqrt{v_r^2+v_\varphi^2}.$$

4.加速度

质点速度的时间变化率:

$$a=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\text{或}\boldsymbol{a}=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}.$$

在直角坐标系下的分量式:

$$a_x=\frac{dv_x}{dt},a_y=\frac{dv_y}{dt},a_z=\frac{dv_z}{dt}.$$

在自然坐标轴下的分量式:

$$a_t=\frac{dv}{dt}\quad\text{(质点速率的时间变化率,沿轨道切线);}$$

$$a_n=\frac{v^2}{\rho}\quad\text{(垂直轨道切线,指向瞬时曲率中心).}$$

加速度的大小

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}=\sqrt{a_t^2+a_n^2}.$$

5.相对运动

设有甲、乙及丙三个质点,则其相对位置

$$\boldsymbol{r}_{\text{甲对乙}}=\boldsymbol{r}_{\text{甲对丙}}+\boldsymbol{r}_{\text{丙对乙}};$$

相对位移 $\Delta\boldsymbol{r}_{\text{甲对乙}}=\Delta\boldsymbol{r}_{\text{甲对丙}}+\Delta\boldsymbol{r}_{\text{丙对乙}}$;

相对速度 $\boldsymbol{v}_{\text{甲对乙}}=\boldsymbol{v}_{\text{甲对丙}}+\boldsymbol{v}_{\text{丙对乙}}$;

相对加速度 $\boldsymbol{a}_{\text{甲对乙}}=\boldsymbol{a}_{\text{甲对丙}}+\boldsymbol{a}_{\text{丙对乙}}$.

注意式中各量下标的循环顺序,视不同问题,自己去设定甲、乙及丙.

6.牛顿运动定律

在惯性系中的数学表达式:

第一定律 $\Sigma\boldsymbol{F}_i=\boldsymbol{0}$;

第二定律 $\Sigma\boldsymbol{F}_i=m\boldsymbol{a}$;

第三定律 $\boldsymbol{F}_{12}=-\boldsymbol{F}_{21}$.

在非惯性系中的数学表达式:

第一定律 $\Sigma\boldsymbol{F}_j+\boldsymbol{F}_i=\boldsymbol{0}$,

第二定律 $\Sigma\boldsymbol{F}_j+\boldsymbol{F}_i=m\boldsymbol{a}_r$, $\Big\}$式中 $\boldsymbol{F}_i$ 为惯性力;

第三定律 $\boldsymbol{F}_{12}=-\boldsymbol{F}_{21}$.

7.功与能

变力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功 $W=\int_1^2\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_1^2 F\cos\theta ds$.

重力所做的功 $W_{1-2}=-(mgh_2-mgh_1)$.

万有引力所做的功 $W_{1-2}=-\left[\left(-G\frac{Mm}{r_2}\right)-\left(-G\frac{Mm}{r_1}\right)\right]$.

弹性力所做的功 $W_{1-2}=-\left(\frac{1}{2}kx_2^2-\frac{1}{2}kx_1^2\right)$.

动能 $E_k=\frac{1}{2}mv^2$.

重力势能　　　　　　　　$E_P = mgh$.

弹性势能　　　　　　　　$E_P = \frac{1}{2}kx^2$.

万有引力势能　　　　　　$E_P = -G\frac{Mm}{r}$.

功与能间关系:

动能定理　　　　　　　　$W_{合} = W_{k2} - E_{k1}$.

功能原理　　　　　　$W_{外} + W_{非保内} = E_2 - E_1$.

机械能守恒定律　若 $W_{外} + W_{非保内} = 0$,则 $E_2 = E_1$.

保守力的功与势能的关系　$W = -(E_{P_2} - E_{P_1})$.

保守力与势能的关系　$\boldsymbol{F} = -\left(\frac{\partial E_P}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial E_P}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial E_P}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)$用于已知势函数求保守力.

8.动量定理与动量守恒定律

质点的动量定理　　　　$\int \boldsymbol{F}_{合}\,\mathrm{d}t = m\boldsymbol{v}_2 - m\boldsymbol{v}_1$.

质点系的动量定理　　$\int \boldsymbol{F}_{合}\,\mathrm{d}t = \sum m_i\boldsymbol{v}_i - \sum m_i\boldsymbol{v}_{i0}$,

$$\boldsymbol{F}_{合}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}(\sum m_i\boldsymbol{v}_i)\text{(微分形式)}.$$

在 $\mathrm{d}t$ 时间内,$\boldsymbol{F}_{合}$视为恒力.

