高职高专公共课系列教材

工程数学

学习指导

金秀岩　曾庆武　曾庆健　蒋占峰　编著

東北大學出版社
Northeastern University Press

高职高专公共课系列教材

工程数学学习指导

金秀岩　曾庆武
曾庆健　蒋占峰　编　著

东北大学出版社
·沈　阳·

图书在版编目(CIP)数据

工程数学学习指导 / 金秀岩等编著 .— 沈阳 : 东北大学出版社,2006.3
ISBN 7-81102-243-5

Ⅰ.工… Ⅱ.金… Ⅲ.工程数学—高等学校:技术学校—教学参考资料 Ⅳ.TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 023453 号

出 版 者:东北大学出版社
地址:沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号
邮编:110004
电话:024—83687331(市场部) 83680267(社务室)
传真:024—83680180(市场部) 83680265(社务室)
E-mail:neuph @ neupress.com
http://www.neupress.com
印 刷 者:沈阳市政二公司印刷厂
发 行 者:新华书店总店北京发行所
幅面尺寸:184mm×260mm
印 张:16.5
字 数:475 千字
出版时间:2006 年 3 月第 1 版
印刷时间:2006 年 3 月第 1 次印刷
责任编辑:刘淑芳 刘宗玉 责任校对:王 林
封面设计:唐敏智 责任出版:杨华宁

定 价:25.00 元

前　言

本书是金秀岩主编的高职高专公共课系列教材《工程数学》的配套辅导教材，是理工类高职高专各专业学生学习《工程数学》必备的辅导教材。也可作为高职高专经济类各专业以及自学考试、专升本学生学习《工程数学》的辅导教材。

本书具有以下特点：

1. 每章包含四部分内容：一、基本内容归纳；二、典型例题分析；三、习题解答；四、单元测试题解答。

2. 紧密结合教材，并配合教学内容归纳概括概念、定理、法则和公式，着重分析问题和作深入浅出的说明，以帮助读者加深理解、增强记忆和正确运用。

3. 结合教材列举了针对性较强的例题，并对每章的全部习题和单元测试题进行了较详细的解答。

参加本书编写的人员及分工如下：第一篇线性代数，曾庆武；第二篇概率论，金秀岩；第三篇数理统计基础第一章、第二章，第四篇拉普拉斯变换，曾庆健；第三篇数理统计基础第三章、第四章，蒋占峰。金秀岩对全部书稿统稿并修改。

由于作者水平所限，加之时间仓促，书中不妥之处在所难免，诚望广大读者批评指正，不胜感谢。

作　者

2005年12月

目　　录

第四篇　积分变换简介

第一篇 线性代数

第一章 行列式

第一节 基本内容归纳

一、行列式定义

1. 排列

定义 1 由 n 个不同的自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的有序数组 $p_1p_2\cdots p_n$，称为由这 n 个不同的自然数所组成的 n 元排列.

定义 2 在一个 n 元排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中，如果有较大的数 p_i 排在较小的数 p_j 的前面 $(p_i>p_j)$，则称数 p_i 与 p_j 构成一个逆序. 一个 n 元排列中逆序的总数，称为这个排列的逆序数，记为 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$.

定义 3 逆序数是零或偶数的排列称为偶排列；逆序数是奇数的排列称为奇排列.

定义 4 如果把一个排列 $p_1p_2\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 的某两个数 p_i 与 p_j 互换位置，而其余数不动，就得到另一个排列 $p_1p_2\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$，这种变换称为对换，记为 (p_i,p_j).

定理 1 对换改变排列的奇偶性.

定理 2 在全部 n 元排列中，奇排列和偶排列各占一半.

2. n 阶行列式

定义 5 设有 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$，将它们排列成一个有 n 行、n 列组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式，它表示所有可能取自不同的行不同的列的 n 个元素乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和，其符号为 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

其中横排称为行，纵排称为列，称 a_{ij} 为第 i 行第 j 列的元素，左上角到右下角的连线称为主对

角线，右上角到左下角的连线称为副对角线(或次对角线).

注意：(1)定义中$(j_1j_2\cdots j_n)$表示$1,2,\cdots,n$的某一个排列，而行列式值是当$j_1j_2\cdots j_n$取遍所有$1,2,\cdots,n$的排列时，项$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$的和，因此行列式有$n!$个项；

(2)由定理2知，n阶行列式的正负项数(不考虑元素自身所带的负号)各占一半.

3.几种特殊行列式

(1) 三角形行列式

定义6 主对角线下方的元素全为零的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为上三角形行列式，反之，主对角线上方的元素全为零的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为下三角形行列式.上、下三角形行列式统称为三角形行列式.

