中学数学教学导论

数与函数

刘玉琏　苑德新　编著

人民教育出版社

中学数学教学导论

数与函数

刘玉琏 苑德新 编著

人民教育出版社

（京）新登字113号

中学数学教学导论
数与函数
编　著　刘玉琏　苑德新
责任编辑：于　琛
*
人民教育出版社出版发行
新华书店总店科技发行所经销
北京东光印刷厂印装
*
开本 850×1168 1/32　印张 13.625　字数 329,000
1992 年 1 月第 1 版　1992 年 7 月第 1 次印刷
印数　1—2,500
ISBN 7-107-10866-2
G·2466　定价 5.50 元

前　言

当前多数中学数学教师已达到或接近“专业合格证书”的水平，他们希望用已学到的某些高等数学的知识去指导自己讲授的中学数学教材(以下简称“教材”)，从而进一步提高专业素质和教学质量. 教育行政部门也积极准备开展中学教师的在职继续教育. 为了适应这个新形势的需要，我们编写了这套《中学数学教学导论》丛书. 这套丛书共有四册：《代数 I》侧重于经典代数，《代数 II》侧重于概率统计，《几何》侧重于古典几何，《数与函数》侧重于实数集合与函数有关的内容. 这四册书所涉及的内容基本上覆盖了“教材”的内容.

这套丛书是中国电视师范学院播放的“中学数学教学导论”课录像带的文字教材. 它同时可作为各类高师院校举办的中学数学教师培训班、进修班等教学用书，也可作为广大中学数学教师自学教材或教学参考书.

我们遵循学用结合和学以致用的编写原则，用某些高等数学的内容、思想和方法指导“教材”，帮助中学数学教师，特别是广大的初中数学教师，以较高观点认识“教材”和把握“教材”，从而提高教学能力和教学质量，为基础教育服务.

我们编写的这套丛书是以师专数学专业几门重要基础课为起点，同时也考虑到当前广大初中数学教师的专业现状. 为了帮助他们克服学习这套丛书的困难，不仅在文字叙述上力求通俗易懂，使

其具有可读性,而且还简要地引录了某些基础课的内容,使其便于自学. 每章或每节力求从“教材”提出问题, 然后用高等数学的内容、思想和方法作细致的分析和探讨,从而使得知识范围扩大了,或理论严谨了,或孤立的内容联系了起来,甚至司空见惯的内容有了新意等. 由于从“教材”提出的问题升华了, 自然就能达到较为深刻理解“教材”的目的

数学教育有不同的层次. 我们认为培养具有现代数学思想,并能用现代数学思想指导“教材”和教学的中学数学教师, 是高师院校数学专业教改的一个重要课题. 尽管这套丛书距用现代数学思想指导“教材”还有很大距离,但是我们愿意在这套丛书的基础上,进一步探索这个重要课题, 与从事高师数学教育的同志们共勉.

这套丛书引用的“教材”是人民教育出版社出版的初级中学课本《代数》第一～四册,《几何》第一～二册及高级中学课本(甲种本)《代数》第一～三册, 《立体几何》、《平面解析几何》与《微积分初步》.

人民教育出版社、中国电视师范学院和东北师大电教中心为组织出版这套丛书给予巨大支持. 每册书的责任编辑给予很多具体指导和帮助, 审定加工又付出了辛勤劳动. 在此对上述三个单位和各位责任编辑一并表示深切感谢.

我们编写这套丛书尚属探索,各册的编写风格也不尽相同,缺点,甚至错误在所难免,恳请读者不吝赐教.

作　者

于长春东北师大数学系

1991.5.

目　　录

第一章　实数

第二章　函数

第三章　连续函数与可微函数

第四章　可积函数与和函数

第五章　基本初等函数

第六章　初等函数

第七章　几何体的度量

第八章　重要的常数

第一章　实　数

数是人们最熟悉的一个数学对象. 人们经常所遇到的数绝大多数都是有理数，偶尔也会遇到个别的非有理数(即无理数，如 π，e 等)，这时也是用有理数近似地代替它. 因为有理数的四则运算的结果还是有理数，即有理数集对四则运算是封闭的. 从四则运算来说，有理数集已经是一个完美的数集了. 一般来说，在日常的生活和生产中，只要掌握有理数及其四则运算法则也就够用了. 这样似乎不需要在有理数集的基础上扩充数集了. 事实并非如此. 精确计算线段的长度和讨论方程根的存在性等许多问题，仅有有理数就不够用了. 例如，计算边长为 1 的正方形对角线(线段)的长度. 设其对角线的长度是 x，根据勾股定理，有

$$x^2=1^2+1^2 \quad 或 \quad x^2=2,$$

即对角线的长度 x 是这样的数，它的平方等于 2，或 $x=\sqrt{2}$ (x 是 2 的算术平方根). 那么这个对角线的长度 $\sqrt{2}$ 是一个什么样的数呢？不难证明：

$\sqrt{2}$ 不是有理数.

