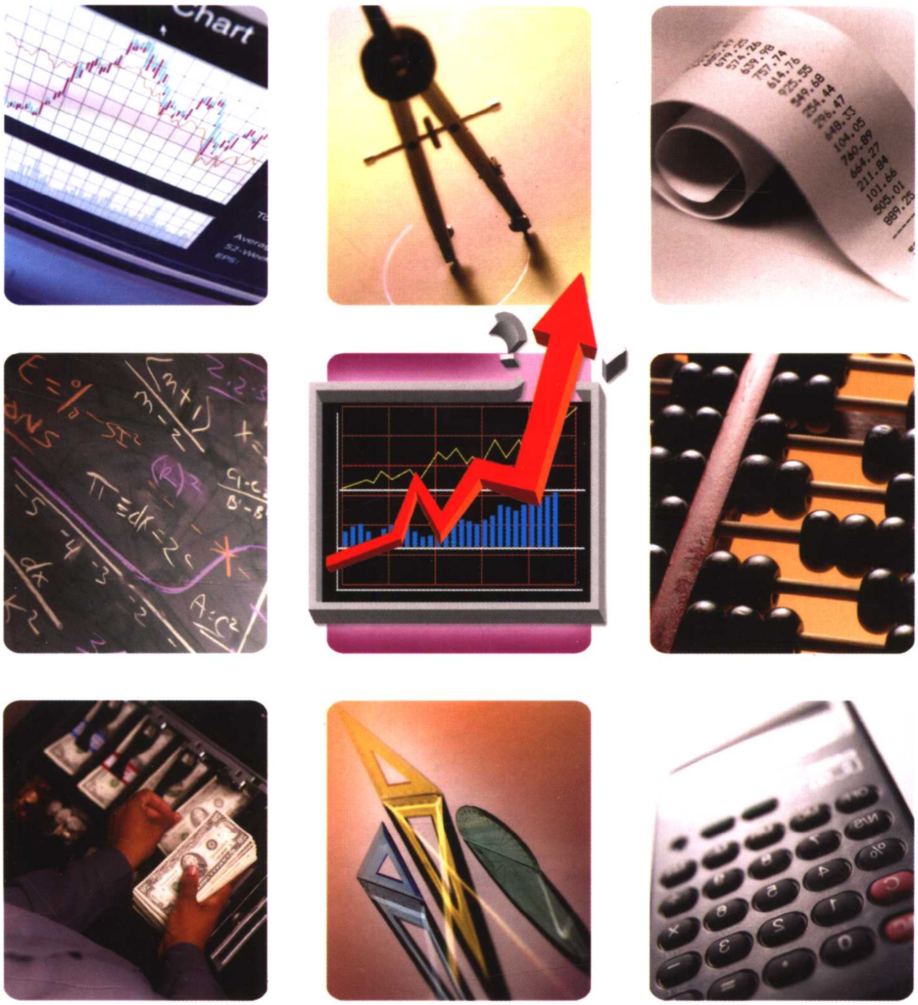
新课程教学资源丛书

生活·社会·数学

SHENGHUO SHEHUI SHUXUE

喻平 秦向荣 主编



南京师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

生活·社会·数学／喻平，秦向荣主编．—南京：南京师范大学出版社，2006.5
（新课程教学资源丛书）
ISBN 7-81101-359-2/G·969

Ⅰ．生…　Ⅱ．秦…　Ⅲ．数学课—高中—教学参考资料
Ⅳ．G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 045101 号

书　　名	生活·社会·数学:新课程教学资源丛书
主　　编	喻平　秦向荣
责任编辑	王书贞
出版发行	南京师范大学出版社
地　　址	江苏省南京市宁海路 122 号(邮编:210097)
电　　话	(025)83598077(传真)　83598412(营销部)　83598297(邮购部)
网　　址	http://press.njnu.edu.cn
E — mail	nspzbb@njnu.edu.cn
照　　排	江苏兰斯印务发展有限公司
印　　刷	南京京新印刷厂
开　　本	787×960　1/16
印　　张	10.5
字　　数	200 千
版　　次	2006 年 6 月第 1 版　2006 年 6 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 7-81101-359-2/G·969
定　　价	13.80 元