动量守恒定律　若 $\boldsymbol{F}_{合} = 0$,则 $\sum m_i\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{c}$,体系动量不变.

二、解题示例

例题 1-1　一人站在岸上,用一条绳子拉船使其向岸边靠拢,如图 1-1(a)所示.若人以恒定速率 v_0 收绳,求船的速度.

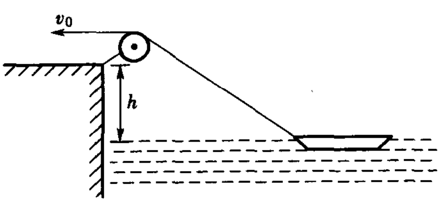

图 1-1(a)

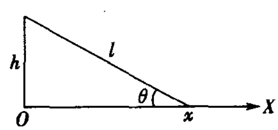

图 1-1(b)

解法一　取 X 轴水平向右,坐标原点 O 在岸边处,船与轮间绳长为 l,船瞬时位置为 x,如图 1-1(b)所示.由图中几何关系,有

$$x^2 = l^2 - h^2,$$

或

$$x = \sqrt{l^2 - h^2}. \qquad ①$$

此式为船的运动方程,只不过 x 不是时间 t 的显函数而已.

按速度定义,船的瞬时速度

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\sqrt{l^2-h^2}}{\mathrm{d}t}=\frac{l\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}}{\sqrt{l^2-h^2}}. \qquad ②$$

据题意,有 $v_0=-\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}$(注意收绳,$\mathrm{d}l<0$),结果有

$$v=-\frac{l}{\sqrt{l^2-h^2}}v_0, \qquad ③$$

或

$$v=-v_0/\cos\theta. \qquad ④$$

解法二 如图 1-1(c)所示,选取滑轮处为平面极坐标系的原点 O,船的位置矢量

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t).$$

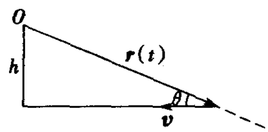

图 1-1(c)

其径向分速度

$$v_r=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}|\boldsymbol{r}|}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=-v_0, \qquad ⑤$$

可见,收绳速度只是船沿径向的速度分量.设沿径向的单位矢量为 $\boldsymbol{r}_0$,则

$$v_r=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}_0=v\cos(\pi-\theta)=-v\cos\theta, \qquad ⑥$$

故

$$v=v_r/-\cos\theta=-v_0/\cos\theta,$$

或

$$v=-\frac{l}{\sqrt{l^2-h^2}}v_0,$$

此处 v 系船的速率.

解法三 由图 1-1(b)知

$$x=l\cos\theta. \qquad ⑦$$

把式⑦两边对时间 t 求导

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\cos\theta-(l\sin\theta)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}. \qquad ⑧$$

又

$$\sin\theta=\frac{h}{l}, \qquad ⑨$$

把该式两边对时间 t 求导

$$\cos\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=-\frac{h}{l^2}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}, \qquad ⑩$$

或

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=-\frac{h}{l^2\cos\theta}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}. \qquad ⑪$$

把式⑪代入式⑧化简后得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\cos\theta=\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}, \qquad ⑫$$

或

$$v\cos\theta=-v_0,$$

即

$$v=-v_0/\cos\theta,$$

或 $$v=-\frac{l}{\sqrt{l^2-h^2}}v_0.$$

解法四 船速 $\boldsymbol{v}$ 水平向左，把其正交分解，沿绳子方向的分速度 $v'=v\cos\theta$，其中 $v'=v_0$，考虑 $\boldsymbol{v}$ 在沿 X 轴的反方向，结果有

$$v=-\frac{v_0}{\cos\theta}=-\frac{l}{\sqrt{l^2-h^2}}v_0.$$

解法五 在收绳过程中，绳上的不同点有不同的速度，但所有点的速度沿绳子的速度分量是相同的，该分量大小即 v_0. 自然，绳子端点 P 的速度，即船的速度 $\boldsymbol{v}$ 在绳子方向分量也是 v_0，如图 1-1(d)所示. 故有

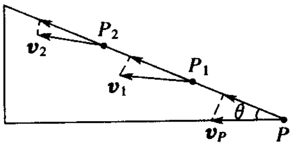

图 1-1(d)

$$v\cos\theta=-v_0,$$

或 $$v=-v_0/\cos\theta.$$

此式仅指二速度间大小关系.