证明　用反证法　假设 $\sqrt{2}$ 是有理数，设 $\sqrt{2}=\dfrac{p}{q}$，其中 q,p 都是正整数，且 p 与 q 互质(这总是可能的). 根据已知有理数的运算性质，等号两端自乘，有

$$2=\frac{p^2}{q^2} \quad 或 \quad 2q^2=p^2.$$

因为 $2q^2$ 是偶数，所以等号右端 p^2 也必是偶数，从而 p 必是偶数（否则，若 p 是奇数，则 p^2 也必是奇数. 矛盾）. 设 $p=2r$，其中 r 是正整数，设 $p=2r$ 代入 $2q^2=p^2$ 之中，有

$$2q^2=(2r)^2 \quad \text{或} \quad q^2=2r^2.$$

应用上述同样方法可证，q 必是偶数，设 $q=2s$，其中 s 是正整数. 显然，$p=2r$ 与 $q=2s$ 有公因数 2，这与 p,q 互质矛盾. 于是，$\sqrt{2}$ 不是有理数.

这个例子说明，如果仅有有理数不得不承认边长为 1 的正方形的对角线没有长度. 显然，这是不可思议的. 因为任何的度量几何都不能建立在边长为 1 的正方形的对角线（线段）没有长的基础上. 这表明，在理论上仅有有理数是不够用的，必须在有理数集的基础上构造一个新的更大的数集. 大家都知道，这个数集就是实数集. 在实数集中，边长为 1 的正方形的对角线有了长度，长度是 $\sqrt{2}$；简单的二次方程 $x^2=2$ 也有了根，根是 $\pm\sqrt{2}$.

中学《代数》的全部内容就是建立在数和数的运算基础上，它所涉及的数主要是实数. 例如，计算解析式的值，求方程的根或求联立方程的解，解不等式，以及基本初等函数的定义域和值域，等等，主要是在实数集中讨论的. 为了进一步讨论方程根的存在性，高中《代数》又将实数集扩充到复数集. 大家知道，复数集是在实数集的基础上扩充的. 因此实数集就成为中学《代数》的一切运算的基础.

实数理论就其数学的思想方法来说，它是属于高等数学范畴. 因为中学生的数学知识尚少，又受年龄的限制，所以在中学《代数》中不可能也不必要用很多时间严格讲述实数理论. 在那里也只能形式地给出无理数和实数集的定义. 关于实数的四则运算只能要求中学生承认："在进行实数运算时，有理数的运算律和运算性质同样适用."（初中《代数》第三册，第23 页）关于实数集的有序性和

连续性根本没有涉及，认为是自明的．当然，在实数的四则运算中，仅仅承认实数的运算满足有理数的运算律和运算性质，在理论上并没有全部解决实数的四则运算问题．例如，两个无理数$\sqrt{2}$与π（π是无理数，后面将给出证明）的和，即$\sqrt{2}+\pi$，这两个无理数是怎样相加的呢？其和又是一个什么样的数呢？中学《代数》回答不了这个问题．在那里只能根据计算精度的要求，对$\sqrt{2}+\pi$作有限小数（即有理数）的近似计算．从严谨的理论来说，这是不行的．因为和数$\sqrt{2}+\pi$的存在性和唯一性都没有解决，对它作近似计算就失去了理论根据．类似地两个无理数的相减、相乘、相除也都有同样的问题．在中学《代数》中，我们已经看到，基本初等函数的图象在平面直角坐标系中都是一条“连续”曲线，那么为什么它们的图象都是连续曲线呢？中学《代数》说不清楚这个问题．因为它涉及到基本初等函数的连续性，它的理论基础就是实数集的连续性．另外，我们在中学《代数》中还看到，在实数集上讨论了函数的单调性，解不等式或证明不等式等，它们的理论基础都是实数集的有序性．因为实数集是有序的，所以才能比较两个实数的大小，因为实数集是有序的，所以才有函数的单调性，等等．从上述简要分析不难看到，中学《代数》与实数理论有着密切联系．尽管实数理论不能讲授给中学生，但它对于深刻理解，全面掌握，灵活处理中学数学教材，是不可缺少的数学基础知识．

实数理论不仅是中学数学的基础，它也是高等数学的基础．我们知道，极限运算是数学分析区别于代数的最显著的特征．极限论的核心是极限存在问题．有理数集对极限运算不是封闭的，即单调有界的有理数列不一定存在极限．从极限运算来说，这是有理数集的缺陷．实数集除具有有理数集的所有性质外，又多了一个重要性质——连续性（或完备性）．这个连续性保证了实数集对极限运算是封闭的，这是实数集的优点．因此，实数集就成为数学

分析的立论基础.