出 版 人　闻玉银

前　言

《高中数学新课程标准》提倡要体现数学的文化价值和数学对推动社会发展所起的作用，必须把数学探究、数学建模的思想以不同形式渗透到教材中，例如，在选修系列 3 和系列 4 中开设了《数学史选讲》、《风险与决策》等专题，旨在使学生在追寻数学历史发展的过程中洞悉数学知识的形成和发展趋势，了解其来龙去脉。新教材中研究性课题的设置也是基于上述理念，使学生在经历探究的过程中体会数学的“美”，感受数学的“奇”，增强学习数学学习的乐趣和动力。《生活·社会·数学》一书以大量高中生熟悉的生活和社会中鲜活的实例为背景，通过“生活的数学”、“理财的数学”、“社会的数学”、“游戏的数学”、“古典的数学”、“揭密的数学”、“万能的数学”等丰富有用、有趣的内容，引导学生从数学的视角放眼社会与生活，体会“数学是思维的体操”，感悟数学源于生活、服务生活、促进生活的魅力，理解数学在培养理性思维、促进智力发展中不可替代的作用，从而促进学生爱数学、学数学、用数学。

本书作为江苏省重点课题“CPFS 结构对高中生数学思维的影响的实验研究”成果，既充分发掘高中数学教材的内涵，遵循数学思维规律，深入浅出，又广泛触及高中数学的各个领域，以“问题”方式呈现，引人入胜。大量丰富有趣的问题背景特别有助于改善高中数学课堂的气氛，激发学生的探究精神和学习兴趣。为把研究性学习方式引入数学学科教学提供了载体，为数学教师顺利实施应用题教学提供帮助。因此本书是一本不可多得的高中数学教师多角度理解数学背景的宝贵资料，也是一本值得推荐的研究性课程的辅助读物，更是一本源于实践的数学校本教材。

本书由喻平教授和秦向荣老师主编。全书由黄法祥、秦向荣负责统稿。共分为七章，参与编写的老师有王臻、周晓宇、殷志芳、周猛进、唐毅、高莹、马斌、黄云龙、王瑞祥、王文元、颜虹、葛新成。

此外，在本书的编写过程中，参阅了国内外大量文献资料以及一些网站文章，限于篇幅不能一一列出，特此说明和致谢。

限于编者水平，不妥之处在所难免，敬请指正。

黄法祥

2006 年 2 月

目 录

第一章

生活的数学

1 电脑算命 抽屉原理小应用

〔背景资料〕

现代社会有些人将封建迷信与高科技联系起来，形成了所谓的“电脑算命”，看上去似乎很有道理，其实迷惑了不少人.

“电脑算命”看起来挺玄乎，只要你输入自己出生的年、月、日和性别，一按按键，屏幕上就会出现所谓性格、命运的句子，甚至还有打分，据说这就是你的“命”.

其实这充其量不过是一种电脑游戏而已. 那么我们如何用数学上的原理来说明它的荒谬呢?

〔问题解决〕

我们可以用抽屉原理来解决这个问题，抽屉原理又称“鸽笼原理”或“狄利克雷原理”，它是数学中证明存在性的一种特殊方法. 举个最简单的例子，把 3 个苹果按任意的方式放入两个抽屉中，那么一定有一个抽屉里放有两个或两个以上的苹果. 这是因为如果每一个抽屉里最多放有一个苹果，那么两个抽屉里最多只放有两个苹果. 运用同样的推理可以得到：

原理 1：把多于 n 个的物体放到 n 个抽屉里，则至少有一个抽屉里有 2 个或 2 个以上的物体.

原理 2：把多于 mn 个的物体放到 n 个抽屉里，则至少有一个抽屉里有 $(m+1)$ 个或多于 $(m+1)$ 个的物体.