解法六 设绳子中的拉力为 $\boldsymbol{T}$，其元功为 $-T\mathrm{d}l(\mathrm{d}l<0)$. 而该力作用在船上，所做元功又可记为 $T\cos(\pi-\theta)\mathrm{d}x(\mathrm{d}x<0)$. 结果有

$$-T\mathrm{d}l=T\cos(\pi-\theta)\mathrm{d}x,$$

或 $$-\mathrm{d}l=(-\cos\theta)\mathrm{d}x. \tag{13}$$

式⑬两边同除以 $\mathrm{d}t$，有

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\cos\theta,$$

得 $$v=-v_0/\cos\theta.$$

点评

(1)通过本题中的解法一，学会如何从几何关系找到质点的运动方程. 当然，此时的运动方程往往是时间 t 的隐函数形式. 把运动方程对时间 t 求一阶及二阶导数，可求得瞬时速度和瞬时加速度随一些空间变量的变化规律.

(2)在解此题时，常犯的错误是把 v 视为 $\boldsymbol{v}_0$ 的水平分量，结果得到 $v=v_0\cos\theta$. 产生这种错误的原因一是没有认识到 $\boldsymbol{v}_0$ 是船在绳子方向的分速度，只是从表面上看 $\boldsymbol{v}_0$ 是倾斜的，想当然地认为 $\boldsymbol{v}_0$ 的水平分量就是船的速度；二是从几何图形看，因为 $x=l\cos\theta$，结果有 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\cos\theta$，或 $v=v_0\cos\theta$. 正确的理解应是 θ 也是变量，$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 与 $\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}$ 和 θ 关系应如式⑧所示，$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\neq\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\cos\theta$，自然是 $v\neq v_0\cos\theta$.

例题 1-2 如图 1-2(a)所示，一人用绳子拉着一辆位于高台上的小车在地面上向前跑着. 求小车的速度. 设人的速度为 $\boldsymbol{u}$(设 $t=0$ 时，人在点 C 处).

解法一 设 AB 间绳长为 l，随着人向前跑动，l 的长度随时间变化，则 l 的时间变化率即是车瞬时速度的大小. 由图中知

$$l^2=b^2+u^2t^2.$$

把该式两边对时间 t 求导，有

$$ll' = u^2 t,$$

则车行速度

$$v = l' = \frac{u^2 t}{l} = \frac{u^2 t}{\sqrt{b^2 + u^2 t^2}}.$$

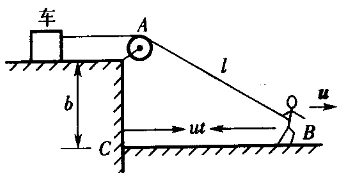

图 1-2(a)

解法二　如图 1-2(b)所示，人的速度为 $\boldsymbol{u}$，其沿绳子的速度分量即车的行进速度

$$v = u\cos\alpha$$
$$= u\frac{ut}{\sqrt{b^2 + u^2 t^2}} = \frac{u^2 t}{\sqrt{b^2 + u^2 t^2}}.$$

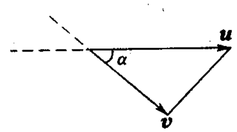

图 1-2(b)

解法三　如图 1-2(c)所示，以 A 为坐标原点，采用平面极坐标系，人在行进中，相应的 r 值变化，则 r 的时变率即为车的速度，故有

$$v = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\sqrt{b^2 + u^2 t^2}}{\mathrm{d}t}$$
$$= \frac{u^2 t}{\sqrt{b^2 + u^2 t^2}}.$$

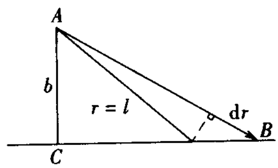

图 1-2(c)

例题 1-3　一半径为 R 的半圆形凸面沿水平面以速度 $\boldsymbol{v}_0$ 向右运动，迫使直杆 AB 沿铅直轨道向上运动，如图 1-3(a)所示，求此瞬时杆的速度大小.