实数理论的内容丰富,自成体系,理论性很强,这里暂时脱离中学数学教材,进入纯理论的推证.虽然初学者可能会感到冗长乏味,但是它将奠定中学数学的数系的逻辑基础.

因为无理数能够在有理数集的基础上应用不同的方法构造出来,所以实数理论也叫做实数的构造理论.19世纪下半叶,康托尔❶应用基本列法,戴德金❷应用分划法,维尔斯特拉斯❸应用单调有界列法,几乎同时成功地构造了无理数,从而也就构造了实数集,这样就有不同的实数的构造理论.以后的发展,又有无限小数法和闭区间套法等实数的构造理论.虽然构造无理数可以使用不同的方法,但是能够证明,使用不同的方法所构造的这些实数集是等价的,用现代数学语言来说,它们是保序同构的(即它们的代数结构是完全相同的),可谓殊途同归.初中《代数》第三册,应用无限不循环小数定义了无理数.为了结合中学数学教材,本章将应用无限小数的方法构造实数集,进而讨论实数的四则运算和实数集的性质.

有理数集是我们构造实数集的基础.将要构造的实数集与已知的有理数集应具有以下关系:1.扩充性.有理数集不仅是实数集的子集,而且应是实数集的真子集,即实数集不仅包含有理数集而且还包含非有理数集(即无理数集);2.继承性.在实数集上定义的序和四则运算,当论及的实数是有理数时,它与已知的有理数集的序和四则运算的结果应是一致的,即实数集的序和四则运算确实是有理数集的序和四则运算的推广.3.连续性.实数集比有理数集多了一个重要性质,这就是连续性.

---

❶ 康托尔(Cantor, G, 1845～1918)德国数学家.

❷ 戴德金(Dedekind, J. W. R. 1831～1916)德国数学家.

❸ 维尔斯特拉斯(Weierstrass, K. 1815～1897)德国数学家.

无理数是在有理数集的基础上构造出来的，为此严格定义无理数就必须严格定义有理数．而有理数又是在自然数集的基础构造出来的，这样就追溯到必须严格定义自然数．关于自然数集本套书的《代数Ⅰ》已有详述，本书从略．我们将首先复习有理数集的性质，然后再讨论实数理论．

一、有理数集

1.1 有理数集的性质

为了书写简便，用字母N表示自然数集；Z表示整数集；Q表示有理数集．

有理数集 $Q=\left\{\frac{m}{n}\middle| n\in N, m\in Z\right\}$．

有理数的分数表示法并不是唯一的．例如，

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\cdots=\frac{n}{2n}=\cdots,$$

因为集合的元素具有互异性，所以有理数集Q的子集$\left\{\frac{n}{2n}\middle| n\in N\right\}$的每个数是有理数集$Q$中的同一个数．我们取分母与分子互质的那个有理数，即$\frac{1}{2}$，代表这一类有理数．一般情况，取n与m互质（表为$(n,m)=1$）的那个有理数$\frac{m}{n}$代表与$\frac{m}{n}$相等的那一类有理数．因此，有

$$Q=\left\{\frac{m}{n}\middle| n\in N,\ m\in Z\right\}=\left\{\frac{m}{n}\middle| n\in N, m\in Z, (n,m)=1\right\}.$$