特别地，主对角线以外的元素全为零的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为对角形行列式.

(2) 转置行列式

定义7 设n阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

把行列式D的行与相应的列互换后得到行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为行列式D的转置行列式，记作D^{T}.

(3) 对称行列式与反对称行列式

定义8 如果n阶行列式中第i行、第j列的元素等于第j行、第i列的元素，即$a_{ij}=a_{ji}$,

则称这样的行列式为对称行列式.如果它的第 i 行、第 j 列的元素等于第j 行、第 i 列的元素的相反数,即 $a_{ij}=-a_{ji}$,则称这样的行列式为反对称行列式.

二、行列式的性质

性质 1 行列式 D 与它的转置行列式D^{T} 相等.

注意:性质 1 说明行列式中行与列的地位是相同的,所以凡对行成立的性质,对列也同样成立.

性质 2 交换行列式的两行(或两列),行列式改变符号.

推论 如果一个行列式有两行(或两列)对应元素完全相等,那么这个行列式等于零.

性质 3 一个行列式的某一行(或某一列)的所有元素同乘以某一个数 k,等于以数 k 乘这个行列式.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论 1 一个行列式中某一行(或某一列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号外边.

推论 2 如果一个行列式中有某一行(或某一列)的元素全部是零,则这个行列式等于零.

推论 3 如果一个行列式中有某两行(或某两列)的对应元素成比例,则这个行列式等于零.

性质 4 如果行列式 D 的某一行的每一个元素都可以写成两项之和

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则此行列式等于下列两个行列式之和:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

注意:这个性质对于列来说也是成立的.

性质 5 如果把行列式的某一行(或列)的各元素乘以同一数后加到另一行(或列)对应的元素上去,那么行列式的值不变.

将以上性质归纳得到行列式的行变换(或列变换):

(1) 第 i 行(或列)与第 j 行(或列)互换,记作 $r_i \leftrightarrow r_j$(或 $c_i \leftrightarrow c_j$).

(2) 从第 i 行(或列)提出公因子 k,记作 $r_i \div k$(或 $c_i \div k$);或第 i 行(或列)乘以某一个数 k,记作 $r_i \times k$(或 $c_i \times k$).

(3) 以数 k 乘第 j 行(或列)的每一个元素加到第 i 行的对应元素上,记作 $r_i + kr_j$(或 $c_i + kc_j$).

三、行列式按行(列)展开

定义 1 n 阶行列式中,划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行、第 j 列,剩下的元素按原来次序组成的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij}. 令

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij},$$

称 A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式.

结论 1

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & c_{11} & \cdots & c_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & c_{k1} & \cdots & c_{kr} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}.$$

结论 2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rk} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}.$$

推论 n 阶行列式 D 中任一行(或列)中的元素与另外一行(或列)相应元素的代数余子式的乘积之和等于零. 即当 $i \neq j$ 时

$$a_{j1}A_{i1} + a_{j2}A_{i2} + \cdots + a_{jn}A_{in} = 0 \quad 或 \quad a_{1j}A_{1i} + a_{2j}A_{2i} + \cdots + a_{nj}A_{ni} = 0.$$

四、克莱姆法则

定理 1(克莱姆(Cramer)法则) n 个 n 元线性方程组,如果它的系数行列式 $D \neq 0$,那么这个方程组一定有解,并且解是唯一的. 这个解表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \cdots, \quad x_n = \frac{D_n}{D},$$

其中 $D_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 是把 D 中第 i 列的元素 $a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{ni}$ 换成常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 所得到的行列式.

注意:(1) 用克莱姆法则解 n 个 n 元线性方程的方程组时必须注意以下两个前提条件:

① 方程个数与未知量个数相等;

② 系数行列式不等于零(即 $D \neq 0$).

(2) 当且仅当满足上述两个条件时,该方程组的解存在且唯一.

推论 线性方程组无解或有两个不同的解,则它的系数行列式等于零.

定理 2 如果齐次线性方程组的系数行列式 $D\neq0$,则它只有唯一的一个零解.

定理 3 如果 n 个 n 元齐次线性方程组有非零解,则它的系数行列式 D 等于零.

第二节 典型例题分析

例 1 写出四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$的项.

分析:因为 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$,其中 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$为取自不同行不同列的 n 个数的乘积,τ 为 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数.

解 因为 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$,而 a_{11}位于第一行第一列,a_{23}位于第二行第三列.所以四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$的项为(1) $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$,其中 1 3 4 2 的逆序数为 2;(2) $-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$,其中 1 3 2 4 的逆序数为 1.