解法一　把杆的端点 A 视为一质点，它相对凸面的速度为 $\boldsymbol{v}_r$，沿凸面切线方向；同时凸面对地面以速度 $\boldsymbol{v}_0$ 向右运动. 则杆端 A 的速度 $\boldsymbol{v}_A$ 应为二者之矢量和，如图 1-3(b)所示. 不难看出，有

$$v_A = v_0/\tan 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}v_0.$$

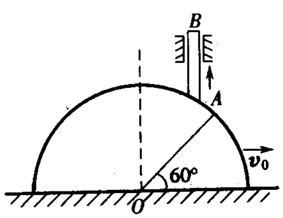

图 1-3(a)

解法二　当凸面沿水平方向向右移动 $\mathrm{d}l$ 距离时，杆端 A 沿凸面滑过弧长为 $\mathrm{d}s$，沿铅直方向向上移动距离 $\mathrm{d}h$，此 $\mathrm{d}h$ 为杆端 A 对地面位移的大小，如图 1-3(c)所示. 由 $\mathrm{d}h$、$\mathrm{d}l$ 和 $\mathrm{d}s$ 组成一直角三角形，且半径 R 与 $\mathrm{d}s$ 垂直. 显然有

$$\mathrm{d}h = \mathrm{d}l \cdot \tan 30°,$$

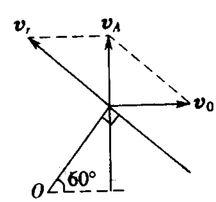

图 1-3(b)

则杆端 A 对地面速度大小为

$$v_A = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\tan 30° = v_0 \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}v_0.$$

解法三　杆端 A 相对凸面沿半径为 R 的圆环运动(如图 1-3(d)所示)，其相对轨道方程为

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

两边对时间 t 求导，有

$$xx' + yy' = 0$$

式中 y' 是杆端 A 沿 Y 方向的相对速度分量，因该方向凸面对地面的速度为零，因此 y' 也是杆端 A 对地面的速度. 而 x' 是杆端 A 沿 X 方向的相对速度分量，其大小也是凸面对杆在该方向上速度分量的大小，因杆在水平方向上无速度，故其大小也是凸面在该方向上速度分量的大小. 因此，杆端 A 的速度大小为

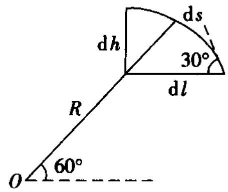

图 1-3(c)

$$v_A = |y'| = \left| -\frac{x}{y}x' \right| = |-\cot 60°| v_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}v_0 .$$

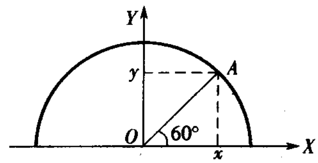

图 1-3(d)

例题 1-4 一质点做斜上抛运动，初速度为 $\boldsymbol{v}_0$，抛射角为 θ_0，设抛出时刻为零，求该质点的切向加速度 a_t 和法向加速度 a_n 的变化规律.

解法一 取抛出点为坐标系原点，X 轴沿水平方向，Y 轴沿铅直方向，则质点在 t 时刻的速度分量

$$v_x = v_0 \cos\theta_0 ,\ v_y = v_0 \sin\theta_0 - gt .$$

速率 $$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(v_0\cos\theta_0)^2 + (v_0\sin\theta_0 - gt)^2} . \qquad ①$$

根据切向加速度定义有

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{(v_0\cos\theta_0)^2 + (v_0\sin\theta_0 - gt)^2}$$

$$= -g\frac{v_0\sin\theta_0 - gt}{\sqrt{v_0^2 - 2v_0 gt\sin\theta_0 + g^2t^2}} , \qquad ②$$

按法向加速度定义有

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} .$$

但本题中，不知曲率半径 ρ 随时间 t 的变化，因此，无法用此式求得 a_n 随时间 t 的变化规律. 然而，在抛体运动中，质点的加速度 $\boldsymbol{g}$ 是恒定不变的，它是一个已知量. 又因为

$$a^2 = g^2 = a_t^2 + a_n^2 , \qquad ③$$

则从式③可解得法向加速度

$$a_n = \sqrt{g^2 - a_t^2}$$

$$= g\frac{v_0\cos\theta_0}{\sqrt{v_0^2 - 2v_0 gt\sin\theta_0 + g^2t^2}} . \qquad ④$$

解法二 如图 1-4 所示，任一时刻 t，质点的切向加速度和法向加速度分别为

$$a_t = g\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -g\sin\theta , \qquad ⑤$$