在中学《代数》中，我们已经熟悉了有理数集的性质．为了验证构造的实数集也具有有理数集的性质，应选出有理数集的最少、

又是最基本的几个性质，即有理数集的其余的性质都是这几个最基本性质的形式逻辑的结果．这样以后的验证仅限于有理数集的这几个最基本的性质就可以了．

有理数集 Q 的最基本性质有以下四组：

Ⅰ. **加法**

$\forall a,b\in Q$❶对应 Q 中唯一一个数，称为 a 与 b 的和，表为 $a+b$，具有下列性质：

I_1，$a+b=b+a$.　　　　（加法交换律）

I_2，$(a+b)+c=a+(b+c)$.　　　　（加法结合律）

I_3，Q 中存在唯一数 0，$\forall a\in Q$，有

$$a+0=a.$$

I_4，$\forall a\in Q$ 存在唯一相反数 $(-a)\in Q$，有

$$a+(-a)=0.$$

根据加法的这些性质，存在加法的逆运算——减法．定义，满足等式

$$c+b=a$$

的数 c 称为 a 与 b 的差．不难证明，数 c 的存在性与唯一性．

事实上，

设　$c=a+(-b)$，有

$$\begin{aligned} c+b&=[a+(-b)]+b \\ &=a+[(-b)+b] &&（根据 \mathrm{I}_2） \\ &=a+[b+(-b)] &&（根据 \mathrm{I}_1） \\ &=a+0 &&（根据 \mathrm{I}_4） \\ &=a. &&（根据 \mathrm{I}_3） \end{aligned}$$

证明了 a 与 b 的差 $c=a+(-b)$ 的存在性．

❶ 符号“$\forall$”是数理逻辑的量词符号，表示“对任意的”或“任一的”．

假设除 $c=a+(-b)$ 是 a 与 b 的差外，c' 也是 a 与 b 的差，即 $c'+b=a$. 在此等式的等号两端各加 $(-b)$，有

$$(c'+b)+(-b)=a+(-b).$$

上式的等号左端

$$\begin{aligned}(c'+b)+(-b)&=c'+[b+(-b)] &&(\text{根据 I}_2)\\ &=c'+0 &&(\text{根据 I}_4)\\ &=c'. &&(\text{根据 I}_3)\end{aligned}$$

于是，$c'=a+(-b)=c$. 证明了 a 与 b 的差的唯一性. □[1]

a 与 b 的差表为 $b-a$.

II. **乘法**

$\forall a,b\in Q$ 对应 Q 中唯一一个数，称为 a 与 b 的积，表为 $a\cdot b\in Q$. 具有下列性质：

II_1，$a\cdot b=b\cdot a$. (乘法交换律)

II_2，$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$. (乘法结合律)

II_3，Q 中存在唯一数 1，$\forall a\in Q$，有

$$a\cdot 1=a.$$

II_4，$\forall a\in Q$，且 $a\neq 0$，存在唯一倒数 $\frac{1}{a}\in Q\left(\frac{1}{a}\text{也可写为}a^{-1}\right)$，有

$$a\cdot a^{-1}=1.$$

II_5，$\forall a,b,c\in Q$，有

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c. \qquad (\text{加乘分配律})$$

根据乘法的这些性质，存在乘法的逆运算——除法. 定义，满足等式

$$c\cdot b=a$$

的数 c 称为 a 与 b 的商，其中 $b\neq 0$. 不难证明，数 c 的存在性和唯一性. 事实上，

---

[1] 符号“□”表示证明完了.

设 $c=a\cdot b^{-1}$,有

$$
\begin{aligned}
c\cdot b&=(a\cdot b^{-1})\cdot b\\
&=a\cdot(b^{-1}\cdot b) &&(\text{根据 } \mathrm{II}_2)\\
&=a\cdot(b\cdot b^{-1}) &&(\text{根据 } \mathrm{II}_1)\\
&=a\cdot 1 &&(\text{根据 } \mathrm{II}_4)\\
&=a. &&(\text{根据 } \mathrm{II}_3)
\end{aligned}
$$

证明了 a 与 b 的商 $c=a\cdot b^{-1}$ 的存在性.

假设除 $c=a\cdot b^{-1}$ 是 a 与 b 的商外, c'也是 a 与 b 的商, 即 $c'\cdot b=a$. 在此等式的等号两端各乘以 b^{-1},有

$$(c'\cdot b)\cdot b^{-1}=a\cdot b^{-1}.$$

上式的等号左端

$$
\begin{aligned}
(c'\cdot b)\cdot b^{-1}&=c'\cdot(b\cdot b^{-1}) &&(\text{根据 } \mathrm{II}_2)\\
&=c'\cdot 1 &&(\text{根据 } \mathrm{II}_4)\\
&=c'. &&(\text{根据 } \mathrm{II}_3)
\end{aligned}
$$

于是,$c'=a\cdot b^{-1}=c$. 证明了 a 与 b 的商的唯一性. □

a 与 b 的商表为 $\frac{a}{b}$.