例 2 计算下列行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$

分析:①利用行列式的性质,把行列式化为上(下)三角形行列式来求解.这种方法一般将位于某一行(或某一列)首的非零元素化为 1 方便些.②也可利用行列式按行(列)展开公式求解.

解 (1) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2\leftrightarrow r_1} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3+(-10)r_1]{r_2+(-4)r_1} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & 2 & -4 \\ 0 & -15 & 2 & -20 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$

$\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_4}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -15 & 2 & -20 \\ 0 & -7 & 2 & -4 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4+7r_2]{r_3+15r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 17 & 85 \\ 0 & 0 & 9 & 45 \end{vmatrix}$

$\xlongequal[r_4\div 9]{r_3\div 17} 17\times 9\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3\text{与}r_4\text{相同}} 0.$

(2) $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第一列展开}} a \begin{vmatrix} b & 1 & 0 \\ -1 & c & 1 \\ 0 & -1 & d \end{vmatrix} + (-1)\cdot(-1)^{2+1}\times$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & c & 1 \\ 0 & -1 & d \end{vmatrix} = a(bcd+b+d)+(cd+1) = abcd+ab+ad+cd+1.$

此题还可以按第一行展开或可利用行列式性质化为上(下)三角形行列式计算.

例 3 证明:(1) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0;$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d).$

证明 (1) 左边 $= \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[c_2+(-1)\times c_1]{\substack{c_4+(-1)\times c_3 \\ c_3+(-1)\times c_2}} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2a+3 & 2a+5 \\ b^2 & 2b+1 & 2b+3 & 2b+5 \\ c^2 & 2c+1 & 2c+3 & 2c+5 \\ d^2 & 2d+1 & 2d+3 & 2d+5 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3+(-1)\times c_2]{c_4+(-1)\times c_3} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 2 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 2 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 2 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

所以,左边 = 0 = 右边.证毕.

(2) 左边 $= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} \xlongequal[r_2+(-a)\times r_1]{\substack{r_4+(-a^4)\times r_1 \\ r_3+(-a^2)\times r_1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ 0 & b^4-a^4 & c^4-a^4 & d^4-a^4 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{\text{按第一列展开}} \begin{vmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ b^4-a^4 & c^4-a^4 & d^4-a^4 \end{vmatrix} \xlongequal[c_3\div(d-a)]{\substack{c_1\div(b-a) \\ c_2\div(c-a)}} (b-a)(c-a)(d-a)\times$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+a & c+a & d+a \\ (b^2+a^2)(a+b) & (c^2+a^2)(a+c) & (d^2+a^2)(a+d) \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_2-(a+b)r_1]{r_3-(a^2+b^2)r_2}(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c-b & d-b \\ 0 & (a+c)(c^2-b^2) & (a+d)(d^2-b^2) \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第一列展开}}(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} c-b & d-b \\ (a+c)(c^2-b^2) & (a+d)(d^2-b^2) \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_2\div(d-b)]{c_1\div(c-b)}(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ (a+c)(c+b) & (a+d)(b+d) \end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)[(a+d)(b+d)-(a+c)(b+c)]$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)(a+b+c+d)$$

$$=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d),$$

所以,左边=右边.证毕.

例 4 计算下列各行列式(D_k 为 k 阶行列式).

(1) $D_n=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$;

(2) $D_{2n}=\begin{vmatrix} a_n & & & 0 & 0 & & & b_n \\ & \ddots & & & & & ⋰ & \\ 0 & & & a_1 & b_1 & & & 0 \\ 0 & & & c_1 & d_1 & & & 0 \\ & ⋰ & & & & & \ddots & \\ c_n & & & 0 & 0 & & & d_n \end{vmatrix}$.

解 (1) **解法一**:(化为三角形行列式计算)

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}\xlongequal[\substack{\vdots \\ r_n+(-1)\times r_1}]{\substack{r_2+(-1)\times r_1 \\ r_3+(-1)\times r_1}}\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a-x & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a-x & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{\vdots \\ r_n\div(x-a)}]{\substack{r_2\div(x-a) \\ r_3\div(x-a)}}(x-a)^{n-1}\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_1+c_n]{\substack{c_1+c_2\\c_1+c_3\\\vdots}}(x-a)^{n-1}\begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & \cdots & a \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=(x-a)^{n-1}[x+(n-1)a].$$

解法二:(加边法) 当 $x=a$ 时, $D_n=0$;