如果以 70 年计算，按出生的年、月、日、性别的不同组合数应为 $70\times365\times2=51\ 100$，我们把它作为“抽屉”数. 依现有人口 13 亿来算，我们把它作为“物体”数. 由于 $1.3\times10^9=25\ 440\times51\ 100+16\ 000$，根据原理 2，存在 25 440 个以上的人，尽管他们的出身、经历、天资、机遇各不相同，但他们却具有完全相同的“命”，这真是荒谬绝伦！在这里，若一年按 360 日计算，一日又分为十二个时辰，

得到的抽屉数仅为 $60\times360\times12=259\ 200$. 把相同数量的词条输入电脑，轻轻按键，你的命运就算出来了.

〔拓展延伸〕

在我国古代，早就有人懂得用抽屉原理来揭露生辰八字之谬. 如清代陈其元在《庸闲斋笔记》中就写道："余最不信星命推步之说，以为一时（注：指一个时辰，合两小时）生一人，一日生十二人，以岁计之则有四千三百二十人，以一甲子（注：指六十年）计之，止有二十五万九千二百人而已，今只以一大郡计，其户口之数已不下数十万人（如咸丰十年杭州府一城八十万人），则举天下之大，自王公大人以至小民，何啻亿万万人，则生时同者必不少矣. 其间王公大人始生之时，必有庶民同时而生者，又何贵贱贫富之不同也？"

所谓"电脑算命"不过是把人为编好的算命语句像中药柜那样事先分别一一存放在各自的柜子里，谁要算命，即根据出生的年月、日、性别的不同的组合按不同的编码机械地到电脑的各个"柜子"里取出所谓命运的句子. 这种在古代迷信的亡灵上罩上现代科学光环的勾当，是对科学的亵渎.

〔自主探究〕

正方体各面涂上红色或蓝色的油漆（每面只涂一种色），证明正方体一定有三个面颜色相同.

2　街头骗术　千万别去猜姓氏

〔背景资料〕

小时侯，在街边看到一位算命先生，自称不用你说就能猜出你的姓氏. 算命先生会给你几张印有百家姓的表格，当你指出在哪几张里有你的姓氏后，算命先生便可脱口而出你的姓氏，屡试不爽，甚为惊人.

今天看来，这不过是一个骗人的数学游戏. 你知道其中的蹊跷吗？

〔问题解决〕

我们先来看数字填充的表格 1-6. 然后，在心里想一个 1～63 的数字，例如 23，在 6 张表中的表 1，表 2，表 3，表 5 中均可找到 23 这个数字，把表 1，表 2，表 3，表 5 的第一个数字加起来得 $1+2+3+16=23$，即是我们一开始所想的数字. 其实只要把含有心中所想的数字的表格的第一个数字相加就得到你所想的数. 算命者只需要把这些数字对应成姓氏，便可得本文一开始的骗术了.

表 1

1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31
33	35	37	39
41	43	45	47
49	51	53	55
57	59	61	63

表 2

2	3	6	7
10	11	14	15
18	19	22	23
26	27	30	31
34	35	38	39
42	43	46	47
50	51	54	55
58	59	62	63

表 3

4	5	6	7
12	13	14	15
20	21	22	23
28	29	30	31
36	37	38	39
44	45	46	47
52	53	54	55
60	61	62	63

表 4

8	9	10	11
12	13	14	15
24	25	26	27
28	29	30	31
40	41	42	43
44	45	46	47
56	57	58	59
60	61	62	63

表 5

16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31
48	49	50	51
52	53	54	55
56	57	58	59
60	61	62	63

表 6

32	33	34	35
36	37	38	39
40	41	42	43
44	45	46	47
48	49	50	51
52	53	54	55
56	57	58	59
60	61	62	63

为什么这 6 张表格会如此神奇，所有具有这个数的表格的第一个数字相加就等于这个数字？其实，仔细观察这 6 张表格，里面的数字是有规律的. 如果用二进制来表示，就一目了然了.