III. **有序**

$\forall a,b,c\in Q$,有下性质:

III_1, a 与 b 有且仅有下列关系之一成立:

$$a<b,\ a=b,\ a>b. \qquad (\text{三歧性})$$

III_2, 若 $a<b$, $b<c$,则 $a<c$. (传递性)

III_3, 若 $a<b$, $\forall c\in Q$,则 $a+c<b+c$. (加法保序性)

III_4, 若 $a<b$,且 $c>0$,则 $a\cdot c<b\cdot c$. (乘法保序性)

IV. **阿基米德性**

$$\forall c>0,\ \exists n\in N❶,\text{有 } n>c.$$

❶ "∃"是数理逻辑另一个量词符号,表示"存在" 或"能找到".

根据以上有理数集的四组最基本性质能够证明有理数集的其余性质:

a 与 $-a$ 互为相反数.

事实上,根据 I_4,有

$$a+(-a)=0,$$

或 $$(-a)+a=0. \qquad (根据\ \mathrm{I}_1)$$

根据减法,$a=-(-a)$,即 a 与 $-a$ 互为相反数. □

$$-(a+b)=(-a)+(-b).$$

事实上,有

$$\begin{aligned} & a+b+[(-a)+(-b)] \\ &= a+[b+(-a)]+(-b) && (根据\ \mathrm{I}_2) \\ &= a+[(-a)+b]+(-b) && (根据\ \mathrm{I}_1) \\ &= [a+(-a)]+[b+(-b)] && (根据\ \mathrm{I}_2) \\ &= 0+0=0. && (根据\ \mathrm{I}_3) \end{aligned}$$

根据减法,即

$$-(a+b)=(-a)+(-b). \quad □$$

根据 III_3,易证 $a>b \Longleftrightarrow a-b>0$❶.

$$a>b \Longleftrightarrow -a<-b.$$

事实上,已知 $a>b \Longleftrightarrow a-b>0$,又

$$\begin{aligned} a-b &= a+(-b)=(-b)+a \\ &= (-b)+[-(-a)]=(-b)-(-a), \end{aligned}$$

即 $a>b \Longleftrightarrow (-b)-(-a)>0$,或

$$a>b \Longleftrightarrow -a<-b. \quad □$$

特别是,当 $b=0$ 时,有 $a>0 \Longleftrightarrow -a<0$.

若 $a\neq 0$, 则两个互为相反数的 a 与 $-a$ 必有一个, 且仅有一个,大于 0. 这个大于 0 的数称为 a 或 $-a$ 的**绝对值**,表为

❶ 符号"$\Longleftrightarrow$"表示等价,即"必要充分条件"或"当且仅当".

$$|a|=|-a|.$$

约定 $$|0|=0.$$

若 $a>b$ 和 $c>d$, 则 $a+c>b+d$.

事实上, 根据 III_3, 有

$$a+c>b+c \quad 与 \quad c+b>d+b.$$

再根据 I_1, 有

$$a+c>b+c=c+b>d+b=b+d,$$

即 $$a+c>b+d. \quad \square$$

$$a\cdot(b-c)=a\cdot b-a\cdot c. \qquad \text{(差乘分配性)}$$

事实上, 有

$$\begin{aligned} a\cdot(b-c)+a\cdot c &= a\cdot[(b-c)+c] && (\text{根据 } \mathrm{II}_5) \\ &= a\cdot\{b+[(-c)+c]\} && (\text{根据 } \mathrm{I}_2) \\ &= a\cdot(b+0) && (\text{根据 } \mathrm{I}_4) \\ &= a\cdot b, && (\text{根据 } \mathrm{I}_3) \end{aligned}$$

即 $$a\cdot(b-c)=a\cdot b-a\cdot c. \quad \square$$

不难建立, 有理数的乘法符号法则. 根据 III_4, 若 $a>0, b>0$, 则 $a\cdot b>0$.

$$(-a)\cdot b=-(a\cdot b).$$

事实上, 有

$$a\cdot b+(-a)\cdot b=[a+(-a)]\cdot b=0\cdot b=0,$$

即 $$(-a)\cdot b=-(a\cdot b). \quad \square$$

若 $a<0, b>0$, 则 $a\cdot b<0$.

事实上, $a<0$, 即 $a=-|a|$; $b>0$, 即 $b=|b|$, 有

$$a\cdot b=(-|a|)\cdot|b|=-(|a|\cdot|b|)<0. \quad \square$$

同法可证. 若 $a>0, b<0$, 则 $a\cdot b<0$.

若 $a<0, b<0$, 则 $a\cdot b>0$.

事实上, $a<0$, 即 $a=-|a|$; $b<0$, 即 $b=-|b|$, 有