当 $x\neq a$ 时

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & x & a & \cdots & a \\ 0 & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}_{n+1}$$

$$\xlongequal[r_n+(-1)\times r_1]{\substack{r_2+(-1)\times r_1\\r_3+(-1)\times r_1\\\vdots}}\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ -1 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}_{n+1}$$

$$\xlongequal[c_1+\frac{1}{x-a}c_{n+1}]{\substack{c_1+\frac{1}{x-a}c_2\\c_1+\frac{1}{x-a}c_3\\\vdots}}\begin{vmatrix} 1+\dfrac{na}{x-a} & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}_{n+1}$$

$$=\left(1+\frac{na}{x-a}\right)\cdot(x-a)^n=(x-a)^{n-1}[x+(n-1)a],$$

所以, $D_n=(x-a)^{n-1}[x+(n-1)a]$.

(2) (用递推公式求解) 按第一列展开

$$D_{2n}=a_n\begin{vmatrix} a_{n-1} & & & & & b_{n-1} & 0 \\ & \ddots & & & \iddots & & \\ & & a_1 & b_1 & & & \\ & & c_1 & d_1 & & & \\ & \iddots & & & \ddots & & \\ c_{n-1} & & & & & d_{n-1} & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_n \end{vmatrix}+$$

$$
(-1)^{2n+1}c_n\begin{vmatrix} 0 & & & & & 0 & b_n \\ a_{n-1} & & & & & b_{n-1} & 0 \\ & \ddots & & & \iddots & & \vdots \\ & & a_1 & b_1 & & & 0 \\ & & c_1 & d_1 & & & 0 \\ & \iddots & & & \ddots & & \vdots \\ c_{n-1} & & & & & d_{n-1} & 0 \end{vmatrix}
$$

$$
= a_nd_n(-1)^{(2n-1)+(2n-1)}\begin{vmatrix} a_{n-1} & & & & & b_{n-1} \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_{n-1} & & & & & d_{n-1} \end{vmatrix} +
$$

$$
(-1)^{2n+1}c_nb_n(-1)^{1+(2n-1)}\begin{vmatrix} a_{n-1} & & & & & b_{n-1} \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_{n-1} & & & & & d_{n-1} \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (a_nd_n - c_nb_n)D_{2(n-1)} = (a_nd_n - c_nb_n)(a_{n-1}d_{n-1} - c_{n-1}b_{n-1})D_{2(n-2)} \\
&= (a_nd_n - b_nc_n)(a_{n-1}d_{n-1} - b_{n-1}c_{n-1})\cdots(a_2d_2 - b_2c_2)D_2 \\
&= (a_nd_n - b_nc_n)(a_{n-1}d_{n-1} - b_{n-1}c_{n-1})\cdots(a_2d_2 - b_2c_2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} \\
&= (a_nd_n - b_nc_n)(a_{n-1}d_{n-1} - b_{n-1}c_{n-1})\cdots(a_2d_2 - b_2c_2)(a_1d_1 - b_1c_1) \\
&= \prod_{i=1}^{n}(a_id_i - b_ic_i).
\end{aligned}
$$

例 5 用克莱姆法则解下列方程组.

(1) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -2, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -2, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 11x_4 = 0; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 = 1, \\ x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0, \\ x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 0, \\ x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0, \\ x_4 + 5x_5 = 1. \end{cases}$

解 (1) $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 \leftrightarrow c_3} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & -3 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & 3 & 11 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[r_4+(-2)\times r_1]{\substack{r_2+r_1\\ r_3+r_1}} -\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&3&2&5\\0&-2&3&-4\\0&-1&1&9\end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第一列展开}} -\begin{vmatrix}3&2&5\\-2&3&-4\\-1&1&9\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1\leftrightarrow r_3} \begin{vmatrix}-1&1&9\\-2&3&-4\\3&2&5\end{vmatrix} \xlongequal[r_3+3\times r_1]{r_2+(-2)\times r_1} \begin{vmatrix}-1&1&9\\0&1&-22\\0&5&32\end{vmatrix}$$