和 $$a_n = g\cos\theta . \qquad ⑥$$

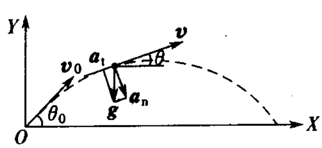

图 1-4

考虑到

$$\sin\theta=\frac{v_y}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}}=\frac{v_0\sin\theta_0-gt}{\sqrt{(v_0\cos\theta_0)^2+(v_0\sin\theta_0-gt)^2}},$$

及

$$\cos\theta=\frac{v_x}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}}=\frac{v_0\cos\theta_0}{\sqrt{(v_0\cos\theta_0)^2+(v_0\sin\theta_0-gt)^2}},$$

有

$$a_t=-g\frac{v_0\sin\theta_0-gt}{\sqrt{(v_0\cos\theta_0)^2+(v_0\sin\theta_0-gt)^2}}=-g\frac{v_0\sin\theta_0-gt}{\sqrt{v_0^2-2v_0gt\sin\theta_0+g^2t^2}},$$

$$a_n=g\frac{v_0\cos\theta_0}{\sqrt{(v_0\cos\theta_0)^2+(v_0\sin\theta_0-gt)^2}}=g\frac{v_0\cos\theta_0}{\sqrt{v_0^2-2v_0gt\sin\theta_0+g^2t^2}}.$$

解法三 设速度 $\boldsymbol{v}$ 的单位矢量为 $\boldsymbol{\tau}$，则切向加速度

$$a_t=\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{g}\cdot\frac{\boldsymbol{v}}{v}=-g\boldsymbol{j}\cdot\frac{v_x\boldsymbol{i}+v_x\boldsymbol{j}}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}}$$

$$=\frac{-gv_y}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}}=-g\frac{v_0\sin\theta_0-gt}{\sqrt{v_0^2-2v_0gt\sin\theta_0+g^2t^2}}.$$

设沿法线方向的单位矢量为 $\boldsymbol{n}$，则法向加速度

$$a_n=\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{n}=g\cos\theta$$

$$=g\frac{v_0\cos\theta_0}{\sqrt{v_0^2-2v_0gt\sin\theta_0+g^2t^2}},$$

而轨道曲线的曲率半径随时间的变化规律为

$$\rho=\frac{v^2}{a_n}=\frac{(v_0\cos\theta_0)^2+(v_0\sin\theta_0-gt)^2}{g\dfrac{v_0\cos\theta_0}{\sqrt{v_0^2-2v_0gt\sin\theta_0+g^2t^2}}}$$

$$=\frac{(v_0^2-2v_0gt\sin\theta_0+g^2t^2)^{3/2}}{gv_0\cos\theta_0}.$$

当然，亦可由高等数学中曲线的曲率半径表达式

$$\rho=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$$

求出本题中 ρ 的随时间的变化关系.

点评

(1)上述三种解法中，常采用的是解法一.应用此方法求解时，关键掌握三点:①先求出质点的速率表达式;②注意切向加速度是速率的时变率;③求出切向加速度的表述，再由$\sqrt{a^2-a_t^2}$得出法向加速度的表达式.

(2)解法二中的 $a_t=-g\sin\theta$ 和 $a_n=g\cos\theta$ 更适宜求给定的点处的切向加速度和法向加速度.记住 θ 是所研究点处的速度 $\boldsymbol{v}$ 与 X 轴正方向夹角.若知此处 $\boldsymbol{v}$ 的大小，则

用 $\rho=\dfrac{v^2}{a_n}=\dfrac{v^2}{g\cos\theta}$ 可求此处的曲率半径. 例如,在抛出点处 $\theta=\theta_0$, $v=v_0$,则 $a_t=-g\sin\theta_0$, $a_n=g\cos\theta_0$,而 $\rho=\dfrac{v_0^2}{g\cos\theta_0}$.

(3)建议读者按以上给出的求解方法,练习求质点做平抛运动中的 a_t, a_n, ρ.

例题 1-5 一质点的运动方程是 $\boldsymbol{r}=a\cos\omega t\boldsymbol{i}+b\sin\omega t\boldsymbol{j}$,其中 a、b、ω 均为正的恒量,求该质点的切向加速度和法向加速度的表达式.