把 0～63 共 64 个数字用二进制表示就是$(000000)_2$～$(111111)_2$，则有：

表 1 中所有的数字都是$(\square\square\square\square\square 1)_2$形式的（$\square$代表该数位可以为 0 或 1）；

表 2 中所有的数字都是$(\square\square\square\square 1\square)_2$形式的；

表 3 中所有的数字都是$(\square\square\square 1\square\square)_2$形式的；

表 4 中所有的数字都是$(\square\square 1\square\square\square)_2$形式的；

表 5 中所有的数字都是$(\square 1\square\square\square\square)_2$形式的；

表 6 中所有的数字都是$(1\square\square\square\square\square)_2$形式的.

在二进制下，第 n 张表格里有这个数字，说明这个数的第 n 位上的数字为 1，否则该数位上的数为 0. 如此要计算出该数就只是简单的加法问题了.

〔拓展延伸〕

如果把二进制数的数位增加到7位，那么我们所猜数字的范围就可以扩为$0\sim2^7-1$，那么就必须把以上6张表格扩容，同时增加第7张表格使得该表格的数字都是$(1\square\square\square\square\square\square)_2$形式的．不难想像，我们可以做出任意范围内的猜数字表格，从而理论上我们可以猜出任何一个你心里想的数字．

〔自主探究〕

证明：用15块大小是4×1的矩形瓷砖和1块大小是2×2的矩形瓷砖，不能恰好铺盖8×8矩形的地面．

3 福利募捐 "六合彩"是好方案

〔背景资料〕

很多国家和地方都有六合彩活动，它是一种非常有效的福利募捐形式，而且号称头奖可得百万、甚至上亿美金．悉尼六合彩便是一种影响很广泛的社会活动，参加者每次在1～44共44个数字中选取6个不同的数，另再选取2个所谓的特别数．开奖时开出6个数字及两个特别数，当参加者所选6个数与开出的数完全一致为一等奖；所选6个数中有5个数与开出的数一致，另有一个选取的特别数与开出的特别数一致为二等奖；所选6个数中有5个数与开出的数一致为三等奖；……

那么参加者获得一、二、三等奖的可能性各为多少？

〔问题解决〕

得到一等奖的可能性为$\frac{1}{C_{44}^{6}}=\frac{1}{7\,059\,052}$.

得到二等奖的可能性为$\frac{C_{6}^{5}\cdot C_{38}^{1}}{C_{44}^{6}}\cdot\frac{C_{2}^{1}\cdot C_{36}^{1}}{C_{38}^{2}}\approx\frac{1}{604\,595}$.

得到三等奖的可能性为$\frac{C_{6}^{5}\cdot C_{38}^{1}}{C_{44}^{6}}\approx\frac{1}{30\,961}$.

由题解可知，得一等奖的机会约为七百万分之一，而悉尼人口仅四百多万，即使每人买一份彩券，且所选数字都不一样，也不一定会有人得一等奖，所以开奖之后一等奖往往空缺，而把奖金放入下一轮开奖，更增加了这项活动的吸引力．

〔拓展延伸〕

现在在我们国家各项彩票也是品种繁多，体育彩票、福利彩票……大家不妨根据实际情况研究一下这些彩票的中奖情况.

例如：拟发行一种奖券，号码从 000000 到 999999，购买时揭号对奖，若规定，从最高位起，第一、三、五位是不同的奇数，第二、四、六位是偶数时为中奖号码，则中奖率是多少？

〔自主探究〕

袋子里有大小相同但标有不同号码的 3 个红球和 4 个黑球，从袋子里随机取球，设取到一个红球得 2 分，取到一个黑球得 1 分.

(1)若从袋子里随机取出 4 个球，求得 5 分的概率；

(2)若从袋子里每次摸出一个球后，看清颜色后放回，求连续 4 次摸球共得 5 分的概率.

4 摸奖促销　你也能把活动搞

〔背景资料〕

某糖果厂的新产品问世举办一场促销活动，方式是买一份糖果摸一次彩，摸彩的器具是绿、白两色的小球，这些球的大小和质地完全相同，该厂拟按中奖率 1%设大奖，其余 99%则为小奖，厂方公开征集摸奖方案.

首先需要验看厂方提供的器具：棱长约为 30 cm 的立方体形木箱，封闭良好，不透光，木箱的上方可容一只手伸入，另备足够多的白色和绿色小球.