$$=(-1)\begin{vmatrix}1&-22\\5&32\end{vmatrix}=(-1)[32-5\times(-22)]=-142;$$

$$D_1=\begin{vmatrix}5&1&1&1\\-2&2&-1&4\\-2&-3&-1&-5\\0&1&2&11\end{vmatrix} \xlongequal{c_1\leftrightarrow c_3} -\begin{vmatrix}1&1&5&1\\-1&2&-2&4\\-1&-3&-2&-5\\2&1&0&11\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-2r_1]{\substack{r_2+r_1\\ r_3+r_1}} -\begin{vmatrix}1&1&5&1\\0&3&3&5\\0&-2&3&-4\\0&-1&-10&9\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}3&3&5\\-2&3&-4\\-1&-10&9\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1+r_2} -\begin{vmatrix}1&6&1\\-2&3&-4\\-1&-10&9\end{vmatrix} \xlongequal[r_3+r_1]{r_2+2r_1} -\begin{vmatrix}1&6&1\\0&15&-2\\0&-4&10\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}15&2\\-4&10\end{vmatrix}=-142;$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&5&1&1\\1&-2&-1&4\\2&-2&-1&-5\\3&0&2&11\end{vmatrix}=-284;\qquad D_3=\begin{vmatrix}1&1&5&1\\1&2&-2&4\\2&-3&-2&-5\\3&1&0&11\end{vmatrix}=-426;$$

$$D_4=\begin{vmatrix}1&1&1&5\\1&2&-1&-2\\2&-3&-1&-2\\3&1&2&0\end{vmatrix}=142.$$

于是得：

$$x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=3,\ x_4=-1.$$

$$(2)\ D=\begin{vmatrix}5&6&0&0&0\\1&5&6&0&0\\0&1&5&6&0\\0&0&1&5&6\\0&0&0&1&5\end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第一列展开}} (-1)^{1+1}\times5\times\begin{vmatrix}5&6&0&0\\1&5&6&0\\0&1&5&6\\0&0&1&5\end{vmatrix}+$$

$$(-1)^{2+1}\times1\times\begin{vmatrix}6&0&0&0\\1&5&6&0\\0&1&5&6\\0&0&1&5\end{vmatrix}=5\begin{vmatrix}5&6&0&0\\1&5&6&0\\0&1&5&6\\0&0&1&5\end{vmatrix}-(-1)^{1+1}\times6\times$$

$$\begin{vmatrix}5&6&0\\1&5&6\\0&1&5\end{vmatrix}=5\begin{vmatrix}5&6&0&0\\1&5&6&0\\0&1&5&6\\0&0&1&5\end{vmatrix}-6\begin{vmatrix}5&6&0\\1&5&6\\0&1&5\end{vmatrix}$$

$$=5\left[5\begin{vmatrix}5&6&0\\1&5&6\\0&1&5\end{vmatrix}-6\begin{vmatrix}5&6\\1&5\end{vmatrix}\right]-6\begin{vmatrix}5&6&0\\1&5&6\\0&1&5\end{vmatrix}$$

$$=5\times(5\times65-6\times19)-6\times65=665.$$

类似地，$D_1=\begin{vmatrix}1&6&0&0&0\\0&5&6&0&0\\0&1&5&6&0\\0&0&1&5&6\\1&0&0&1&5\end{vmatrix}=1507$； $D_2=\begin{vmatrix}5&1&0&0&0\\1&0&6&0&0\\0&0&5&6&0\\0&0&1&5&6\\0&1&0&1&5\end{vmatrix}=-1145$；

$D_3=\begin{vmatrix}5&6&1&0&0\\1&5&0&0&0\\0&1&0&6&0\\0&0&0&5&6\\0&0&1&1&5\end{vmatrix}=703$； $D_4=\begin{vmatrix}5&6&0&1&0\\1&5&6&0&0\\0&1&5&0&0\\0&0&1&0&6\\0&0&0&1&5\end{vmatrix}=-395$；

$D_5=\begin{vmatrix}5&6&0&0&1\\1&5&6&0&0\\0&1&5&6&0\\0&0&1&5&0\\0&0&0&1&1\end{vmatrix}=212.$

于是得：

$$x_1=\frac{1507}{665},\quad x_2=-\frac{1145}{665},\quad x_3=\frac{703}{665},\quad x_4=-\frac{395}{665},\quad x_5=\frac{212}{665}.$$

例 6 问 λ 取何值时，齐次方程组

$$\begin{cases}(1-\lambda)x_1-2x_2+4x_3=0\\2x_1+(3-\lambda)x_2+x_3=0\\x_1+x_2+(1-\lambda)x_3=0\end{cases}$$

有非零解？

解 系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&4\\2&3-\lambda&1\\1&1&1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(3-\lambda)(1-\lambda)^2-2+8-[4(3-\lambda)+(1-\lambda)-4(1-\lambda)]$$

$$=-\lambda(\lambda-3)(\lambda-2).$$

当 $\lambda_1=0,\lambda_2=2,\lambda_3=3$ 时，$D=0$，该齐次方程组有非零解.