解 由题意知,该质点运动方程分量式为

$$x=a\cos\omega t, \tag{①}$$

$$y=b\sin\omega t. \tag{②}$$

式①和式②联立,消去 t,得质点的轨道方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{③}$$

可见,该质点在一平面内做椭圆运动.

质点的加速度

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=-\omega^2(a\cos\omega t\boldsymbol{i}+b\sin\omega t\boldsymbol{j})$$

$$=-\omega^2\boldsymbol{r}. \tag{④}$$

从式④看出,加速度 $\boldsymbol{a}$ 的大小和方向都随时间 t 变化. 然而仍可用上题的方法求切向加速度 $\boldsymbol{a}_t$ 和法向加速度 $\boldsymbol{a}_n$.

解法一 由式①和式②,可得速率

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$$

$$=\omega\sqrt{a^2\sin^2\omega t+b^2\cos^2\omega t},$$

则

$$a_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(\omega\sqrt{a^2\sin^2\omega t+b^2\cos^2\omega t})}{\mathrm{d}t}$$

$$=\frac{\omega^2(a^2-b^2)\sin\omega t\cos\omega t}{\sqrt{a^2\sin^2\omega t+b^2\cos^2\omega t}}.$$

而

$$a_n=\sqrt{a^2-a_t^2}=\sqrt{a_x^2+a_y^2-a_t^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)^2-a_t^2}$$

$$=\sqrt{(-a\omega^2\cos\omega t)^2+(-b\omega^2\sin\omega t)^2-\frac{\omega^4(a^2-b^2)\sin^2\omega t\cos^2\omega t}{a^2\sin^2\omega t+b^2\cos^2\omega t}}$$

$$=\frac{\omega^2ab(\sin^2\omega t+\cos^2\omega t)}{\sqrt{a^2\sin^2\omega t+b^2\cos^2\omega t}}=\frac{\omega^2ab}{\sqrt{a^2\sin^2\omega t+b^2\cos^2\omega t}}.$$

解法二

$$a_t=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{a}\cdot\frac{\boldsymbol{v}}{v}=\frac{a_xv_x+a_yv_y}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}}$$
$$=\frac{(-a\omega^2\cos\omega t)(-a\omega\sin\omega t)+(-b\omega^2\sin\omega t)(b\omega\cos\omega t)}{\omega\sqrt{a^2\sin^2\omega t+b^2\cos^2\omega t}}$$
$$=\frac{\omega^2(a^2-b^2)\sin\omega t\cos\omega t}{\sqrt{a^2\sin^2\omega t+b^2\cos^2\omega t}},$$

而 a_n 可采用解法一的方法求得

$$a_n=\sqrt{a_x^2+a_y^2-a_t^2}=\frac{\omega^2ab}{\sqrt{a^2\sin^2\omega t+b^2\cos^2\omega t}}.$$

解法三　如图 1-5 所示，切向加速度

$$a_t=a\cos\theta.$$

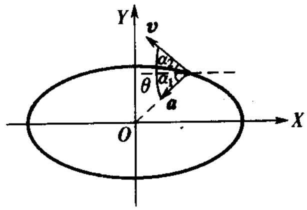

图 1-5

注意到　$\theta=\alpha_1+\alpha_2$,

则

$$a_t=a\cos(\alpha_1+\alpha_2)$$
$$=a(\cos\alpha_1\cos\alpha_2-\sin\alpha_1\sin\alpha_2)$$
$$=a\left(\frac{-a_x}{a}\cdot\frac{-v_x}{v}-\frac{-a_y}{a}\frac{v_y}{v}\right)$$
$$=\frac{a_xv_x+a_yv_y}{v}=\frac{\omega^2(a^2-b^2)\sin\omega t\cos\omega t}{\sqrt{a^2\sin^2\omega t+b^2\cos^2\omega t}}.$$

而

$$a_n=a\sin\theta=a\sin(\alpha_1+\alpha_2)$$
$$=a(\sin\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\alpha_1\sin\alpha_2)$$
$$=a\left(\frac{-a_y}{a}\cdot\frac{-v_x}{v}+\frac{-a_x}{a}\cdot\frac{v_y}{v}\right)$$
$$=\frac{a_yv_x-a_xv_y}{v}=\frac{(-b\omega^2\sin\omega t)(-a\omega\sin\omega t)-(-a\omega^2\cos\omega t)(b\omega\cos\omega t)}{\omega\sqrt{a^2\sin^2\omega t+b^2\cos^2\omega t}}$$
$$=\frac{\omega^2ab}{\sqrt{a^2\sin^2\omega t+b^2\cos^2\omega t}}.$$