有五位应征者提供了五种方案供厂方选择.

方案一：在箱内放置 100 个球，其中一个为绿色的，其余 99 个均为白色的，顾客一次摸出 1 个球，如果为绿色球，即为中大奖，否则为中小奖.

方案二：在箱内放 14 个球，其中两个为绿色球，其余 12 个均为白色，顾客一次摸出两个球，如果摸出的两个求均为绿色则中大奖；如果摸出的两个球均为白色，或一绿一白则中小奖.

方案三：在箱内放置 15 个球，其中 2 个为绿色，其余 13 个均为白色，顾客摸球和中奖方式与方案二相同.

方案四：在箱内放置 25 个球，其中 3 个为绿色球，其余 22 个均为白色，顾客一次摸出的 2 个球军为绿色即中大奖，其余为小奖.

方案五：在箱内放置 10 个球，其中 3 个为绿色，其余 7 个均为白色，顾客一

次摸出 3 个球，如果摸出的 3 个球均为绿色，即中大奖；否则只要摸出的球有一个为白色就中小奖.

厂方派出销售代表并邀请了几位商业营销心理学家对五种方案进行评估，假如你是其中的一位专家，你会如何评价？

〔问题解决〕

首先研究每种方案的中奖率是否满足要求：

设 P_i 是第 i 个方案中大奖的概率，则

$$P_1=\frac{1}{C_{100}^1}=\frac{1}{100};P_2=\frac{1}{C_{14}^2}=\frac{1}{91};P_3=\frac{1}{C_{15}^2}=\frac{1}{105};$$

$$P_4=\frac{C_3^2}{C_{25}^2}=\frac{1}{100};P_5=\frac{1}{C_{10}^3}=\frac{1}{120}.$$

只从数学角度考虑问题还不够，我们还要注意到与实际情况的联系，生活中的事情是丰富多彩的，要全方位地考虑问题.

关于方案一：中大奖的概率为 $\frac{1}{100}$，恰好符合厂方的要求，但缺点是箱内装的球个数太多，不便顾客查验，一个个的数又不太可能，所以顾客容易产生“中大奖太难”，“是不是真的装了 100 个球”等心理.

关于方案二：中大奖的概率为 $\frac{1}{91}$，较厂方的要求略高，但还是很接近的，由于箱内装的球个数不多，便于顾客当面查验，容易产生信任感，也可能会产生“中大奖很容易”的心理，增强了顾客购买糖果的欲望.

关于方案三：中大奖的概率为 $\frac{1}{105}$，略低于厂方要求，这个方案也和方案二一样，便于顾客当面查验，并且这个方案的大奖中奖率虽较方案一低，如果顾客不精于计算的话仍然可能产生“中大奖不难”的心理，尤其是当顾客大部分是儿童的时候. 但是如果厂方对外承诺中奖率，而又被发现中奖率低于要求的话，有可能受到顾客的质疑和投诉，如果遇到专门靠打假生存的人的话，可能要被加一商业欺诈罪名，有一定的风险.

关于方案四：中大奖的概率为 $\frac{1}{100}$，恰好符合厂方要求，但是在顾客估算中大奖的概率时会有一定的困难.

关于方案五：中大奖的概率为 $\frac{1}{120}$，低于长方要求，箱内球较少，便于查验，但一次摸三个球儿童不能同时进行，必然会导致操作不便，影响顾客的流动性，不利于场面的控制.

〔拓展延伸〕

袋中有 10 个白球，2 个红球，从中随机地连续取 3 个球，最后不放回，则第三个球才是红球的可能性是多大？

〔自主探究〕

袋子 A 和 B 中装有若干个均匀的红球和白球，从 A 中摸出一个红球的概率是$\frac{1}{3}$，从 B 中摸出一个红球的概率为 p.

(1) 从 A 中有放回地摸球，每次摸出一个，共摸 5 次. ①恰好有 3 次摸到红球的概率；②第一次、第三次、第五次摸到红球的概率.

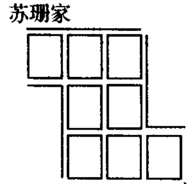
(2) 若 A、B 两个袋子中的球数之比为 12，将 A、B 中的球装在一起后，从中摸出一个红球的概率是$\frac{2}{5}$，求 p 的值.

5 避免骚扰　条条道路任我挑

〔背景资料〕

有这样一件事情让苏珊很为难，她每天步行去学校，路上老是遇到斯廷基："嘿嘿，苏珊，我可以陪你一起走吗？"苏珊很不愿意看到他，希望自己能够躲开他.

苏珊心想：我有办法了！每天早上我走不同的路线去学校，这样斯廷基就不知道在哪儿找到我了. 右面的地图表示苏珊的住所和学校之间的所有街道. 苏珊去学校时，走路的方向总是朝南或朝东，她总共有多少条路线呢？



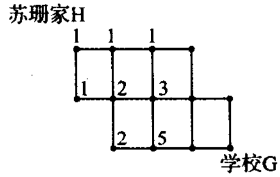
苏珊真想知道有多少条路线可走. 让我们想一想：如何算出有多少条路线可以去学校呢？

〔问题解决〕

苏珊终于想出了办法，她的推理如下. 苏珊想："在我家这个角点上写一个 1，因为我只能从这一点出发. 然后在相隔一个街区的两个角点上各写一个 1，因为到那里只有一条途径. 现在，我在这个角点上写上 2，因为到达那里可以有两条途径."苏珊发现 2 是 1 加 1 之和，她忽然领悟：若到某一个角点仅有一条途径，则该角点上的数字为前一个角点上的数字；若有两条途径，则为前两个角点

上的数字之和.

苏珊:“瞧,又有四个角点标上了数字,我马上把其他角点也标上数字.”请你替苏珊把剩下的角点标上数字,并且告诉她步行到学校共有多少条不同的路线.



剩下的 5 个点,自上而下,从左至右分别标以 1,4,9,4,13.最后一点上的 13 表示苏珊去学校共有 13 条最短路径.

苏珊所发现的是一种快速而简单的算法,用来计算从她家到学校的最短路径共有多少条.要是她把这些路径一条一条地画出来,然后再计数,这样肯定麻烦,还容易出错.如果街道的数目很多,那么这种方法根本就行不通.你不妨把这 13 条路线都画出来,这样你就更能体会到苏珊的算法是多么地有效了.

〔拓展延伸〕

你对这种算法是否已经理解?可以再画一些不同的街道网络,然后用这种算法来确定从任意点 A 到另一任意点 B 的最短路线共有多少条.网络可以是矩形网格、三角形网格、平行四边形网格和蜂窝状的正六边形网格,也可以用其他方法(例如组合公式)求解,但这种方法十分复杂,需要很高的技巧.

在国际象棋棋盘上,“车”从棋盘的一角到对角线上另一角的最短路径共有多少条?就像苏珊给街道交点标上数字一样,把棋盘上所有格子也都填上数字,于是问题就迎刃而解了.“车”只能沿着右上方向朝另一个角的目标移动,便可以求出共有多少条最短路径.如下所示:

1	8	36	120	330	792	1 716	3 432
1	7	28	84	210	462	924	1 716
1	6	21	56	126	252	462	792
1	5	15	35	70	126	210	330
1	4	10	20	35	56	84	120
1	3	6	10	15	21	28	36
1	2	3	4	5	6	7	8
车	1	1	1	1	1	1	1

把整个棋盘正确标号,根据所标的数字,一眼就能看出在棋盘上从一个角出发到任意一角,有多少条最短路线.右上角的数字是 3 432,所以“车”从一角到对角线的另一角的最短路径共有 3 432 条.

让我们把棋盘沿着左上至右下的对角线一截为二,使其成为如下图所示的阵列.此三角形上的数字与著名的帕斯卡三角形(我国叫做杨辉三角形)的数字是相同的,当然,计算街道路径条数的算法,恰恰就是构造帕斯卡三角形所依据的过程.这种同构现象使得帕斯卡三角形成为无数有趣特性的不竭的源泉.