曲率半径随时间的变化规律为

$$\rho=\frac{v^2}{a_n}=\frac{\omega^2(a^2\sin^2\omega t+b^2\cos^2\omega t)}{\dfrac{\omega^2ab}{\sqrt{a^2\sin^2\omega t+b^2\cos^2\omega t}}}$$
$$=\frac{(a^2\sin^2\omega t+b^2\cos^2\omega t)^{3/2}}{ab}.$$

点评

本题与上题的不同点是加速度 $\boldsymbol{a}$ 也随时间变化，尽管如此，它们求解的思路是一样的. 比较以上三种解法，解法一及解法二较简单和直观，而解法三要繁杂得多，因此，极少用这种方法求解.

例题 1-6 一质点 P 沿半径为 R 的圆周运动，质点绕位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 的起点 O 以角速度 ω 匀速转动，如图 1-6(a)所示．设 $t=0$ 时，质点在点 Q．求：

(1)位置矢量随时间 t 的变化规律；

(2)瞬时速度和瞬时速率；

(3)瞬时加速度；

(4)速度沿位置矢量方向上的分量．

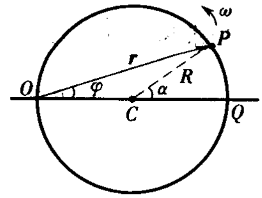

图 1-6(a)

解 (1)求位置矢量随时间 t 的变化规律．

建立坐标系 OXY，如图 1-6(b)所示．

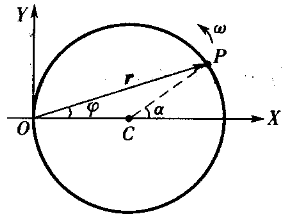

图 1-6(b)

解法一

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r} &= x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}\\ &= (R + R\cos\alpha)\boldsymbol{i} + (R\sin\alpha)\boldsymbol{j}\\ &= (R + R\cos 2\varphi)\boldsymbol{i} + (R\sin 2\varphi)\boldsymbol{j}\\ &= R(1+\cos 2\omega t)\boldsymbol{i} + (R\sin 2\omega t)\boldsymbol{j}.\end{aligned}$$

解法二

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r} &= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP}\\ &= R\boldsymbol{i} + (R\cos\alpha)\boldsymbol{i} + (R\sin\alpha)\boldsymbol{j}\\ &= R\boldsymbol{i} + (R\cos 2\omega t)\boldsymbol{i} + (R\sin 2\omega t)\boldsymbol{j}\\ &= R(1+\cos 2\omega t)\boldsymbol{i} + (R\sin 2\omega t)\boldsymbol{j}.\end{aligned}$$

解法三

$$\boldsymbol{r} = (|\boldsymbol{r}|\cos\varphi)\boldsymbol{i} + (|\boldsymbol{r}|\sin\varphi)\boldsymbol{j},$$

又因 $|\boldsymbol{r}| = 2R\cos\varphi$，故有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r} &= 2R\cos\varphi(\cos\varphi\boldsymbol{i} + \sin\varphi\boldsymbol{j})\\ &= (2R\cos^2\varphi)\boldsymbol{i} + (2R\cos\varphi\sin\varphi)\boldsymbol{j}\\ &= \left(2R\,\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)\boldsymbol{i} + (R\sin 2\varphi)\boldsymbol{j}\\ &= R(1+\cos 2\omega t)\boldsymbol{i} + (R\sin 2\omega t)\boldsymbol{j}.\end{aligned}$$

(2)求瞬时速度和瞬时速率．

①求瞬时速度：

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = (-2R\omega\sin 2\omega t)\boldsymbol{i} + (2R\omega\cos 2\omega t)\boldsymbol{j}.$$

②求瞬时速率：

解法一

$$v = |\boldsymbol{v}| = \sqrt{(-R\omega\sin^2\omega t)^2 + (2R\omega\cos^2\omega t)^2} = 2R\omega.$$

解法二

$$v = |\boldsymbol{v}| = \frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{R\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{R\mathrm{d}(2\varphi)}{\mathrm{d}t} = 2R\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$