1

1,1

1,2,1

1,3,3,1

1,4,6,4,1

…………

利用帕斯卡三角形立即可以求出二项式展开的系数，即求$(a+b)$的任意次幂，同样也可以用来解出初等概率论中的许多问题. 请注意，上图中自顶部至底部，从边沿一格来说是1，随着向中间移动，数字逐渐增加. 也许你见过根据帕斯卡三角形所制成的一种装置：在一快倾斜的板上，成百个小球滚过木钉进入各格的底部. 全部小球呈现出一条钟形的二项式分布曲线，因为到达每个底部孔位的最短路径的条数就是二项式展开的系数.

显然，苏珊的算法同样适用于由矩阵格子组成的三维结构. 比如：

设有一个边长为3的立方体，分成27个立方体单元，把它看成棋盘，处于某一个角格上的"车"可以向三个坐标上的任何位置作直线移动，试问"车"到空间对角线的另一个角格有多少条最短路径？

（资料来源：http://czsz. qqedu. net/whr/Article）

〔自主探究〕

如图1是由12个小正方形组成的3×4矩形网格，一质点沿网格线从点A到点B的不同路径之中.

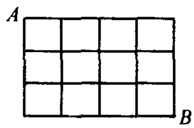


图1

(1)从A处到B处共需要多少步？

(2)其中有几步向右？

(3)其中有几步向下？

(4)则该质点沿网格线从点到点的不同路径之中，最短路径有多少条？

6 限时约会　彼此心中需准备

〔背景资料〕

现实生活中常常有很多约会问题，与人相约时即要求准时到达，但往往有其他因素干扰而不可能正好同时准确到达，所以这就出现了限时约会的问题.

甲、乙两人相约在0时至1时之间在某地约见，早到者到达后应等足20分钟方可离去，如果两人到达的时间是相互独立的，且在0时至1时之间的任何时刻是等概率的，问他们两人相遇的可能性有多大？

〔问题解决〕

设两人到达约会地点的时刻分别为 x,y，依题意必须满足 $|x-y|\leqslant\frac{1}{3}$ 才能相遇.

我们把他们到达的时刻分别作为横坐标和纵坐标，于是两人到达的时刻均匀分布在一个边长为 1 的正方形 I 内，而相遇现象则发生在阴影区域 G 内(如图 1)，即甲、乙两人到达时刻 (x,y) 满足 $|x-y|\leqslant\frac{1}{3}$，所以两人相遇的概率为区域 G 与区域 I 的面积比：

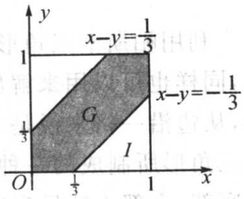


图 1

$$P=\frac{S_G}{S_I}=\frac{1-(\frac{2}{3})^2}{1}=\frac{5}{9}.$$

也就是说他们相遇的可能性过半.

〔拓展延伸〕

这类关于概率的问题，与我们高中教材中介绍的概率问题有所不同，它的事件数目是无穷大的，所以无法用我们所研究的古典概型来解决. 这类问题将所有的事件与平面直角坐标系上的点一一对应起来，将我们要研究的问题转化为平面直角坐标系上点与点的关系，这就需要运用平面几何的知识，将其转化为平面几何中的面积问题，(事件数目是成比例的，且与所占区域的面积成比例，)这是有别于古典概型的一种新的概率问题，我们称之为**几何概型**.

〔自主探究〕

在三点和四点之间，时钟上的分针和时针在什么时候重合?

7 桌面多高 影响效率很重要

〔背景资料〕

现在学校的桌椅都是统一高度，无论学生的身高是 1.6 m 或 1.8 m，都使用相同高度的桌椅，这样就会影响一部分人的学习，尤其是写字时，身高不同的同学对桌椅要求不同，使用不合适的桌椅会使写字效率降低. 如果找到每个人最适合的桌椅高度，就可以提高效率.

为了使写字的效率提高，并且在较长的伏案学习中能使胳膊不酸痛，那么人